00052002

NOT TO BE ISSUED
OUT OF THE LIBRARY.

00052002

Digitized with financial assistance from

H T Parekh
FOUNDATION

An Initiative by
HDFC
WITH YOU, RIGHT THROUGH

on 28 December, 2018

ÉLÉMENS
DE GÉOMÉTRIE.

AVIS.

Ce Volume fait partie du Cours élémentaire de Mathématiques pures, de M. *Lacroix, Cours qui comprend* l'Arithmétique, *l'*Algèbre, *la* Géométrie, *la* Trigonométrie rectiligne et sphérique, *ainsi que l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie. *On trouvera dans les* Essais sur l'Enseignement, *du même Auteur, l'Analyse de chacune de ces parties, auxquelles font suite, le* Complément des Élémens de Géométrie [*ou* Élémens de Géométrie descriptive], *le* Complément des Élémens d'Algèbre, *le* Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral, *et le* Traité élémentaire du Calcul des Probabilités.

Se vend aussi

A BORDEAUX,

CHEZ GASSIOT, LIBRAIRE,

FOSSÉS DE L'INTENDANCE, N° 61.

GOD
513
Lac/Ele
52002

IMPRIMERIE DE HUZARD-COURCIER,
rue du Jardinet, n° 12.

ÉLÉMENS

DE

GÉOMÉTRIE,

A L'USAGE

DE L'ÉCOLE CENTRALE

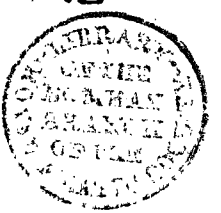
DES QUATRE-NATIONS.

PAR S.-F. LACROIX.

QUATORZIÈME ÉDITION,

REVUE ET CORRIGÉE.

52002



PARIS,

BACHELIER, SUCCESSEUR DE Mme Ve COURCIER,

LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES,

QUAI DES AUGUSTINS, No 55;

ET A BRUXELLES,

A LA LIBRAIRIE PARISIENNE, RUE DE LA MADELEINE, No 438,

1830.

AVIS DU LIBRAIRE.

L'auteur de ces Élémens, ayant réuni dans ses Essais sur l'Enseignement en général, et sur celui des Mathématiques en particulier, *tout ce qu'il avait écrit sur la métaphysique de ces Sciences, a fait entrer dans ce dernier Ouvrage, et avec des augmentations, les Discours qu'on trouvait à la tête du premier, sous le titre de* Réflexions sur l'ordre à suivre dans les Élémens de Géométrie, sur la manière de les écrire, et sur la méthode en Mathématiques. *Ces divers morceaux font maintenant partie d'un corps complet de remarques sur toutes les branches de l'Enseignement des Mathématiques élémentaires.*

On peut joindre aux Élémens de Géométrie *leur* Complément, *ayant aussi pour titre* Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes (*ou* Élémens de Géométrie descriptive), 6e *édition qui se trouve chez le même Libraire.*

Tout Exemplaire du présent Traité qui ne porterait pas, comme ci-dessous, les signatures de l'Auteur et du Libraire, sera contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la Loi, les fabricateurs et les débitans de ces Exemplaires.

Lacroix.

Bachelier

TABLE.

SUPPLÉMENT au *Traité d'Arithmétique*, pag. xxxij
Articles concernant le *toisé*, xxxix

Notions générales sur l'étendue, 1

1. L'espace que les corps occupent a trois dimensions, *longueur*, *largeur* et *profondeur*, ou *épaisseur*,
Les limites des corps sont des *surfaces*, et n'ont que deux dimensions, *longueur* et *largeur*,
Les limites des surfaces, ou leurs rencontres mutuelles, sont des *lignes*, et n'ont qu'une seule dimension, *longueur*,
Les limites des lignes, ou leurs rencontres mutuelles, sont des *points*, qui n'ont aucune dimension, *ibid.*
2. La ligne droite est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre,
Une ligne droite est déterminée par deux points, et ne peut se prolonger au-delà que d'une seule manière,
Le plan est une surface à laquelle on peut appliquer une ligne droite dans tous les sens, 2

PREMIÈRE PARTIE.

SECTION PREMIÈRE.

Des propriétés des lignes droites et circulaires, 3

Définitions et notions préliminaires,
3. On ne considère, dans les Élémens de Géométrie, que deux espèces de lignes, savoir, la *ligne droite* et la *ligne circulaire* dont tous les points, situés sur le même plan, sont également éloignés d'un autre point pris dans ce plan, et qu'on nomme le *centre*,
Les droites qui mesurent la distance des points quelconques de la circonférence à son centre, sont les *rayons* du cercle,
Une partie quelconque de sa circonférence se nomme *arc*,
On entend par *cercle* la portion du plan terminée de toutes parts par la ligne circulaire,
Pour trouver tous les points qui sont à une distance donnée d'un point donné, il faut décrire de ce dernier, comme centre, et avec un rayon égal à la distance donnée, une circonférence de cercle, *ibid.*
4. Mesurer la distance de deux points ou la longueur d'une droite, c'est chercher combien de fois cette droite en contient une autre prise pour unité,

En général, mesurer une ligne par une autre, c'est chercher le rapport de ces deux lignes, ou chercher s'il n'y a pas une ligne plus petite qui soit contenue un nombre exact de fois dans l'une et dans l'autre, et qui par conséquent soit la commune mesure des deux, 4

5. *Problème.* Deux droites étant données, trouver leur commune mesure, ou au moins le rapport approché de l'une à l'autre, *ibid.*

6. Une droite n'en peut rencontrer une autre qu'en un seul point, 5

7. L'espace indéfini compris entre deux droites qui se coupent en un point, et qu'on peut concevoir prolongées autant qu'on le voudra, se nomme *angle*,

Le point où se rencontrent les lignes ou les *côtés* qui forment l'angle, se nomme *sommet*, *ibid.*

8. Deux angles sont égaux lorsqu'étant posés l'un sur l'autre, ils se recouvrent parfaitement,

Il n'est pas nécessaire, pour que l'égalité ait lieu, que les côtés d'un angle aient la même longueur que ceux de l'autre; il suffit seulement qu'ils se recouvrent dans la partie qui leur est commune, 6

9. La position respective de deux droites dépend de l'angle qu'elles font entre elles,

Une ligne est *perpendiculaire* sur une autre quand elle fait avec cette autre deux angles égaux,

La perpendiculaire ne penche vers aucun côté de la droite qu'elle rencontre,

Les angles qu'elles forment sont nommés *angles droits*,

Tout angle moindre qu'un droit, se nomme *angle aigu*,

Tout angle plus grand qu'un droit, se nomme *angle obtus*,

Tous les angles droits sont égaux, *ibid.*

10. La somme de tous les angles qu'on peut faire du même côté d'une droite et autour d'un de ses points pris pour sommet, équivaut toujours à deux droits, en quelque nombre que soient ces angles, 7

11. Lorsqu'une droite tombe sur une autre, elle fait avec cette autre deux angles qui, réunis, valent deux droits,

Deux droites qui se coupent forment autour de leur point de rencontre quatre angles qui sont *opposés par le sommet* deux à deux, *ibid.*

12. *Théorème.* Les angles opposés par le sommet sont égaux, 8

13. *Corollaire.* Deux perpendiculaires forment entre elles quatre angles droits,

La somme de tous les angles qu'on peut former autour d'un point ne vaut jamais que quatre droits, *ibid.*

14. On ne peut enfermer un espace par un nombre de droites moindre que trois, cet espace se nomme *triangle*, *ibid.*

15. *Remarques.* La somme de deux côtés quelconques d'un triangle surpasse toujours le troisième,
Si l'on prend dans l'intérieur d'un triangle un point quelconque, et qu'on tire des droites de ce point à deux angles du triangle, la somme de ces droites sera moindre que celle des deux côtés du triangle qui les enveloppent,
On distingue six choses dans un triangle, savoir, trois angles et trois côtés,
Il y a entre ces six choses des relations nécessaires, 9
16. *Théorème.* Lorsque deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun, ils sont égaux dans toutes leurs parties, *ibid.*
17. *Corollaire.* Un triangle est entièrement déterminé par l'un de ses angles et les deux côtés qui le comprennent, 10
18. *Théorème.* Lorsque deux triangles ont, chacun à chacun, un côté égal adjacent à deux angles égaux, ces triangles sont égaux dans toutes leurs parties. 11
19. *Théorème.* Si deux côtés d'un triangle sont respectivement égaux à deux côtés d'un autre triangle, et que l'angle compris entre les deux premiers soit moindre que l'angle compris entre les deux derniers, le côté opposé au plus petit de ces deux angles sera moindre que le côté opposé à l'autre, *ibid.*
20. *Corollaire.* Deux triangles dont les trois côtés sont égaux, chacun à chacun, sont égaux dans toutes leurs parties, 12
21. *Problème.* Les trois côtés d'un triangle étant donnés séparément décrire le triangle, 13
22. *Remarques.* Pour qu'on puisse former un triangle avec trois lignes données, il faut que la somme de deux quelconques de ces droites soit plus grande que la troisième, *ibid.*
23. *Problème.* Par un point donné, pris sur une ligne donnée, faire un angle qui soit égal à un angle donné, 14
24. *Problème.* Un triangle étant donné, en construire un autre qui lui soit égal, en employant à la construction de ce dernier un angle du premier et les deux côtés qui le comprennent, *ibid.*
25. *Problème.* Un triangle étant donné, en construire un autre qui lui soit égal, en employant à la construction de ce dernier un côté du premier et les deux angles adjacens, 15

Des lignes perpendiculaires et des obliques, 15

26. *Théorème.* Les lignes qui partent d'un point quelconque de la perpendiculaire, et qui s'écartent également de son pied, sont égales, et celles qui s'en écartent le plus sont les plus longues, *ibid.*
27. 1er *Corollaire.* Deux obliques qui sont égales tombent nécessairement de différens côtés de la perpendiculaire, mais à égale distance de son pied, 16

28. 2e *Corollaire.* La perpendiculaire est la plus courte de toutes les lignes que l'on peut mener d'un point à une ligne donnée; lorsqu'elle tombe sur le milieu de cette droite, elle a tous ses points à égale distance des deux extrémités, et tous les points pris hors de la perpendiculaire sont inégalement éloignés de ces extrémités. D'un point à une droite, on ne saurait tirer trois droites égales, 16

29. *Problème.* Mener sur une ligne donnée une perpendiculaire qui la partage en deux parties égales, 17

30. *Problème.* Par un point donné sur une droite, élever une perpendiculaire à cette droite, *ibid*

31. *Problème.* Par un point donné pris hors d'une droite, abaisser une perpendiculaire sur cette droite, 18

32. *Théorème.* D'un point pris hors d'une droite, on ne peut abaisser sur cette droite qu'une seule perpendiculaire. La même chose a lieu pour tout point pris sur la ligne donnée, *ibid.*

33. 1er *Corollaire.* Deux droites perpendiculaires à une troisième ne se rencontrent point, quelque prolongées qu'on les suppose, soit au-dessus, soit au-dessous de cette dernière, 19

34. 2e *Corollaire.* Deux triangles qui ont chacun un angle droit, sont égaux, 1°. lorsque leurs côtés respectivement opposés aux angles droits, ainsi qu'un de leurs autres angles, sont égaux; 2°. lorsque, outre les côtés opposés aux angles droits, ils ont encore un côté égal, chacun à chacun, *ibid.*

35. *Remarques.* Le second cas de l'égalité qu'on a prouvé ci-dessus pour les triangles qui ont un angle droit, ne convient pas généralement à tous les autres, 20

36. *Théorème.* Lorsque deux côtés d'un triangle sont égaux, les angles opposés à ces côtés sont égaux; et lorsqu'ils sont inégaux, le plus grand des deux est opposé au plus grand angle, *ibid.*

37. *Corollaire.* Si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés opposés à ces angles sont aussi égaux entre eux. Le plus grand des deux côtés est celui qui est opposé au plus grand angle. Enfin quand les trois côtés d'un triangle sont égaux, les trois angles le sont aussi, et réciproquement, 21

38. Les triangles dont les côtés sont inégaux, se nomment *scalènes;* ceux qui ont deux côtés égaux se nomment *isocèles*, et ceux dont les trois côtés sont égaux, se nomment *équilatéraux*, 22

Des lignes parallèles, 22

39. Deux droites qui, quoique situées dans un même plan, ne se rencontrent pas, sont dites *parallèles* entre elles,
Deux perpendiculaires à une même droite sont donc parallèles, *ib.*

40. *Remarque.* Une droite étant perpendiculaire sur une autre,

toute droite qui sera oblique à celle-ci, étant prolongée suffisamment, rencontrera nécessairement la première, 22
Note où l'on prouve cette proposition, 23
41. *Théorème.* Lorsque deux droites sont parallèles, toutes celles qui sont perpendiculaires sur l'une le sont en même temps sur l'autre, 24
42. *Corollaire.* Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles, *ibid.*
43. *Théorème.* Lorsque deux droites parallèles entre elles sont coupées par une troisième, les angles qu'elles font avec cette dernière, d'un même côté, l'un en dehors, l'autre en dedans, sont égaux entre eux, 25
44. *Théorème.* Si deux droites font avec une troisième, et d'un même côté, par rapport à celle-ci, des angles égaux, l'un en dedans, l'autre en dehors, ces deux droites sont parallèles entre elles, *ibid.*
45. *Remarques.* On appelle *sécante* toute droite qui coupe des parallèles. Les angles situés du même côté de la sécante, et dont l'ouverture est tournée du même côté, se nomment *angles correspondans.* Tous les angles dont l'ouverture est entre les parallèles, se nomment *angles internes;* et on appelle *angles externes* ceux dont l'ouverture est en dehors. Les angles qui sont dans une situation opposée, tant par rapport à la sécante que par rapport aux parallèles, se nomment *angles alternes*, 26
46. *Théorème.* Lorsque deux parallèles sont coupées par une sécante,
1°. Les angles correspondans sont égaux,
2°. Les angles alternes internes sont égaux,
3°. Les angles alternes externes sont égaux,
4°. Les angles internes d'un même côté forment deux angles droits,
5°. Les angles externes d'un même côté forment deux angles droits,
6°. Lorsque l'une quelconque de ces propriétés a lieu, les droites sont nécessairement parallèles, *ibid.*
47. *Corollaire.* Deux droites respectivement perpendiculaires à deux autres droites qui se coupent, doivent nécessairement se rencontrer, 29
48. *Problème.* Par un point donné, mener une droite parallèle à une droite donnée, *ibid.*
49. *Problème.* Par un point donné pris hors d'une droite, en mener une autre qui fasse avec la première un angle égal à un angle donné, *ibid.*
50. *Théorème.* Les angles qui ont les côtés parallèles et l'ouverture placée dans le même sens, sont égaux, 30
51. *Théorème.* Les trois angles d'un triangle réunis valent toujours deux angles droits, *ibid.*

N. B. L'angle *extérieur* d'un triangle vaut à lui seul les deux angles intérieurs opposés, 31

52. *Corollaire.* Quand deux angles d'un triangle sont respectivement égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle de l'un est égal au troisième angle de l'autre,

Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit, et à plus forte raison qu'un seul angle obtus, *ibid.*

53. On nomme triangle *rectangle* celui qui a un angle droit, *acutangle* celui qui n'a que des angles aigus, et *obtusangle* celui qui a un angle obtus. Les deux dernières espèces sont comprises sous la dénomination de triangles *obliquangles*. Dans le triangle équilatéral, dont tous les angles sont égaux, chaque angle est les deux tiers d'un droit, *ibid.*

54. *Théorème.* Les parties de parallèles interceptées entre parallèles sont égales, et réciproquement, *ibid.*

55. *Corollaire.* Deux parallèles sont partout également éloignées l'une de l'autre, 32

56. *Théorème.* Si deux droites quelconques sont coupées par un nombre quelconque de parallèles menées par des points pris à des distances égales sur la première, les parties de la seconde seront aussi égales entre elles, *ibid.*

57. *Corollaire.* Un nombre quelconque de parties de la première droite est à un pareil nombre de parties de la seconde, comme la première droite entière est à la seconde entière, 33

58. *Théorème.* Trois parallèles coupent toujours deux droites quelconques en parties proportionnelles, *ibid.*

Note sur les rapports incommensurables, 35

59. 1*er* *Corollaire.* Si on mène dans un triangle une droite parallèle à l'un des côtés, les deux autres côtés seront coupés en parties proportionnelles par cette droite, *ibid.*

60. 2*e* *Corollaire.* Réciproquement lorsqu'une droite coupe deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles, elle est parallèle au troisième, 36

61. 3*e* *Corollaire.* La droite qui divise en deux parties égales l'un des angles d'un triangle quelconque, partage le côté opposé en deux segmens proportionnels aux côtés adjacens, *ibid.*

62. *Problème.* Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données, 37

63. Deux triangles sont *semblables* lorsque les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, et que les côtés qui, dans l'un et dans l'autre, sont opposés à des angles égaux, et que, pour cette raison on nomme *côtés homologues*, sont proportionnels. L'une de ces conditions entraîne toujours l'autre, *ibid.*

64. *Théorème.* Lorsque deux triangles ont leurs angles égaux, chacun à chacun, leurs côtés homologues sont proportionnels, et ces

triangles sont par conséquent semblables, 38
65. *Corollaire.* Deux triangles sont semblables, 1°. lorsqu'ils ont seulement deux angles égaux chacun à chacun; 2°. lorsque leurs côtés sont respectivement parallèles; 3°. lorsque leurs côtés sont respectivement perpendiculaires, *ibid.*
66. *Théorème.* Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal, chacun à chacun, compris entre des côtés proportionnels, 40
67. *Théorème.* Deux triangles qui ont les côtés proportionnels, chacun à chacun, sont semblables, 41
68. *Problème.* Construire sur une droite donnée un triangle semblable à un triangle donné, *ibid.*
69. *Théorème.* Tant de lignes qu'on voudra, menées par un même point, et rencontrées par deux parallèles, sont coupées par ces parallèles en parties proportionnelles, et les coupent aussi en parties proportionnelles, 42
70. *Problème.* Diviser une droite donnée de la même manière qu'une autre est divisée, 43
71. *Remarque.* Autre solution de la même question, 44
72. 1*er* *Corollaire.* Division d'une droite en parties égales, 45
73. 2*e* *Corollaire.* Construction des *échelles*, *ibid.*
74. *Théorème.* Si, de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, qu'on nomme *hypoténuse*, 1°. cette perpendiculaire partagera le triangle en deux autres qui lui seront semblables, et qui le seront par conséquent entre eux; 2°. elle divisera l'hypoténuse en deux parties ou *segmens* tels, que chaque côté de l'angle droit sera moyen proportionnel entre le segment qui lui est adjacent et l'hypoténuse entière; 3°. la perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les deux segmens de l'hypoténuse, 47
75. *Corollaire.* La seconde puissance du nombre qui exprime la longueur de l'hypoténuse est égale à la somme des secondes puissances des nombres qui expriment les longueurs des deux autres côtés, 48
76. *Théorème.* Les trois côtés d'un triangle quelconque étant rapportés à une mesure commune, et exprimés par conséquent en nombres, si, de l'extrémité de l'un quelconque de ces côtés, on abaisse une perpendiculaire sur l'un des deux autres, la seconde puissance du premier sera égale à la somme des secondes puissances des derniers, moins deux fois le produit du côté sur lequel tombe la perpendiculaire, par la distance de cette perpendiculaire à l'angle opposé au premier côté, si cet angle est aigu, et plus deux fois le même produit, si cet angle est obtus, 49
77. *Corollaire.* Un triangle est acutangle, rectangle ou obtusangle, selon que la seconde puissance du plus grand de ses côtés est moindre que la somme des secondes puissances des deux autres côtés, l'égale ou la surpasse, 51

Des polygones, 51

78. Les surfaces planes terminées par un assemblage quelconque de lignes droites, se nomment *polygones*,

Le plus simple de tous est le triangle; les polygones de quatre côtés se nomment en général *quadrilatères*, de cinq *pentagones*, de six *hexagones*, de sept *eptagones*, de huit *octogones*, de neuf *ennéagones*, de dix *décagones*, de douze *dodécagones*, de quinze *pentédécagones*,

Les angles dont l'ouverture est en dedans du polygone sont des angles *saillans*, ceux dont l'ouverture est en dehors se nomment angles *rentrans*,

Les lignes tirées des angles du polygone, qui ne sont pas adjacens au même côté, se nomment *diagonales*, *ibid.*

79. Le polygone de quatre côtés, dont les côtés opposés sont parallèles, est un *parallélogramme*,

1°. Chaque diagonale partage le parallélogramme en deux triangles égaux,

2°. Les côtés opposés d'un parallélogramme sont respectivement égaux,

3°. Si les côtés opposés d'une figure de quatre côtés sont égaux, ou bien si deux côtés opposés sont égaux et parallèles, cette figure est un parallélogramme, 52

80. *Théorème.* Les deux diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales, 53

81. *Théorème.* En joignant l'un des angles d'un polygone à tous les autres, on partage ce polygone en un nombre de triangles égal à celui de ses côtés, diminué de deux unités, *ibid.*

82. *Corollaire.* La somme de tous les angles intérieurs d'un polygone vaut autant de fois deux droits qu'il a de côtés moins deux, 54

83. *Théorème.* Si l'on prolonge dans le même sens tous les côtés d'un polygone qui n'a point d'angles rentrans, la somme des angles extérieurs est égale à quatre droits, quel que soit d'ailleurs le nombre des côtés du polygone, *ibid.*

84. *Remarque.* Deux polygones sont égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de triangles égaux et semblablement disposés, 55

85. *Théorème.* Lorsqu'on connaît tous les côtés d'un polygone, à l'exception d'un seul, et qu'on connaît aussi les angles compris entre les côtés donnés, le polygone est déterminé et peut être construit, *ibid.*

86. *Remarque.* Pour déterminer un polygone d'un nombre N de côtés, il faut $2N-3$ choses données, parmi lesquelles les angles ne doivent compter que pour $N-1$ données, *ibid.*

87. On nomme *polygones semblables* ceux dont les angles sont égaux, et dont les côtés homologues sont proportionnels, 56

88. *Théorème.* Deux polygones composés d'un même nombre de triangles semblables, chacun à chacun, et semblablement disposés ont leurs angles égaux, chacun à chacun, leurs côtés homologues proportionnels, et sont par conséquent semblables, 56
89. *Théorème.* Lorsque deux polygones sont semblables, ils sont composés d'un même nombre de triangles semblables, chacun à chacun, et semblablement disposés, 57
90. *Problème.* Construire, sur une ligne donnée, un polygone semblable à un polygone donné, 58
91. *Remarque.* Autre manière de partager des polygones en triangles, *ibid.*
Note sur l'art de lever des plans, 59
92. *Théorème.* Si l'on tire dans deux polygones semblables, deux droites qui soient semblablement placées dans l'un et dans l'autre, elles seront proportionnelles aux côtés homologues des polygones, *ibid.*
93. *Théorème.* Les contours de deux polygones semblables sont entre eux comme les côtés homologues de ces polygones, 60

De la ligne droite et du cercle, 61

94. Une droite et un cercle ne peuvent se couper en plus de deux points,
Toute droite qui coupe la circonférence du cercle et qui est prolongée au dehors, *se nomme sécante*,
La partie de cette droite comprise dans le cercle, se nomme *corde*, *ib.*
95. La corde qui passe par les extrémités d'un arc, ou qui le *soutend*, est dite sa *corde*,
La même corde appartient à deux arcs, qui, réunis, forment la circonférence entière, *ibid.*
96. Lorsqu'une corde passe par le centre du cercle, on lui donne le nom de *diamètre*,
Tous les diamètres d'un cercle sont égaux entre eux,
Le diamètre est la plus grande des droites qu'on peut tirer dans la circonférence du cercle, *ibid.*
97. Le diamètre partage la circonférence en deux parties égales,
Deux cercles décrits d'un même rayon sont égaux, *ibid.*
98. *Théorème.* Si l'on porte un arc quelconque de cercle sur un autre arc du même cercle ou d'un cercle décrit du même rayon que le premier, de manière que deux points quelconques de l'un des arcs tombent sur l'autre, et que les convexités soient tournées du même côté, le plus petit de ces arcs se confondra dans toute son étendue avec le plus grand, 62
Note sur cette propriété du cercle, qui lui est commune avec la ligne droite, et qui prouve la similitude de toutes ses parties ou l'uniformité de sa courbure, *ibid.*

99. *Corollaire.* Dans un même cercle ou dans deux cercles décrits du même rayon, les arcs dont les cordes sont égales, sont égaux lorsqu'ils sont de même espèce, c'est-à-dire tous moindres que la demi-circonférence, ou tous plus grands; et réciproquement quand les arcs sont égaux, les cordes sont égales, 62

100. *Théorème.* Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, le plus grand arc a la plus grande corde, et réciproquement, pourvu toutefois que les arcs que l'on compare soient moindres que la demi-circonférence, 63

101. *Problème.* Deux arcs du même cercle ou de cercles égaux étant donnés, trouver le rapport de leurs longueurs, *ibid.*

102. *Remarque.* La droite qui n'a qu'un point de commun avec le cercle, ou qui ne fait que le toucher, se nomme *tangente*, 64

103. *Théorème.* La perpendiculaire menée par un point de la circonférence du cercle, sur le rayon qui passe par ce point, est tangente au cercle; et réciproquement la tangente, à un point quelconque de la circonférence, est perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené par ce point, 65

104. *Corollaire.* On mène une tangente à un point donné de la circonférence du cercle, en élevant une perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui passe par ce point, *ibid.*

105. *Théorème.* Toute droite élevée perpendiculairement sur le milieu d'une corde, passe par le centre du cercle et par le milieu de l'arc soutendu par cette corde, 66

106. 1er *Corollaire.* Le milieu d'une corde, le centre du cercle et le milieu de l'arc soutendu par la corde, étant en ligne droite, dès qu'une droite passe par deux de ces points, elle passe nécessairement par le troisième,

Toute perpendiculaire abaissée du centre ou du milieu de l'arc, sur la corde, tombera sur le milieu de cette droite, *ibid.*

107. 2e *Corollaire.* Pour diviser un arc en deux parties égales, il suffit d'élever une perpendiculaire sur le milieu de la corde qui soutend cet arc, *ibid.*

108. *Théorème.* Les arcs interceptés dans un même cercle entre deux cordes parallèles, ou entre une tangente et une corde parallèles, sont égaux, 67

109. *Théorème.* Si des sommets de deux angles, on décrit deux arcs de cercle du même rayon, le rapport des arcs compris entre les côtés de chaque angle, sera le même que celui de ces angles, *ibid.*

110. 1er *Corollaire.* Le rapport des arcs étant le même que celui des angles, il s'ensuit que la mesure d'un angle est l'arc de cercle compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre, 69

111. 2e *Corollaire.* Les droites qui divisent un arc en plusieurs parties égales, divisent aussi dans un même nombre de parties égales l'angle que mesure cet arc, 70

112. *Théorème.* Lorsqu'un angle a son sommet placé à la circonférence d'un cercle, il a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, 71

113. 1*er Corollaire.* L'angle formé par une corde et par le prolongement d'une autre corde, a pour mesure la moitié de la somme des arcs soutendus par ces cordes, en dehors de l'angle qu'elles forment, 72

114. 2*e Corollaire.* 1°. Tous les angles qui ont leur sommet placé à la circonférence, et s'appuient sur le même arc, sont égaux,

2°. L'angle dont le sommet est sur la circonférence, et dont les côtés passent par les extrémités d'un diamètre, est droit, 73

115. *Théorème.* L'angle dont le sommet est placé dans le cercle, entre le centre et la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, plus la moitié de l'arc compris entre leurs prolongemens, *ibid.*

116. *Théorème.* L'angle dont le sommet est placé hors du cercle, a pour mesure la moitié de la différence des arcs compris entre ses côtés, et dont l'un tourne sa concavité vers le sommet, et l'autre sa convexité, 74

117. *Problème.* Élever une perpendiculaire à l'extrémité d'une ligne droite sans la prolonger, *ibid.*

118. *Problème.* D'un point donné hors d'un cercle, mener une tangente à ce cercle, *ibid.*

119. *Problème.* Par *trois points qui ne sont pas en ligne droite*, faire passer une circonférence de cercle, 75

120. 1*er Corollaire.* Par trois points donnés on ne peut faire passer qu'une seule circonférence de cercle,

La question devient insoluble quand les trois points sont en ligne droite, *ibid.*

121. 2*e Corollaire.* Deux cercles ne peuvent avoir trois points communs sans se confondre, et ne sauraient par conséquent se rencontrer en plus de deux points, 76

122. *Théorème.* Deux cercles qui passent par un même point de la droite qui joint leurs centres, n'ont que ce point de commun, dans lequel ils se touchent par conséquent; et réciproquement si deux cercles se touchent, leurs centres et le point de contact sont en ligne droite, *ibid.*

123. *Remarques.* Conditions qui doivent avoir lieu pour que deux cercles se coupent,

La perpendiculaire élevée par le point de contact de deux cercles, sur la ligne qui joint leurs centres, touche en même temps ces deux cercles,

Entre un cercle et sa tangente, on ne peut mener aucune droite, mais on peut y faire passer une infinité de cercles différens, 77

Note sur l'angle de contingence, 78

124. *Problème.* Décrire un cercle qui touche en un point donné, une droite donnée de position, et qui passe par un second point donné, 78
125. *Problème.* Décrire un cercle qui touche en un point donné, un autre cercle donné, et qui passe par un second point donné, 79
126. *Problème.* Décrire sur une ligne donnée, un cercle tel, que tous les angles ayant leur sommet à sa circonférence, et s'appuyant sur cette droite, soient égaux à un angle donné, ou décrire un *segment* de cercle *capable* d'un angle donné, *ibid.*
127. *Théorème.* Deux sécantes qui partent d'un même point pris hors du cercle, étant prolongées jusqu'à la partie de la circonférence la plus éloignée de ce point, sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures, 80
128. *Remarque.* La tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante et sa partie extérieure,
Démonstration de cette proposition *à priori*, *ibid.*
129. *Théorème.* Deux cordes qui se rencontrent dans un cercle, se coupent en parties réciproquement proportionnelles, 81
N. B. Enoncé commun au théorème ci-dessus et à celui du n° 127 :
Lorsque deux droites qui se coupent, rencontrent en même temps une circonférence de cercle, chacune en deux points, les distances de leur point d'intersection à chacun de ceux où elles rencontrent cette circonférence, sont réciproquement proportionnelles, 82
130. *Corollaire.* La perpendiculaire élevée sur un diamètre, et terminée à la circonférence, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens du diamètre, *ibid.*
Comment on trouve une moyenne proportionnelle entre deux lignes données, *ibid.*
131. *Remarque.* Démonstration de la proposition précédente, tirée du triangle rectangle,
La corde menée par l'extrémité du diamètre, est moyenne proportionnelle entre le diamètre et le segment formé par la perpendiculaire abaissée de l'autre extrémité de cette corde,
Autre manière de trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données, *ibid.*
132. *Problème.* Partager une ligne en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire, de manière que la plus grande des deux parties soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière et l'autre partie, 83
133. *Problème.* Décrire un cercle qui passe par deux points donnés, et qui touche une ligne droite indéfinie donnée de position, 84
Note sur les diverses solutions dont ce problème et le précédent sont susceptibles, *ibid.*
134. *Théorème.* Lorsque des cordes partent de la même extrémité d'un diamètre, les secondes puissances de leurs longueurs sont pro-

portionnelles aux segmens compris sur ce diamètre, entre l'extrémité commune à toutes les cordes et le pied de la perpendiculaire abaissée de l'autre extrémité, 85

Des polygones inscrits et circonscrits au cercle, 85

135. *Remarque.* On peut faire passer un cercle par les sommets des angles d'un triangle quelconque. Dans ce cas, le triangle est *inscrit* au cercle, et le cercle est *circonscrit* au triangle.

Autre démonstration des propositions des numéros 36, 37 et 51, *ib.*

136. *Problème.* Inscrire un cercle dans un triangle donné, c'est-à-dire, décrire dans l'intérieur de ce triangle, un cercle qui ne fasse qu'en toucher les trois côtés, 86

137. *Remarque.* On ne saurait généralement inscrire dans un cercle tous les polygones de quatre ou d'un plus grand nombre de côtés, 87

Note sur le caractère des quadrilatères inscrits au cercle, *ibid.*

138. *Théorème.* Tout polygone d'un nombre quelconque de côtés, lorsqu'il est *régulier*, c'est-à-dire lorsqu'il a tous ses angles égaux et tous ses côtés égaux, peut être inscrit et circonscrit au cercle, *ibid.*

139. Les angles formés par les rayons menés du centre du polygone à chacun de ses angles, se nomment *angles au centre*, et leur somme étant équivalente à quatre droits, chacun d'eux est égal à cette somme, divisée par le nombre des angles ou des côtés du polygone proposé, 89

140. *Théorème.* Les polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables, et leurs contours sont entre eux comme les rayons des cercles auxquels ils sont inscrits ou circonscrits, *ibid.*

141. *Problème.* Un polygone d'un nombre quelconque de côtés étant inscrit au cercle, inscrire dans le même cercle un second polygone d'un nombre de côtés double de celui des côtés du premier, et trouver la valeur de l'un des côtés du second, 90

142. Le quadrilatère dont les angles et les côtés sont égaux, se nomme *quarré*, chacun de ses angles est droit, 91

143. *Remarques.* Le quarré est un parallélogramme; le parallélogramme dont les côtés sont égaux et les angles inégaux, se nomme *rhombe* ou *lozange*, celui dont les quatre angles sont droits et les côtés inégaux, se nomme *rectangle;* tout rectangle peut s'inscrire dans un cercle, *ibid.*

144. *Problème.* Construire un quarré sur une ligne donnée, 92

145. *Problème.* Inscrire dans un cercle les polygones de 4, 8, 16, 32, 64, etc. côtés, *ibid.*

Note sur la manière d'obtenir $\sqrt{2}$ géométriquement, 93

(*Voyez aussi* l'addition, page 215.)

146. *Problème.* Inscrire dans un cercle les polygones de 3, 6, 12, 24, 48 etc. côtés, *ibid.*

147. *Problème.* Inscrire dans un cercle les polygones de 5, 10, 20, 40, etc. côtés, 94
148. *Remarque.* La différence entre les arcs soutendus par les côtés de l'hexagone et du décagone, donne la quinzième partie de la circonférence, la corde de cet arc est le côté du pentédécagone, et par sa *bissection*, on obtiendra les polygones de 30, 60, etc. côtés, 95
Note sur la division du cercle en $2^n + 1$ parties, 96
149. *Problème.* Un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés étant inscrit dans un cercle, circonscrire au même cercle un polygone régulier du même nombre de côtés; et réciproquement le polygone circonscrit étant donné, construire le polygone inscrit, *ibid.*
150. *Corollaire.* Expression du côté du polygone régulier circonscrit, par le moyen de celui du polygone inscrit correspondant, 98
151. *Remarque.* La différence entre le contour du polygone inscrit et celui du polygone circonscrit correspondant, diminue à mesure qu'on augmente le nombre de leurs côtés, et on peut toujours trouver deux polygones, l'un inscrit, l'autre circonscrit, tels, que la différence de leurs contours soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur, *ibid.*
152. *Corollaire.* La circonférence du cercle est moindre que le contour du polygone circonscrit, et plus grande que celui du polygone inscrit; on peut toujours trouver un polygone, soit inscrit, soit circonscrit, tel, que la différence entre son contour et la circonférence du cercle soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur, 100
153. *Théorème.* Si deux grandeurs invariables, A et B, sont telles, qu'on puisse prouver que leur différence $A - B$ est moindre qu'une troisième grandeur δ, quelque petite que puisse être cette dernière, ces deux grandeurs sont égales entre elles, *ibid.*
154. *Théorème.* Les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs rayons ou leurs diamètres, 101
Note. Autre démonstration du même théorème, 102
155. *Corollaire.* Moyen de calculer la longueur d'une circonférence dont on connaît le rayon, 103
156. *Problème.* Trouver le rapport approché de la circonférence au diamètre, *ibid.*
Note. Rapport de la circonférence au diamètre, consigné dans un ouvrage persan, 106
157. *Remarque.* Solution abrégée du problème précédent, 107

SECTION II.

De l'aire des polygones et de celle du cercle, 109
158. La portion d'étendue renfermée entre les lignes qui terminent une figure, se nomme la *surface* ou l'*aire* de cette figure, *ibid.*
Note sur l'emploi des mots *surface* et *aire*, *ibid.*

159. Deux figures de formes différentes, mais d'une étendue égale, ou renfermant des aires égales, sont dites *équivalentes*, 109
160. Dans les triangles et dans les parallélogrammes, on prend arbitrairement pour *base* un des côtés, et on appelle *hauteur* la perpendiculaire abaissée de l'angle opposé à ce côté dans le triangle, ou d'un point quelconque du côté opposé dans le parallélogramme, *ibid.*
161. *Théorème.* Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalens, 110
162. *Théorème.* Un triangle quelconque est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur, 111
163. *Corollaire.* Deux triangles qui ont même base et même hauteur sont équivalens, *ibid.*
164. *Problème.* Transformer un polygone en un autre qui ait un côté de moins, et qui soit équivalent, *ibid.*
165. *Corollaire.* On peut changer ainsi un polygone quelconque en un triangle équivalent, 112
166. *Théorème.* Deux rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, *ibid.*
167. *Théorème.* Deux rectangles quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, 114
Note sur la considération des produits des aires, 115
168. *Remarque.* Sur la mesure des aires en général, et sur le sens de l'expression, *l'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur*, *ibid.*
169. 1*er* *Corollaire.* L'aire d'un quarré se mesure par la seconde puissance de son côté, 117
170. 2*e* *Corollaire.* L'aire d'un parallélogramme se mesure par le produit de sa base par sa hauteur,
Deux parallélogrammes quelconques sont dans le rapport des produits de leurs bases par leurs hauteurs, *ibid.*
171. 3*e* *Corollaire.* L'aire d'un triangle est mesurée par la moitié du produit de sa base par sa hauteur, *ibid.*
Les triangles quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, *ibid.*
172. *Problème.* Transformer un parallélogramme ou un triangle en un quarré, 118
173. *Corollaire.* Transformer un polygone quelconque en un quarré équivalent, *ibid.*
174. *Remarque.* On évalue l'aire d'un polygone quelconque en prenant la somme de celles des triangles qui le composent, *ibid.*
175. *Théorème.* L'aire d'un quadrilatère dans lequel deux côtés sont parallèles, et qu'on nomme *trapèze*, se mesure par le produit de la demi-somme des deux côtés parallèles, multipliée par la hauteur prise entre ces côtés, 119
L'aire du trapèze se mesure aussi par le produit de sa hauteur, par une ligne menée à égale distance des deux bases parallèles, *ibid.*

176. *Théorème.* Les aires des polygones semblables sont entre elles comme les quarrés des côtés homologues de ces polygones, 119
177. *Théorème.* Les aires de deux triangles qui ont un angle commun, sont dans le rapport des produits des côtés qui comprennent cet angle, 121
178. *Théorème.* Le quarré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle, est équivalent à la somme des quarrés construits sur les deux autres côtés de ce triangle, *ibid.*
179. 1*er Corollaire.* Les quarrés construits sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle et sur l'hypoténuse, sont entre eux comme les segmens adjacens et l'hypoténuse entière, 122
180. 2*e Corollaire.* Tout polygone construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle, est équivalent à la somme des polygones semblables construits sur les deux autres côtés, 123
181. *Problème.* Construire un polygone semblable à un autre, et dont l'aire soit dans un rapport donné avec celle du premier, ou soit équivalente à un quarré donné, *ibid.*
182. *Théorème.* L'aire d'un polygone régulier a pour mesure la moitié du produit de son contour par le rayon du cercle inscrit, Ce contour se nomme *périmètre*, et le rayon du cercle inscrit se nomme *apothème*, 124
183. *Corollaire.* Les aires des polygones réguliers sont entre elles comme les quarrés des rayons des cercles *dans lesquels* ils sont inscrits ou auxquels ils sont circonscrits, 125
184. *Remarque.* Il est toujours possible de trouver deux polygones du même nombre de côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit, tels, que la différence de leurs aires soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur, *ibid.*
185. *Corollaire.* On peut toujours assigner un polygone régulier, soit inscrit, soit circonscrit, dont l'aire diffère aussi peu qu'on voudra de celle d'un cercle donné, 126
186. *Théorème.* Si trois grandeurs, A, B, X sont telles, que la première A, que l'on suppose variable, mais néanmoins surpassant toujours les deux autres, B, X, qui ne changent point, puisse approcher de toutes deux en même temps, aussi près qu'on voudra, on aura nécessairement $B = X$, *ibid.*
187. *Théorème.* L'aire d'un cercle a pour mesure la moitié du produit de la circonférence par le rayon, 127
Note. Autre preuve de la même proposition, 128
188. *Corollaire.* Les aires des cercles sont entre elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres, L'aire d'un cercle est égale au quarré du rayon, multiplié par le rapport de la circonférence au diamètre, *ibid.*
189. *Théorème.* L'aire d'un *secteur de cercle* a pour mesure la moitié du produit de l'arc par le rayon, 129
190. *Remarque.* L'aire du *segment* s'obtient en retranchant de l'aire du secteur celle du triangle correspondant, *ibid.*
N. B. Ce que c'est que le *segment* et sa *flèche*, 130

DEUXIÈME PARTIE.

SECTION PREMIÈRE.

Des plans et des corps terminés par des surfaces planes. Des plans et des lignes droites, 131

191. Une ligne droite qui a deux de ses points dans un plan, s'y trouve tout entière, *ibid.*

192. L'intersection de deux plans est une ligne droite, *ibid.*

193. Il faut trois points pour déterminer un plan, ou deux plans ayant trois points communs qui ne sont pas en ligne droite, coïncident parfaitement, *ibid.*

194. Deux lignes qui se coupent sont dans un même plan, Tout triangle est dans un seul plan, et quatre points qui ne sont pas dans un même plan, forment un *quadrilatère gauche*, 132

195. Dans l'espace, deux droites peuvent être perpendiculaires à une troisième, sans être parallèles entre elles, *ibid.*

196. *Théorème.* Une droite élevée hors d'un plan, perpendiculairement à deux autres menées par son pied dans ce plan, est perpendiculaire à toutes celles qu'on pourrait mener par ce point, dans le même plan, 133

197. *Remarque.* La ligne menée d'après le théorème précédent, est perpendiculaire au plan sur lequel elle est élevée, 134

198. *Théorème.* Si trois droites sont perpendiculaires à une même droite, par un même point, elles sont toutes les trois dans un même plan perpendiculaire à cette dernière, *ibid.*

199. *Théorème.* Par un point pris, soit hors d'un plan, soit sur ce plan, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à ce plan, et par le même point d'une droite, il ne peut passer qu'un seul plan perpendiculaire à cette droite, *ibid.*

200. *Théorème.* Les obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire à un plan, sont egales; celles qui s'écartent le plus sont les plus longues, et la perpendiculaire est la plus courte de toutes les droites que l'on puisse mener d'un point donné à un plan, 135

201. *Remarques.* Chaque point de la perpendiculaire à un plan peut être employé à décrire dans ce plan, des cercles dont le centre soit à son pied,

La perpendiculaire étant la plus courte ligne qu'on puisse mener d'un point pris hors d'un plan, sur ce plan, est la mesure naturelle de leur distance, 136

202. *Théorème.* Si par un point d'une droite oblique à un plan, on abaisse sur ce plan une perpendiculaire, et que l'on joigne les

pieds de l'oblique et de la perpendiculaire par une droite, la perpendiculaire à cette dernière sera aussi perpendiculaire sur l'oblique, 136

203. *Théorème.* Une droite située hors d'un plan, mais parallèle à une ligne quelconque menée dans ce plan, ne le rencontre point, quelque prolongée qu'on la suppose, et est en même temps parallèle à toute droite menée dans le plan parallèlement à la première, *ibid.*

204. *Corollaire.* Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles, 137

205. *Théorème.* Les angles qui ont les côtés parallèles et l'ouverture tournée dans le même sens, sont égaux, quoique situés dans des plans différens, *ibid.*

206. *Théorème.* Si, par un point quelconque de la commune section de deux plans, on mène dans chacun de ces plans des droites respectivement perpendiculaires à cette commune section, et que l'angle qu'elles forment entre elles soit égal à celui que forment deux autres droites menées de la même manière dans deux autres plans, on pourra faire coïncider les deux premiers plans avec les deux derniers, 138

207. 1er *Corollaire.* L'espace indéfini compris entre deux plans qui se coupent se nomme *angle dièdre*, ou *angle à deux faces*; il mesure leur *inclinaison*,

L'angle dièdre a pour mesure l'angle plan formé par deux droites menées dans chacune de ses faces, perpendiculairement à leur commune section, et par un même point de cette droite,

Les angles dièdres jouissent des mêmes propriétés que les angles plans qui les mesurent, 139

Note. Raison de la dénomination d'*angle dièdre*, *ibid.*

208. 2e *Corollaire.* Un plan mené par une ligne perpendiculaire à un autre plan, est perpendiculaire sur ce dernier,

Par une droite prise dans un plan, on ne peut élever qu'un seul plan perpendiculaire au premier, 140

209. *Théorème.* Si, par un point quelconque de la commune section de deux plans qui se rencontrent à angle droit, on élève perpendiculairement au premier, une droite, elle sera comprise dans le second, 141

210. *Corollaire.* L'intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième, est perpendiculaire à ce dernier, *ibid.*

211. *Théorème.* La droite menée dans un plan, perpendiculairement à la commune section de celui-ci avec un autre qui le rencontre à angle droit, est perpendiculaire sur cet autre, *ibid.*

212. *Théorème.* Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles entre elles; et réciproquement si une droite est perpendiculaire à un plan, toute autre droite parallèle à celle-ci sera aussi perpendiculaire au même plan, 142

213. *Théorème.* Deux plans perpendiculaires à une même droite ne sauraient se rencontrer, *ibid.*

214. Deux plans perpendiculaires à une même droite, ne se rencontrant point, sont *parallèles* entre eux, 142
215. *Théorème.* Lorsque deux plans parallèles sont coupés par un troisième, les intersections sont parallèles entre elles, 143
216. *Corollaire.* Deux plans parallèles ont leurs perpendiculaires communes,
La distance de deux plans parallèles est partout la même, *ibid.*
217. *Théorème.* Si deux droites qui se coupent sont parallèles à deux autres droites qui se coupent, le plan déterminé par les deux premières sera parallèle à celui que déterminent les deux autres, *ibid.*
218. *Corollaire.* Par deux droites qui, ne se coupant point et n'étant point parallèles entre elles, ne sauraient être comprises dans un même plan, on peut toujours faire passer deux plans parallèles, dont la plus courte distance donne celle des deux droites proposées, 144
219. *Remarque.* La plus courte distance des droites de l'article précédent, a lieu sur une droite qui est perpendiculaire à toutes deux en même temps, *ibid.*
220. *Théorème.* Deux droites comprises entre deux plans parallèles sont toujours coupées en parties proportionnelles, par un troisième plan parallèle aux deux premiers, 145
221. Lorsque plusieurs plans qui passent par un *même point* se rencontrent deux à deux, *l'espace qu'ils comprennent entre eux, indéfini dans le sens opposé au point* où *ils* se rencontrent, se nomme *angle polyèdre*, ou angle à plusieurs faces,
L'angle à trois faces se nomme *angle trièdre*, etc.,
Le point de rencontre de toutes les faces d'un angle polyèdre en est le *sommet*,
Les communes sections des faces sont les *arètes*,
Il y a dans l'angle trièdre six choses à considérer, savoir, trois angles plans et trois angles dièdres, *ibid.*
222. *Théorème.* La somme de deux quelconques des angles plans qui composent un angle trièdre, est toujours plus grande que le troisième, 146
223. *Théorème.* Si deux angles trièdres sont formés des mêmes angles plans, les angles dièdres compris entre les angles plans égaux seront égaux, 147
224. *Théorème.* Deux angles trièdres formés par trois angles plans égaux et semblablement disposés entre eux, sont égaux dans toutes leurs parties, 149
225. *Remarque.* Deux angles trièdres composés des mêmes angles plans assemblés différemment, ou deux angles trièdres *inverses* l'un de l'autre, ne peuvent coïncider, mais renferment le même espace, *ibid.*
Noté sur les angles trièdres inverses, 150
226. *Théorème.* La somme des angles plans qui composent un angle polyèdre convexe, c'est-à-dire dont toutes les arètes sont sail-

lantes ou extérieures, mais d'ailleurs quelconque, est toujours moindre que quatre droits, 150

Des corps terminés par des plans, 151

227. Les corps terminés par des plans se nomment *polyèdres*, On ne peut fermer de toutes parts un espace par un nombre de plans moindre que quatre, et le corps qui en résulte se nomme *tétraèdre*, Tout corps dont une des faces est un polygone quelconque, et dont toutes les autres sont des triangles ayant leur sommet au même point, se nomme *pyramide;* le point où se réunissent ces dernières, est le *sommet*, et la face opposée est la *base*, *ibid.*

228. *Théorème.* Si deux tétraèdres ont chacun un angle trièdre composé de triangles égaux et semblablement disposés, ces tétraèdres sont égaux, et ils le seront encore si deux faces de l'un sont égales à deux faces de l'autre, assemblées de la même manière, et forment entre elles le même angle dièdre que celles-ci, 152

229. Les *polyèdres semblables* sont ceux dont les faces sont en même nombre, semblables, semblablement disposées, et également inclinées les unes à l'égard des autres, *ibid.*

230. *Théorème.* Lorsque les triangles qui forment deux angles trièdres homologues de deux tétraèdres, sont semblables chacun à chacun, et semblablement disposés, ces tétraèdres sont semblables; et ils le sont encore si deux faces de l'un font entre elles le même angle que deux faces de l'autre, sont en outre semblables à celles-ci, et assemblées par des côtés homologues, 153

231. *Théorème.* Deux pyramides quelconques sont semblables lorsque leurs faces sont semblables et semblablement disposées, 154

232. 1*er Corollaire.* En coupant une pyramide par un plan parallèle à sa base, on en retranche une pyramide qui lui est semblable, *ibid*

233. 2*e Corollaire.* Les arêtes homologues des pyramides semblables sont proportionnelles entre elles et aux perpendiculaires abaissées des sommets sur les bases, 155

234. *Remarque.* On peut trouver, par ce qui précède, la hauteur d'une pyramide, quand on connaît les dimensions d'un *tronc* à bases parallèles, 156

235. *Théorème.* Les bases des pyramides semblables sont entre elles comme les quarrés de deux arêtes homologues quelconques, et comme les quarrés des perpendiculaires abaissées du sommet sur leur plan, *ibid.*

236. *Corollaire.* Les sections faites à la même distance des sommets dans deux pyramides quelconques, sont dans un rapport constant, quelles que soient d'ailleurs ces distances et les figures des bases, 157

237. Les polyèdres qui ont deux faces opposées égales et parallèles, et dont toutes les autres sont des parallélogrammes, se nomment *prismes*,

Les polygones opposés sont les *bases* du prisme,
Chaque angle polyèdre d'un prisme n'est composé que de trois angles plans,
Quand ses arêtes sont perpendiculaires sur sa base, c'est un *prisme droit*, les autres sont des *prismes obliques*, 157
238. Le prisme dont la base est un parallélogramme, se nomme *parallélépipède;* ses faces opposées sont égales et parallèles, 158
239. *Théorème.* Un polyèdre compris entre six plans parallèles deux à deux, est un parallélépipède, *ibid.*
240. *Théorème.* Si deux prismes ont chacun un angle trièdre composé de polygones égaux et semblablement disposés, ces prismes seront égaux, 159
Note sur la similitude des prismes, *ibid.*
241. *Remarques.* En joignant par des droites, le sommet d'un de leurs angles à tous les autres, et divisant toutes leurs faces en triangles, on peut toujours partager les polyèdres quelconques, en pyramides triangulaires,
Deux corps composés d'un même nombre de pyramides triangulaires égales et semblablement disposées, sont égaux,
Un polyèdre ayant un nombre N d'angles, est déterminé par $3N-6$ données, prises parmi les distances des sommets de ces angles, *ibid.*
Note sur le nombre des angles, des faces et des arêtes d'un polyèdre, 160
242. *Théorème.* Deux polyèdres qui sont composés d'un même nombre de pyramides semblables et semblablement disposées, sont semblables, *ibid.*
243. *Théorème.* Lorsque deux polyèdres sont semblables, ils peuvent être partagés en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés, 162
244. *Théorème.* Les arêtes homologues des polyèdres semblables sont proportionnelles, ainsi que les diagonales des faces homologues et les diagonales intérieures aux polyèdres, 164
245. *Remarque* sur la mesure de l'aire des polyèdres, *ibid.*
246. *Théorème.* Les aires des polyèdres semblables sont entre elles comme les quarrés des arêtes homologues, 165

De la mesure des volumes, 165

247. L'espace renfermé par la surface d'un polyèdre, ou occupé par ce corps, est généralement désigné sous le nom de *volume*, ou de *capacité*, lorsqu'il s'agit d'un corps creux, *ibid.*
Note sur les motifs d'exclure le mot *solidité*, 166
248. *Théorème.* Deux parallélépipèdes construits sur la même base, et terminés supérieurement par le même plan parallèle à leur base, sont équivalens en volume, *ibid.*
249. *Corollaire.* Un parallélépipède quelconque peut être transformé en un parallélépipède rectangle, ayant une base équivalente à celle du premier, et même *hauteur*,
La *hauteur* d'un prisme, ou d'un parallélépipède, est la perpendi-

culaire menée entre les deux bases; pour une pyramide, c'est la perpendiculaire abaissée du sommet sur la face opposée, face qui s'appelle *base*, 167
250. *Théorème.* Si l'on forme sur la base d'un prisme triangulaire, un parallélogramme, et que l'on élève sur ce parallélogramme, pris pour base, un parallélépipède de même hauteur que le prisme triangulaire, celui-ci sera la moitié de l'autre, 168
Note où l'on démontre l'égalité des volumes des deux prismes triangulaires du n° précédent, qui, bien que construits sur les mêmes parties, ne peuvent pas coïncider, 169
251. *Corollaire.* Deux prismes triangulaires de même base et de même hauteur sont équivalens, *ibid.*
252. *Théorème.* Si on coupe un tétraèdre par des plans parallèles à sa base et équidistans, on pourra former, à chaque tranche, un prisme *extérieur* et un prisme *intérieur*, de manière que la somme des premiers diffère aussi peu qu'on voudra de celle des seconds, et par conséquent aussi du tétraèdre, *ibid.*
253. *Théorème.* Deux tétraèdres de même base et de même hauteur sont équivalens, 171
Note. Autre démonstration de la proposition précédente, *ibid.*
254. *Théorème.* Un tétraèdre est équivalent au tiers du prisme triangulaire de même base et de même hauteur, 172
255. *Théorème.* Les parallélépipèdes rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, *ibid.*
256. *Théorème.* Deux parallélépipèdes rectangles sont entre eux comme les produits des arêtes qui forment un même angle trièdre, 174
257. *Remarque.* La mesure du volume d'un parallélépipède rectangle est le produit de ses trois arêtes contiguës, en prenant pour terme de comparaison le parallélépipède dont les trois arêtes contiguës sont égales à la ligne choisie pour unité, 175
258. 1*er Corollaire.* Lorsque les arêtes sont égales entre elles, le parallélépipède qui prend le nom de *cube*, a pour mesure la troisième puissance de son arête, *ibid.*
259. 2*e Corollaire.* Le volume d'un parallélépipède quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur, 176
260. 3*e Corollaire.* Le volume d'un prisme quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur,
Deux prismes quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, *ibid.*
261. 4*e Corollaire.* Le volume d'un tétraèdre a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur, 177
262. 5*e Corollaire.* Le volume d'une pyramide quelconque a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur,
Deux pyramides quelconques sont entre elles comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, *ibid*
263. *Remarques.* Le volume d'un tronc de pyramide s'obtient en

prenant la différence entre celui de la pyramide entière et celui de la pyramide retranchée,
Le volume d'un polyèdre quelconque peut s'évaluer en décomposant ce polyèdre en pyramides, ou en le ramenant à des *prismes triangulaires tronqués*, 178
264. *Théorème.* Un prisme triangulaire tronqué est équivalent à trois tétraèdres de même base, ayant leurs sommets respectifs placés à chacun des angles du triangle opposé à cette base, *ibid.*
265. *Corollaire.* Le volume d'un prisme triangulaire tronqué a pour mesure le produit de sa base par le tiers de la somme des trois perpendiculaires abaissées sur cette base, de chacun des angles de la base supérieure, 179
266. *Théorème.* Deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs arêtes homologues, 180
Note. Les volumes de deux tétraèdres qui ont un angle trièdre commun, sont entre eux comme les produits des arêtes qui, dans chacun, comprennent cet angle, *ibid.*

SECTION II.

Des corps ronds, 182
267. Les corps ronds sont ceux qu'on produit en faisant tourner une figure plane autour d'une ligne droite,
On ne considère, dans les Elémens de Géométrie, que le cône droit, le cylindre droit et la sphère,
Le *cône droit* s'engendre en faisant tourner un triangle rectangle autour de l'un des côtés de l'angle droit, l'hypoténuse décrit la surface conique droite,
Le côté autour duquel tourne le triangle générateur se nomme l'*axe*,
La base du cône est un cercle,
Toute section faite par un plan parallèle à cette base est également un cercle,
Les circonférences de ces cercles sont proportionnelles à leurs distances au sommet,
Leurs aires sont entre elles comme les quarrés de ces distances, *ibid.*
Note sur le cône oblique, *ibid.*
268. *Remarque.* Lorsqu'on a les dimensions d'un tronc de cône droit, à bases parallèles, on peut, par ce qui précède, trouver la hauteur du cône entier, 183
269. *Théorème.* On peut toujours trouver deux *pyramides régulières*, l'une inscrite, l'autre circonscrite à un cône droit, telles, que la différence de leurs aires soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur,
L'aire d'une *pyramide régulière*, lorsqu'on n'y comprend point sa base, a pour mesure la moitié du produit du contour de cette

base par la perpendiculaire abaissée du sommet sur l'un de ses côtés, 183
270. *Corollaire.* L'aire du cône est toujours moindre que celle de la pyramide circonscrite, et plus grande que celle de la pyramide inscrite; mais chacune de ces dernières peut approcher de la première aussi près qu'on voudra, 185
271. *Théorème.* L'aire d'un cône droit a pour mesure la moitié du produit de la circonférence du cercle qui lui sert de base par son côté, 186
Note où l'on indique un autre tour de démonstration pour la proposition ci-dessus et pour ses analogues, *ibid.*
272. *Théorème.* L'aire d'un tronc de cône droit, à bases parallèles, ou du *cône tronqué*, a pour mesure la moitié du produit de la somme des circonférences de ses deux bases par son côté, ou le produit de ce côté par la circonférence de la section faite à égale distance des bases,
N. B. En substituant le sommet à la base supérieure, ces mesures conviennent au cône entier, *ibid.*
273. *Théorème.* On peut toujours trouver deux pyramides, l'une inscrite, l'autre circonscrite, à un cône droit, telles, que la différence de leurs volumes soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur, 188
274. *Corollaire.* On peut toujours assigner une pyramide inscrite et une pyramide circonscrite qui diffèrent aussi peu qu'on voudra du cône, l'une étant plus petite, et l'autre plus grande, 189
275. *Théorème.* Le volume d'un cône a pour mesure le tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur, *ibid.*
Note sur le cône oblique, *ibid.*
276. *Problème.* Trouver le volume d'un tronc de cône droit à bases parallèles, *ibid.*
277. Un rectangle qui tourne autour de l'un de ses côtés, engendre le corps appelé *cylindre droit*,
Les bases d'un cylindre droit sont des cercles égaux et parallèles, ainsi que toutes les sections parallèles à ces bases,
Le côté autour duquel tourne le rectangle générateur, se nomme l'*axe*, 190
Note sur le cylindre oblique, *ibid.*
278. *Théorème.* On peut inscrire et circonscrire à un cylindre droit deux prismes droits, tels, que la différence de leurs aires soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur, 191
279. *Corollaire.* On peut toujours trouver un prisme, soit inscrit, soit circonscrit, dont l'aire diffère aussi peu qu'on voudra de l'aire du cylindre droit, plus grande que la première, et moindre que la seconde, 192
280. *Théorème.* L'aire de la surface convexe du cylindre droit a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par sa hauteur, *ibid.*

281. *Théorème.* On peut toujours former deux prismes, l'un inscrit, l'autre circonscrit au cylindre, tels, que leurs volumes diffèrent aussi peu qu'on voudra, 192
282. *Corollaire.* On peut construire un prisme inscrit et un prisme circonscrit, tels, que leurs volumes diffèrent aussi peu qu'on voudra de celui du cylindre, qui sera toujours plus grand que le premier, et moindre que le second, 193
283. *Théorème.* Le volume d'un cylindre droit a pour mesure le produit de l'aire de sa base par sa hauteur, *ibid.*
Note sur le cylindre oblique, *ibid.*
284. Un demi-cercle, en tournant autour de son diamètre, engendre la *sphère*, et la demi-circonférence qui l'enveloppe décrit la surface sphérique,
Le diamètre autour duquel tourne le demi-cercle générateur, est l'*axe*, et ses extrémités sont les *pôles*,
La surface sphérique a tous ses points également éloignés du centre du cercle générateur, *ibid.*
285. *Théorème.* La section de la sphère par un plan quelconque, est toujours un cercle, 194
286. *Remarque.* Les cercles dont le plan passe par le centre de la sphère, sont de *grands cercles*, les autres sont de *petits cercles*,
Tous les grands cercles sont égaux entre eux, *ibid.*
287. *Corollaire.* Deux grands cercles se coupent toujours en deux parties égales, 195
288. Trois cercles se coupant deux à deux sur la surface de la sphère, forment un *triangle sphérique*; on ne considère dans les Elémens que celui qui est formé par trois arcs de grands cercles, *ibid.*
289. *Théorème.* La somme de deux côtés quelconques d'un triangle sphérique est toujours plus grande que le troisième, *ibid.*
290. 1er *Corollaire.* Le plus court chemin pour aller d'un point à un autre sur la surface sphérique, est l'arc du grand cercle déterminé par le plan qui passe par ces deux points et par le centre de la sphère, *ibid.*
291. 2e *Corollaire.* La somme des trois côtés d'un triangle sphérique est moindre que la circonférence d'un grand cercle, 196
292. *Théorème.* Si, par le centre d'un cercle quelconque tracé sur la sphère, on élève une perpendiculaire, elle passera par le centre de la sphère, et la coupera en deux points, dont chacun sera également éloigné de tous ceux de la circonférence du cercle proposé, 197
293. *Corollaire.* Chacun de ces points, que l'on nomme *pôles*, peut servir à décrire ce cercle.
La droite qui les joint est l'*axe* du même cercle, *ibid.*
294. *Théorème.* Le plan mené par un point de la surface de la sphère, perpendiculairement au rayon qui passe par ce point, est tangent à la sphère; et réciproquement le plan tangent à un point quelconque de la surface sphérique, est perpendiculaire à l'extrémité du rayon, 198

295. *Théorème.* Deux portions correspondantes de polygones réguliers, l'une inscrite et l'autre circonscrite au cercle générateur de la sphère, décrivent, en tournant autour du diamètre de ce cercle, deux corps dont les aires peuvent différer de moins qu'aucune grandeur donnée,

L'aire de chacun de ces corps a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence du cercle inscrit au polygone qui l'engendre, 198

296. *Corollaire.* L'aire du corps inscrit est moindre que celle de la portion correspondante de la sphère, et l'aire du corps circonscrit est plus grande; mais on peut toujours trouver deux de ces corps dont l'aire diffère aussi peu qu'on voudra de celle de la portion de sphère, 201

297. *Théorème.* L'aire de la *calotte sphérique* est égale à sa hauteur multipliée par la circonférence d'un grand cercle, *ibid.*

298. 1*er Corollaire.* L'aire de la sphère entière est égale à son diamètre multiplié par la circonférence d'un grand cercle, et celle d'une zone quelconque est égale au produit de la hauteur de cette zone par la circonférence d'un grand cercle, 202

299. 2*e Corollaire.* L'aire de la surface sphérique est quadruple de celle d'un de ses grands cercles, *ibid.*

300. *Théorème.* L'aire du *fuseau sphérique* est à celle de la sphère, comme l'angle plan qui mesure l'angle dièdre que forment les plans qui déterminent ce fuseau, est à quatre droits, 203

301. *Théorème.* L'aire d'un triangle sphérique est à celle de la sphère entière, comme la différence entre la somme des trois angles dièdres formés par les plans des cercles qui composent ce triangle et deux angles droits, est à huit angles droits, 204

Note où l'on démontre, pour la proposition précédente, que deux triangles sphériques qui ont leurs côtés égaux, chacun à chacun, mais assemblés dans un ordre inverse, sont équivalens, *ibid.*

302. *Théorème.* La différence entre les volumes des corps engendrés par deux portions correspondantes de polygones réguliers, l'une inscrite et l'autre circonscrite à un arc de cercle, pendant la révolution de cet arc autour de son axe, et fermés par la surface conique décrite dans le même circonstance par le rayon qui termine les deux portions de polygone, peut devenir aussi petite qu'on voudra,

Le volume de chacun de ces corps a pour mesure la somme des aires décrites par les côtés du polygone générateur, multipliée par le tiers du rayon du cercle inscrit à ce polygone, 206

303. *Corollaire.* Le *secteur sphérique* engendré par la révolution du secteur circulaire, est moindre que le corps circonscrit, et plus grand que l'inscrit; mais sa différence avec l'un ou avec l'autre de ces corps, peut être rendue aussi petite qu'on voudra, 209

304. *Théorème.* Le volume d'un secteur sphérique est égal à l'aire

de la calotte sur laquelle il s'appuie, multipliée par le tiers du rayon, 209

305. 1er *Corollaire.* Le volume de la sphère est égal à son aire multipliée par le tiers du rayon, ou à l'aire de son grand cercle multipliée par les deux tiers du diamètre, *ibid.*

306. 2e *Corollaire.* La mesure du secteur sphérique, lorsqu'il surpasse la demi-sphère, est encore la même que dans le numéro 304, 210

307. 3e *Corollaire.* Le volume de la portion de sphère engendrée par le demi-segment circulaire, et qu'on nomme *segment sphérique*, s'obtiendra en retranchant du volume du secteur sphérique celui du cône correspondant,

Le volume de la zone s'obtiendra en le considérant comme la différence des deux segmens formés dans la sphère, par les plans qui terminent cette zone, *ibid.*

De la comparaison des corps ronds, 211

308. Les corps ronds semblables sont ceux qui sont engendrés par des figures semblables,

Dans les cônes semblables, les côtés, les hauteurs, les rayons des bases, leurs circonférences, sont proportionnels, et les aires des bases sont comme les quarrés de leurs lignes homologues; la même chose a lieu à l'égard des cylindres semblables,

Les sphères sont des corps semblables, *ibid.*

309. *Théorème.* Les aires des cônes semblables sont comme les quarrés des côtés de ces cônes, et leurs volumes comme les cubes de ces mêmes côtés, *ibid.*

310. *Théorème.* Les aires des cylindres semblables sont comme les quarrés des côtés de ces cylindres, et leurs volumes comme les cubes de ces mêmes côtés, 212

311. *Théorème.* Les aires de deux sphères sont comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres, et leurs volumes comme les cubes de ces mêmes lignes, 213

312. *Remarque.* L'aire convexe du cylindre circonscrit à la sphère est égale à celle de cette sphère, et le volume de ce dernier corps n'est que les deux tiers de celui du [illegible]nier, *ibid.*

313. *Conclusion*, dans laquelle on montre q[illegible]ne peut y avoir plus de cinq espèces de polyèdres réguliers, et que les faces de ces polyèdres ne peuvent être que des triangles équilatéraux, des quarrés ou des pentagones, 214

Fin de la Table.

SUPPLÉMENT

Au Traité Élémentaire d'Arithmétique, *nécessaire pour passer immédiatement de ce Traité aux* Élémens de Géométrie.

I. POUR abréger le discours, on exprime par des signes particuliers les mots qui reviennent le plus fréquemment; et quand on s'occupe d'un nombre ou d'une grandeur quelconque, sans considérer sa valeur particulière, mais seulement pour indiquer ses relations avec d'autres grandeurs, ou les opérations auxquelles elle doit être soumise, on la désigne par une lettre de l'alphabet, qui devient alors le nom abrégé de cette grandeur.

$+$ *signifie* plus *ou* ajouté avec.

L'expression $A+B$ indique la somme qui résulte de la grandeur que représente la lettre A ajoutée avec celle que représente B, ou *A plus B.*

$-$ *signifie* moins.

$A-B$ indique ce qui reste quand on ôte de la grandeur que représente A celle que représente B, ou *A moins B.*

$\times$ *signifie* multiplié par.

$A \times B$ indique le produit de la grandeur que représente A multipliée par celle que représente B, ou *A multiplié par B.*

$\frac{A}{B}$ indique le quotient de la grandeur que représente A divisée par celle que représente B, ou *A divisé par B.*

$A = B$ *signifie* que la grandeur que représente A est égale à celle que représente B, ou *A égale B.*

$A > B$ *signifie* que la grandeur que représente A surpasse celle que représente B, ou *A plus grand que B.*

$A < B$ *signifie A plus petit que B.*

$2A$, $3A$, etc. indiquent le *double*, le *triple*, etc. de la grandeur que représente A.

II. Lorsqu'on multiplie un nombre par lui-même, on forme sa *seconde puissance* ou son *quarré* : 5×5, ou 25, est la seconde puissance de 5, ou le quarré de 5.

La seconde puissance est donc le produit de deux facteurs égaux ; chacun de ces facteurs est la *racine quarrée* du produit : 5 est la racine quarrée de 25.

Si l'on multiplie la seconde puissance par sa racine, on a la *troisième puissance* ou le *cube* : 5×25, ou 125, est la troisième puissance de 5.

La troisième puissance est un produit formé par la multiplication de trois facteurs égaux ; chacun de ces facteurs est la *racine cubique* de ce produit : 125 est le produit de 5 multiplié deux fois par lui-même, ou $5 \times 5 \times 5$; et 5 est la racine cubique de 125.

En général, A^2, étant l'abréviation de $A \times A$, indique la seconde puissance ou le quarré de A.

$\sqrt{A}$ indique la racine quarrée de A ou le nombre qui, multiplié par lui-même, produirait le nombre que représente A.

A^3, étant l'abréviation de $A \times A \times A$, indique la troisième puissance ou le cube de A.

$\sqrt[3]{A}$ indique la racine cubique de A ou le nombre qui, multiplié deux fois par lui-même, produirait le nombre A.

Tous les nombres ne sont pas des quarrés ou des cubes parfaits, c'est-à-dire, n'ont pas des racines quarrées ou cubiques qu'on puisse exprimer exactement : 19, par exemple, se trouvant entre 16, qui est le quarré de 4, et 25, qui est le quarré de 5, a pour racine un nombre compris entre 4 et 5, mais qu'on ne saurait assigner exactement, même avec le secours des fractions : c'est un *incommensurable*.

De même, 89, se trouvant entre 64, qui est le cube de 4, et 125, qui est celui de 5, a pour racine cubique un nombre compris entre 4 et 5, mais qu'on ne saurait non plus assigner exactement. On trouvera dans les *Élémens d'Algèbre*, des méthodes pour approcher aussi près qu'on voudra des racines quarrées et des racines cubiques des nombres qui ne sont pas des quarrés ou des cubes parfaits.

(Les trois articles suivans doivent être étudiés avant le n° 58.)

III. Lorsque deux proportions ont un rapport commun, il est visible qu'on peut mettre en proportion les deux autres rapports, parce qu'ils sont égaux à celui qui est commun.

Si l'on a

$$A : B :: C : D,$$
$$E : F :: C : D,$$

il en résultera nécessairement

$$A : B :: E : F.$$

Lorsque deux proportions ont les mêmes antécédens, on peut mettre les conséquens en proportion ; car si on a

$$A : B :: C : D,$$
$$A : E :: C : F,$$

en changeant les moyens de place, ces proportions deviendront

$$A : C :: B : D,$$
$$A : C :: E : F,$$

et on en conclura

$$B : D :: E : F,$$

ce qui revient à

$$B : E :: D : F.$$

IV. On peut faire encore dans les proportions d'autres changemens que les transpositions de termes, qui ne troublent pas l'égalité du produit des extrêmes avec celui des moyens.

1°. Si au conséquent d'un rapport on ajoute son antécédent, et que l'on compare cette somme à l'antécédent, celui-ci y sera contenu une fois de plus qu'il ne l'était dans le premier conséquent ; le nouveau rapport sera donc égal au rapport primitif augmenté de l'unité. Si l'on fait la même opération sur les deux rapports d'une proportion, il en résultera évidemment deux nouveaux rapports égaux entre eux, et par conséquent une nouvelle proportion.

Soit, par exemple, la proportion

$$4 : 6 :: 12 : 18;$$

on aura

$$6 + 4 : 4 :: 18 + 12 : 12,$$

ou

$$10 : 4 :: 30 : 12.$$

2°. Si du conséquent d'un rapport on retranche l'antécédent, et que l'on compare la différence à l'antécédent, celui-ci y sera contenu une fois de moins que dans le premier conséquent : le nouveau rapport sera donc égal au rapport primitif diminué de l'unité. Si on fait la même opération sur les deux rapports d'une proportion, il en résultera deux nouveaux rapports égaux entre eux, et par conséquent une nouvelle proportion.

De la proportion

$$4 : 6 :: 12 : 18,$$

on déduira ainsi

$$6 - 4 : 4 :: 18 - 12 : 12,$$

ou

$$2 : 4 :: 6 : 12.$$

Pour une proportion entre des grandeurs quelconques, désignées par des lettres,

$$A : B :: C : D,$$

on aura par les changemens ci-dessus,

$$B + A : A :: D + C : C,$$
$$B - A : A :: D - C : C.$$

Si on change les moyens de place dans ces dernières, il viendra

$$B + A : D + C :: A : C,$$
$$B - A : D - C :: A : C;$$

mais par le même changement, la proportion

$$A : B :: C : D$$

donne aussi

$$A : C :: B : D,$$

et puisque les rapports $A : C$, $B : D$ sont égaux, on en conclura

$$B + A : D + C :: A : C \text{ ou } :: B : D,$$
$$B - A : D - C :: A : C \text{ ou } :: B : D,$$

résultat qui s'énonce ainsi :

Dans une proportion quelconque la somme ou la différence des deux premiers termes est à la somme ou à la différence des deux derniers, comme le premier est au troisième, ou comme le deuxième est au quatrième.

De plus, les deux rapports $A : C$ ou $B : D$ étant communs aux deux dernières proportions ci-dessus, il en résulte que les autres rapports des mêmes proportions sont égaux, c'est que par conséquent

$$B + A : D + C :: B - A : D - C,$$

ou, en changeant les moyens de place,

$$B + A : B - A :: D + C : D - C;$$

c'est-à-dire que *la somme des deux premiers termes d'une proportion est à leur différence, comme la somme des deux derniers est à leur différence.*

Par exemple :

$$6 + 4 : 6 - 4 :: 18 + 12 : 18 - 12,$$

ou

$$10 : 2 :: 30 : 6.$$

Lorsque la proportion $A : B :: C : D$

est changée en $A : C :: B : D,$

c..

A et B sont les antécédens, C et D les conséquens, et les proportions

$$B + A : D + C :: A : C \text{ ou } :: B : D,$$
$$B - A : D - C :: A : C \text{ ou } :: B : D,$$

répondent à l'énoncé suivant :

La somme ou la différence des antécédens d'une proportion est à la somme ou à la différence des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.

On en déduit: *la somme des antécédens est à leur différence, comme la somme des conséquens est à leur différence.*

Si l'on a une suite de rapports égaux

$$A : B :: C : D :: E : F,$$

en ne considérant d'abord que les deux premiers, qui forment la proportion

$$A : B :: C : D,$$

on en tire, par ce qui précède,

$$A + C : B + D :: A : B;$$

et puisque le troisième rapport $E : F$ est égal au premier $A : B$, on aura

$$A + C : B + D :: E : F.$$

Si l'on prend la somme des antécédens et celle des conséquens dans cette dernière proportion, il en résultera

$$A + C + E : B + D + F :: E : F \text{ ou } :: A : B.$$

En suivant la même marche, quel que fût le nombre des rapports égaux, on aurait en dernier lieu : *la somme d'un nombre quelconque d'antécédens est à la somme de leurs conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.*

V. Lorsqu'on a deux proportions quelconques

$$A : B :: C : D,$$
$$E : F :: G : H,$$

et qu'on les multiplie par *ordre*, c'est-à-dire terme à terme, les produits forment une proportion où l'on a

$$A \times E : B \times F :: C \times G : D \times H.$$

Cela est évident, puisque les nouveaux rapports $\frac{B \times F}{A \times E}$, $\frac{D \times H}{C \times G}$ seront respectivement les produits des rapports primitifs

$$\frac{B}{A} \text{ et } \frac{F}{E}, \quad \frac{D}{C} \text{ et } \frac{H}{G},$$

qui sont égaux.

Si l'on multiplie la proportion

$$A : B :: C : D,$$

par

$$A : B :: C : D,$$

on aura (II)

$$A^2 : B^2 :: C^2 : D^2,$$

d'où il suit que *les quarrés de quatre quantités en proportion forment une nouvelle proportion.*

En multipliant la proportion

$$A^2 : B^2 :: C^2 : D^2,$$

par

$$A : B :: C : D,$$

on aura

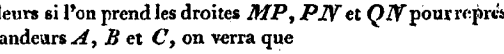
$$A^3 : B^3 :: C^3 : D^3,$$

c'est-à-dire que *les cubes de quatre quantités en proportion forment une nouvelle proportion.*

(*Les deux articles suivans se rapportent au n°* 76.)

VI. On considère souvent des grandeurs décomposées en plusieurs parties, et on a besoin de les ajouter, de les soustraire, ou de les multiplier dans cet état, c'est-à-dire de déterminer comment les résultats de ces opérations sont formés avec les parties des grandeurs proposées : voici quelques règles à ce sujet.

1°. Il est évident que si l'on veut ajouter la grandeur $B-C$ avec la grandeur A, il faut écrire $A+B-C$, puisque ce n'est ni B ni C qu'on se propose d'ajouter avec A, mais seulement l'excès de B sur C.

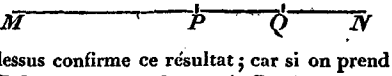


D'ailleurs si l'on prend les droites MP, PN et QN pour représenter les grandeurs A, B et C, on verra que

$$PQ = PN - QN,$$
$$MP + PQ = MP + PN - QN.$$

2°. Si de la grandeur A on voulait ôter la grandeur $B-C$, il faudrait écrire $A+C-B$, ou, ce qui est la même chose, $A-B+C$.

En effet, la différence de deux grandeurs ne change pas lorsqu'on ajoute à chacune la même grandeur ; or si l'on ajoute C à $B-C$, il viendra B ; en faisant la même addition à la grandeur A, on obtient $A+C$, et la soustraction de B donne alors $A+C-B$,



La figure ci-dessus confirme ce résultat ; car si on prend les droites MN, PN, PQ pour les grandeurs A, B, C, on a

$$QN = PN - PQ,$$
$$MN - QN = MQ = MP + PQ;$$

et puisque $MP = MN - PN$, il viendra

$$MP + PQ = MN - PN + PQ,$$

résultat qui répond à $A - B + C$.

3°. Le produit de la grandeur A par la grandeur $B + C$, est exprimé par $A \times B + A \times C$; car il doit renfermer autant de fois le nombre A qu'il y a d'unités dans la somme des nombres B et C, et doit par conséquent être composé de A pris autant de fois qu'il y a d'unités dans B, plus de A pris autant de fois qu'il y a d'unités dans C, ce qui s'écrit $A \times B + A \times C$.

4°. Le produit de A par $B - C$ est exprimé par $A \times B - A \times C$; car si on représente $B - C$ par D, on aura visiblement $B = D + C$, et par conséquent $A \times B = A \times D + A \times C$: on conclura de là que $A \times D = A \times B - A \times C$, ce qui forme la proposition avancée ci-dessus, puisque $D = B - C$.

VII. Il suit de ce qui précède, que *le quarré d'un nombre composé de deux parties, renferme le quarré de la première, deux fois le produit de la première par la seconde, et le quarré de la seconde.* Le nombre 13, par exemple, étant envisagé comme égal à 9 + 4, son quarré 169 est composé

du quarré de 9, ou	81
de 2 fois 9 × 4, ou	72
du quarré de 4, ou	16
Total.....	169

Pour prouver l'énoncé en général, il suffit d'observer que le produit de A par $B + C$ étant $A \times B + A \times C$, si l'on fait $A = B + C$, les produits partiels $A \times B$ et $A \times C$ deviendront $B \times B + B \times C$, et $B \times C + C \times C$; en les réunissant on obtiendra le résultat

$$B \times B + B \times C + B \times C + C \times C,$$

qui peut s'écrire ainsi :

$$B^2 + 2B \times C + C^2,$$

ce qui donne le quarré de $B + C$, conforme à l'énoncé ci-dessus.

On trouve d'une manière semblable que *le quarré de la différence de deux grandeurs est composé du quarré de la première, moins*

deux fois le produit de la première par la seconde, plus le quarré de la seconde. Le nombre 9 étant égal à 13—4, par exemple, son quarré 81 sera formé de 169 — 2 fois 4 × 13 + 16, ce qu'il est aisé de vérifier.

La démonstration générale de la proposition ci-dessus se forme en faisant $A = B - C$, dans le produit de A par la différence $B - C$; car ce produit étant exprimé par $A \times B - A \times C$, si l'on écrit d'abord $B - C$ au lieu de A, dans les produits $A \times B$ et $A \times C$, ils deviendront respectivement

$$B \times B - B \times C \text{ et } B \times C - C \times C,$$

et pour retrancher le second du premier, il faudra, d'après l'article VI, écrire

$$B \times B - B \times C - B \times C + C \times C,$$

ce qui revient à

$$B^2 - 2B \times C + C^2,$$

et donne le quarré de $B - C$, conformément à l'énoncé ci-dessus.

Les notions précédentes suffisent pour entendre les propositions nécessaires de la Géométrie, car on peut, [redacted]° 141, se borner à la solution graphique, et passer les numéros 150, 156, 157, qui ne servent qu'à calculer le rapport de la circonférence au diamètre, qu'on peut obtenir facilement en Trigonométrie, par les sinus et les tangentes des petits arcs.

(Les articles ci-dessous, qui concernent l'évaluation des aires et des volumes, autrement, le toisé des surfaces et des solides, *se rapportent à la fin de la première partie et à celle de la seconde.)*

VIII. Le rapprochement des expressions, ou *formules*, d'après lesquelles se calculent les aires

du parallélogramme, n° 170,
du triangle, n° 171,
du trapèze, n° 175,
du cercle, n° 187,
enfin du secteur circulaire, n° 189,

montre que la détermination de toutes ces aires ne dépend que d'un produit de deux facteurs, qu'on peut toujours regarder comme la base et la hauteur, c'est-à-dire les *deux dimensions* d'un rectangle équivalent à l'aire cherchée. Quand ces facteurs sont exprimés en mesures décimales, leur multiplication s'effectue à l'ordinaire; mais la dénomination des unités du résultat demande quelques attentions.

Soit pour exemple un rectangle de 49me, 54 de base sur 15me, 27 de hauteur; en multipliant ces deux nombres, on trouve 756, 4758.

L'unité de ce nombre est le quarré ayant un mètre de côté, qu'on nomme aussi le *mètre quarré;* les fractions décimales en sont toujours la dixième, la centième, la millième, etc. partie : la mesure ci-dessus pourrait donc s'énoncer ainsi : 756 mètres quarrés et 4758 dix-millièmes de mètre quarré; mais plus ordinairement on fait correspondre les subdivisions du mètre quarré avec celles du mètre linéaire, et alors on doit observer que

Le mètre quarré contient 100 quarrés d'un décimètre de côté, ou cent *décimètres quarrés*,

Le décimètre quarré contient cent quarrés d'un centimètre de côté, ou 100 *centimètres quarrés*, et ainsi de suite.

C'est donc les centièmes du mètre quarré qui expriment les décimètres quarrés, les dix-millièmes qui expriment les centimètres quarrés, les millionièmes qui expriment les millimètres quarrés. D'après cela, le nombre 756,4758 s'énonce

756 mètres quarrés, 47 décimètres quarrés, 58 centimètres quarrés.

On juge par là qu'il n'est pas permis de confondre le 10eme du mètre quarré avec le décimètre quarré. La première de ces subdivisions ne saurait se représenter par un quarré dont les dimensions soient des nombres entiers, puisque l'unité n'en contient que 10, et que 10 n'est pas un quarré parfait.

On peut rapporter commodément le 10eme du mètre quarré à un rectangle de 1 mètre de base sur 1 décimètre de hauteur; et il en est de même des fractions décimales qui suivent et qui désignent isolément des rectangles de 1 mètre de base sur 1 centimètre, 1 millimètre, etc. de hauteur.

Ce n'est qu'en séparant les chiffres de deux en deux, à partir de la virgule, qu'on peut énoncer le nombre en mesures quarrées.

Quand les chiffres décimaux sont en nombre impair, il faut écrire un zéro à la droite, pour que le dernier ordre de décimales soit rapporté à des mesures quarrées.

Le rectangle ayant 27$^{m\acute{e}}$ de base sur 4$^{m\acute{e}}$, 3 de hauteur, par exemple, a pour mesure en mètres quarrés, 116,1. En mettant un zéro à la droite de ce nombre, il devient 116,10 et s'énonce 116 mètres quarrés et 10 décimètres quarrés.

Ce que je viens de dire s'applique également aux divers ordres d'unités placés à la gauche de la virgule; et en observant que l'*are*, étant un quarré de 10 mètres de côté, renferme cent mètres quarrés, que l'hectare renferme cent ares, le nombre 37549 mètres quarrés, par exemple, se décompose en 3 hectares, 75 ares et 49 mètres quarrés, ou centiares.

Il est à propos de fixer le sens de plusieurs expressions que l'on confond quelquefois. Que l'on dise un mètre quarré ou un mètre en quarré, cela revient au même, puisqu'il ne peut être question, dans les deux cas, que d'un quarré ayant un mètre de côté; mais il faut soigneusement distinguer les espaces de 10 *mètres quarrés*, et de 10 *mètres en quarré*, par exemple; car l'un indique une aire équivalente à 10 quarrés d'un mètre de côté, et l'autre un seul quarré ayant 10 mètres de côté, et comprenant par conséquent 100 mètres quarrés.

L'usage des mesures décimales simplifie considérablement les calculs du toisé. Avec les anciennes mesures, le premier moyen qui se présente est de convertir chacun des facteurs, dans les subdivisions de la plus petite espèce qui soit contenue dans les deux, afin que le résultat soit exprimé en mesures quarrées ayant cette subdivision pour côté. S'il y a, par exemple, des lignes dans l'un des facteurs, il faut les réduire tous deux en lignes; le produit sera des lignes quarrées. Pour remonter à des mesures plus grandes, on observera que

Le pouce quarré vaut 12×12, ou 144 lignes quarrées;
Le pied quarré 12×12, ou 144 pouces quarrés;
La toise quarrée 6×6, ou 36 pieds quarrés;

et en divisant successivement par ces nombres, on traduira le résultat en *toises quarrées, pieds et pouces quarrés*.

On se servait peu de ce moyen, parce qu'il conduit à opérer sur de trop grands nombres; mais on faisait usage du procédé qui sert à effectuer la multiplication des nombres complexes. Que les deux dimensions à multiplier soient, par exemple,

$$49^{toises}\ 5^{pi}\ 7^{po} \quad \text{et} \quad 32^{t}\ 4^{pi}\ 5^{po};$$

si l'on choisit le premier pour multiplicande, on concevra d'abord un rectangle ayant $49^{toises}\ 5^{pi}\ 7^{po}$ de base sur 1^{toise} de hauteur, et qui sera par conséquent à celui dont on cherche la mesure, comme $1^{t} : 32^{t}\ 4^{pi}\ 5^{po}$ (166). Il sera permis en conséquence de regarder le multiplicateur $32^{t}\ 4^{pi}\ 5^{po}$ comme un nombre abstrait: or un rectangle de $49^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}$ de base sur 1^{t} de hauteur, se décompose dans les suivans :

1°. Un rectangle de 49^{toises} de base sur 1^{t} de hauteur, et contenant 49 toises quarrées;

2°. 5 rectangles ayant chacun 1^{pi} de base sur 1^{t} de hauteur: ces rectangles se nomment *toises-pieds*; il est visible qu'il en faut 6 pour former la toise quarrée;

3°. 7 rectangles de 1 pouce de base sur 1^{t} de hauteur; ces rec-

tangles se nomment *toises-pouces;* il en faut évidemment 12 pour former la toise-pied.

En continuant de même on arriverait, s'il y avait lieu, aux *toises-lignes*, *toises-points*, qui auraient entre elles et avec la toise quarrée, les mêmes rapports que les subdivisions linéaires qui leur servent de base. Les abréviations de ces mesures, en commençant par la toise quarrée, sont

t. t., *t. pi.*, *t. po.*, *t. l.*, *t. pt.*

Cela posé, l'emploi des parties aliquotes, conformément aux règles exposées à la fin du *Traité élémentaire d'Arithmétique*, donne l'opération suivante

	$40^{t.t}$	$5^{t.pi}$	$7^{t.po}$			
	32^{t}	4^{p}	5^{po}			
	98					
	147					
Pour $3^{t.pi}$	16					
$1^{t.pi}$	5	2				
$1^{t.pi}$	5	2				
Pour $6^{t.po}$	2	4				
$1^{t.po}$		2	8			
Pour 3^{pi}	24	5	9	$6^{t.l}$		
1^{pi}	8	1	11	2		
Pour 4^{po}	2	4	7	8	$8^{t.pt}$	
1^{po}		4	1	11	2	
Produit total	$1634^{t.t}$	$3^{t.pi}$	$2^{t.po}$	$3^{t.l}$	$10^{t.pt}$.	

Excepté la première partie de ce résultat, qui est exprimée en toises quarrées, les autres sont des rectangles; mais leur conversion en pieds quarrés, pouces quarrés, etc. est facile; car la toise-pied vaut $6^{pi} \times 1^{pi}$, ou 6 pieds quarrés;

la toise-pouce $\frac{1^{t.pi}}{12}$, ou $\frac{1}{2}$ pied quarré, ou 72 pouces quarrés;

la toise-ligne $\frac{1^{t.po}}{12}$, ou 6 pouces quarrés;

la toise-point $\frac{1^{t.l}}{12}$, ou $\frac{1}{2}$ pouce quarré, ou 72 lignes quarrées.

En multipliant donc respectivement par 6, $\frac{1}{2}$, 6, $\frac{1}{2}$, les toises-pieds, toises-pouces, toises-lignes et toises-points, du produit obtenu ci-dessus, on trouve 1634 toises quarrées, 19 pieds quarrés et 23 pouces quarrés.

La toise quarrée et ses parties ne servaient qu'à la mesure des petites aires; les champs s'évaluaient en *perches* et en *arpens;* ces dernières mesures ont varié suivant le temps et les lieux. On trouve,

dans les tables de l'*Arithmétique*, deux sortes d'arpens comparés avec les nouvelles mesures agraires, savoir, *l'arpent des Eaux et Forêts, et l'arpent de Paris.* L'un et l'autre étaient composés de 100 perches; la perche, qu'on aurait dû nommer *perche quarrée*, était un quarré qui, dans l'arpent des Eaux et Forêts, avait 22 pieds de côté, et seulement 18 dans celui de Paris. Le rapport des perches, le même que celui des deux arpens, est celui des quarrés des nombres 22 et 18, c'est-à-dire de 484 à 324, qui revient à peu près au rapport de 3 à 2.

La perche de Paris ayant 18 pieds, ou 3 toises, de côté, contenait 9 toises quarrées; et l'arpent du même lieu, contenant exactement 900 toises quarrées, était plus commode que l'autre; mais toutes ces mesures sont bien inférieures aux mesures décimales, dans lesquelles on les transformera facilement, au moyen des tables citées: et d'ailleurs, en convertissant en mètres et parties décimales du mètre, les dimensions de la mesure proposée, leur produit donnerait le rapport de cette mesure, au mètre quarré.

Il n'est question dans ces élémens, que des figures terminées par des lignes droites, ou par des circonférences de cercle; mais les formules citées au commencement de cet article, servent aussi dans la plupart des cas de la pratique, au toisé des aires enveloppées par des lignes courbes, parce qu'en partageant ces lignes courbes en petites portions, sensiblement droites, on ramène la figure proposée à un polygone rectiligne.

IX. *Les expressions des volumes*

du *prisme*, n° 260,
de la *pyramide*, n° 262,
du prisme triangulaire tronqué, n° 265,
du cône, n° 275,
du cylindre, n° 283,
et de la sphère, n°s 304 — 306,

étant toutes composées du produit d'une aire par une hauteur, dépendent nécessairement d'un produit de trois facteurs, puisque l'aire en contient deux; et ce produit revient à l'expression d'un parallélépipède rectangle (257) équivalent au corps proposé. C'est dans ce sens qu'on dit qu'un volume quelconque est le produit de 3 *dimensions*. Leur multiplication se fait à l'ordinaire, quand elles sont exprimées en mesures décimales; et le résultat est composé d'un nombre entier et de parties décimales d'un cube ayant pour côté l'unité linéaire.

Je prends pour exemple un parallélépipède rectangle, dont les dimensions sont $49^{mè},54$, $15^{mè},27$, et $8^{mè},5$; le produit 6430,0443 de ces nombres, fait voir que le parallélépipède proposé contient 6430 cubes de 1 mètre de côté, et 443 dix-millièmes de ce cube.

Les décimales énoncées ci-dessus ne sont rapportées qu'à l'unité principale, qui est le cube d'un mètre de côté, et qu'on nomme aussi *mètre cube* : si l'on veut les décomposer en parties qui soient les cubes des parties décimales de l'unité linéaire, il faut remarquer que

Le mètre cube contient ... 10 × 10 × 10, ou 1000 *décimèt. cubes*,
Le décimètre cube 10 × 10 × 10, ou 1000 *centimèt. cubes*,

et ainsi des autres; que par conséquent ce sont les millièmes, et les millionièmes du mètre cube, qui expriment les décimètres cubes, et les centimètres cubes, et en général, les décimales prises de 3 en 3, qui répondent à des mesures cubiques.

Le résultat 643o,0443 ne renfermant pas un nombre de chiffres décimaux qui soit multiple de 3, il faut y suppléer par des zéros, et l'écrire ainsi :

643o, 044300.

De cette manière, on l'énonce, en disant :

643o mètres cubes, 44 décimètres cubes et 3oo centimètres cubes.

Il est inutile d'entrer dans de plus grands détails sur ce sujet; car il sera beaucoup plus commode de s'en tenir à la première énonciation, pourvu qu'on ait soin de ne pas confondre le 10e, le 100e, etc. du mètre cube, avec le décimètre, le centimètre, etc. cubes. Les premiers se rapportent à des parallélépipèdes rectangles, ayant tous pour base le mètre quarré, et pour hauteur 1 décimètre, 1 centimètre, etc.

Quand, avec les anciennes mesures, on ne voulait opérer que sur des nombres entiers, on convertissait chacun des facteurs du volume cherché, dans les subdivisions de la plus petite espèce qu'il y eût dans les trois; le produit se trouvait exprimé en cubes ayant cette subdivision pour côté; en lignes cubes, par exemple, si les facteurs étaient convertis en lignes. On parvenait ensuite à des mesures plus grandes, en observant que

Le pouce cube vaut 12 × 12 × 12, ou 1728 lignes cubes;
Le pied cube..... 1728 pouces cubes;
La toise cube..... 6 × 6 × 6, ou 216 pieds cubes;

et en divisant, tant que cela était possible, par ces nombres.

Le plus ordinairement on laissait les facteurs sous leur forme de nombres complexes. En multipliant deux des facteurs entre eux, on calculait d'abord, en toises quarrées, toises-pieds, toises-pouces, etc., l'aire qui devait servir de base au volume cherché (considéré comme celui d'un parallélépipède rectangle), puis on regardait cette aire comme la base d'un parallélépipède rectangle ayant 1 toise de hauteur, et étant par conséquent au corps cherché, comme l'unité est au troisième facteur, qui alors pouvait être regardé comme un nombre abstrait. Il est visible que,

1°. 1 toise quarrée de base sur 1 toise de hauteur forme un cube d'une toise de côté, ou une *toise cube*;

2°. 1 toise-pied, c'est-à-dire un rectangle de 1 toise de long sur un pied de large, étant pris pour base d'un parallélépipède rectangle de 1 toise de hauteur, ce parallélépipède a deux arêtes contiguës de 1 toise, et peut aussi être envisagé comme ayant 1 toise quarrée de base sur 1 pied de haut; on lui donne pour cette raison le nom de *toise-toise-pied;* ce qui s'écrit *t. t. pi.*; il en faut 6 pour former la toise-cube;

3°. 1 toise-pouce sur 1 toise de hauteur, forme de même un parallélépipède de 1 toise quarrée de base sur 1 pouce de haut, qu'on nomme *toise-toise-pouce*, qui s'indique par *t. t. po.*; il en faut 12 pour former la toise-toise-pied;

4°. La même progression fournit ensuite des *toises-toises-lignes*, ou *t. t. l.*, *toises-toises-points*, ou *t. t. pt.*

Le volume du parallélépipède de 1 toise de haut, se trouve ainsi exprimé par un nombre qui se rapporte à des subdivisions assez simples; et il ne s'agit plus que de multiplier, à l'aide des parties aliquotes, ce nombre par la hauteur du parallélépipède proposé.

Voici pour exemple le parallélépipède rectangle, dont les dimensions sont

$$49^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po},\quad 32^{t}\ 4^{pi}\ 5^{po}\quad \text{et}\quad 5^{t}\ 2^{pi}\ 10^{po}.$$

Les deux premières, déjà employées dans l'article VIII (page xlij), donnent pour produit

$$1634^{t.t}\ 3^{t.pi}\ 2^{t.po}\ 3^{t.l}\ 10^{t.pt}.$$

Un parallélépipède construit sur cette base et sur une toise de hauteur, contiendrait

$$1634^{t.t.t}\ 3^{t.t.pi}\ 2^{t.t.po}\ 3^{t.t.l}\ 10^{t.t.pt};$$

multipliant ce nombre par $5^{t}\ 2^{pi}\ 10^{po}$, hauteur du parallélépipède proposé, on aura le volume de ce dernier,

	$1634^{t.t.t}$ 5^{t}	$3^{t.t.pi}$ 2^{pi}	$2^{t.t.po}$ 10^{po}	$3^{t.t.l}$	$10^{t.t.pt}$	
	8170					
Pour $2^{t.t.pi}$	1	4				
$1^{t.t.pi}$		5				
Pour $2^{t.t.po}$			10			
Pour $3^{t.t.l}$			1	3		
Pour $6^{t.t.pt}$				2	6	
$2^{t.t.pt}$					10	
$2^{t.t.pt}$					10	
Pour 2^{pi}	544	5	0	9	3	$\frac{4}{12}$
Pour 6^{po}	136	1	3	2	3	$\frac{10}{12}$
2^{po}	45	2	5	0	9	$\frac{3}{12}$
2^{po}	45	2	5	6	9	$\frac{3}{12}$
Produit total.	$8944^{t.t.t}$	$3^{t.t.pi}$	$1^{t.t.po}$	$8^{t.t.l}$	$3^{t.t.pt}$	$\frac{8}{12}$

Au lieu de $\frac{5}{12}$, on peut ajouter une unité aux toises-toises-point.

Dans la pratique, on a rarement besoin de pousser les calculs jusqu'aux dernières subdivisions, comme je l'ai fait ci-dessus, parce que leur valeur est presque nulle; et quand il ne s'agit que de déterminer le prix d'un ouvrage, la forme de ces subdivisions est la plus commode; cependant on les réduit quelquefois en mesures cubiques, et pour cela, il suffit d'observer que

la toise cube contenant 216 pieds cubes,
la toise-toise-pied en contient $\frac{216}{6}$, ou 36,
la toise-toise-pouce..... $\frac{36}{12}$, ou 3,
la toise-toise-ligne..... $\frac{3}{12}$, ou $\frac{1}{4}$, ou 432 pouces cubes,
(puisque le pied cube contient 1728 pouces cubes),
la toise-toise-point..... $\frac{432}{12}$, ou 36 pouces cubes.

En conséquence, on multiplie respectivement par les nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$, 36, les divers nombres des subdivisions indiquées ci-dessus, avec l'attention de multiplier par 432 le reste des toises-toises-lignes, si la division par 4 en laissait un, de compter le produit pour des pouces cubes, et de l'ajouter à ce que donneront les toises-toises-points. Le nombre

$$8944^{t\cdot t\cdot t}\ 3^{t\cdot t\cdot pi}\ 1^{t\cdot t\cdot po}\ 8^{t\cdot t\cdot l}\ 4^{t\cdot t\cdot pt},$$

trouvé ci-dessus, devient

8944 toises cubes, 113 pieds cubes, 144 pouces cubes.

L'usage des charpentiers était de mesurer les bois, non à la toise cube, mais à la *solive*, qu'ils établissaient de 6 pouces d'*équarrissage* sur 12 pieds de longueur, c'est-à-dire formant un parallélépipède rectangle dont la base était un quarré de 6 pouces de côté, et la hauteur 12 pieds. Cette base ayant $\frac{1}{2}$ pied de côté, contient $\frac{1}{4}$ de pied quarré; et en multipliant par la hauteur 12, on trouve 3 pieds cubes pour le volume de la solive. Ce volume, pris pour unité, était divisé en 6 parties appelées *pieds de solive*, dont chacune valait par conséquent $\frac{1}{2}$ pied cube, ou 864 pouces cubes. Le pied de solive se divisait encore en 12 parties appelées *pouces de solive*, et contenant par conséquent chacune 72 pouces cubes.

On voit que les divisions de la solive suivaient la même loi que celles de la toise cube en toises-toises-pieds, etc.; et la solive entière, étant de 3 pieds cubes, se trouve la 72e partie de la toise cube. On peut donc, en le multipliant par 72, convertir un nombre de toises cubes, toises-toises-pieds, etc. en solives et parties de solives; par ce moyen, le *toisé des bois* rentre dans les règles du toisé général à trois dimensions. Il n'était pas difficile non plus

de se former des règles particulières pour obtenir immédiatement le résultat du toisé en solives.

Mais combien l'uniformité des mesures nouvelles, qui ramène tout au mètre cube, ou *stère*, et leur subdivision décimale, qui rend toutes les opérations semblables à celles qui s'effectuent sur les nombres entiers, sont préférables à ces divers procédés, quelque ingénieux qu'ils puissent paraître. En les mettant ici sous les yeux du lecteur, en comparaison avec les calculs décimaux, j'ai eu principalement pour but de rendre plus frappant l'immense avantage de ceux-ci; avantage dont il faut espérer que sera convaincue la génération future, si son éducation est bien dirigée sur ce point; car tant que les ouvriers ne se déferont pas du pied et de la toise, qu'ils portent avec eux, qu'ils s'en serviront pour prendre leurs mesures, et qu'après avoir fait le calcul suivant ces mesures, ils auront encore, pour se conformer à la loi, à convertir les anciennes mesures en nouvelles, il est impossible qu'ils voient dans le système métrique décimal, autre chose qu'une innovation importune. Enfin, il faudrait que tous ceux qui ont des nombres à prescrire, soit comme administrateurs, soit comme ingénieurs, choisissent, autant que cela se peut, des nombres ronds, en nouvelles mesures, comme on le faisait dans les anciennes.

Les conversions d'un système dans l'autre, devenant de plus en plus rares, s'effectueraient sans peine par les tables dressées depuis long-temps pour cela; et quand on n'aurait pas ces tables sous la main, on y suppléerait en calculant, par ses dimensions exprimées en nouvelles mesures, la valeur du volume que l'on veut exprimer par ces mesures. C'est ainsi qu'en formant le cube du nombre décimal qui exprime la toise par le mètre, on aurait le rapport de la toise cube au mètre cube.

Le bois de chauffage se mesure en le rangeant dans un châssis ou *membrure*; et le tas prend la forme d'un parallélépipède rectangle qui a pour base l'aire de cette membrure, et pour hauteur la longueur des bûches. La membrure qui déterminait l'ancienne corde, avait 8 pieds de long sur 4 pieds de haut, et par conséquent 32 pieds quarrés de surface. La longueur des bûches étant de 4 pieds, la corde de bois contenait 128 pieds cubes; et par ce nombre, on en calculerait sans peine le rapport avec le mètre cube ou stère.

Quand les mesures ne sont pas des parallélépipèdes, mais des cylindres, comme l'étaient les litrons, les boisseaux, comme le sont les litres, leur volume se calcule au moyen des expressions propres à cette forme de corps.

OBSERVATION.

Dans la forme de raisonnement adoptée pour l'exposition des Elémens de Géométrie,

Un *axiome* est une vérité évidente par elle-même;

Un *théorème*, une proposition à démontrer;

Un *corollaire*, une conséquence d'une proposition déjà démontrée;

Un *problème*, une question à résoudre.

Une proposition qui ne sert que de préparation à une autre, se nomme aussi *lemme*,

Et l'on donne aux *remarques* le nom de *scholies*.

Il est à propos d'observer qu'un théorème renferme deux parties, savoir : l'*hypothèse* et la *conclusion* qui en est la conséquence. Il n'est pas toujours possible de renverser l'énoncé; c'est-à-dire qu'en prenant la conclusion pour hypothèse, on n'a pas toujours pour conclusion nécessaire l'hypothèse primitive; et cela, parce que la conclusion primitive convient quelquefois à un plus grand nombre de cas que l'hypothèse : de là vient la nécessité de démontrer les propositions inverses, lorsqu'on veut en faire usage.

ÉLÉMENS

DE

GÉOMETRIE.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR L'ÉTENDUE.

1. L'ESPACE que les corps occupent a trois dimensions, que l'on désigne par les noms de *longueur*, *largeur* et *profondeur* ou *épaisseur*.

Un corps ne saurait être privé de l'une de ces dimensions sans cesser d'exister; les limites qui le terminent, sans lesquelles il ne peut être conçu, et qui n'ont point d'épaisseur, sont des *surfaces*.

Quand un corps présente plusieurs faces, chacune a, dans le lieu où elle se joint à une autre, ses limites, qui n'ont ni épaisseur, ni largeur, et qu'on nomme *lignes*.

Enfin, ces dernières ont elles-mêmes, aux endroits où elles se rencontrent, leurs limites ou leurs extrémités, qui n'ont ni épaisseur, ni largeur, ni longueur, et qui s'appellent *points*.

L'existence de ces diverses espèces de limites ne peut être révoquée en doute, puisque ce n'est que par leur moyen que nous jugeons de la figure des corps. Nous les considérons, par la pensée, chacune en particulier, en faisant abstraction d'une ou de deux des dimensions du corps, qui d'ailleurs ne sauraient être anéanties; car,

comme nous ne pouvons que modifier les formes de la matière, nos opérations s'effectuent toujours sur des corps, et jamais sur des surfaces, des lignes ou des points : mais leur résultat s'éloigne d'autant moins de celui du raisonnement, que nous apportons plus de soin à diminuer les dimensions étrangères à celles de la limite que nous avons considérée sur le corps. Par le raisonnement, nous atteignons cette limite; par le calcul, nous pouvons en approcher indéfiniment, tandis que l'exactitude des opérations mécaniques trouve ses bornes dans l'imperfection inévitable des instrumens.

2. Parmi les lignes, celle qui s'offre la première est la ligne droite, dont on donne une idée nette dès qu'on énonce que c'est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre.

Dans cette idée se trouve aussi comprise la possibilité de prolonger la ligne droite indéfiniment au-delà de chacun des termes qu'on lui a d'abord assignés, et l'impossibilité de le faire de plusieurs manières.

Il est évident qu'il n'y a qu'une seule ligne droite ; toute ligne qui n'est pas droite ou composée de plusieurs lignes droites, est *courbe ;* et l'on sent qu'il doit y avoir un nombre infini de lignes courbes.

Parmi les différentes surfaces qui terminent les corps, on remarque d'abord le *plan* ou la surface plane, qui diffère de toute autre en ce qu'on peut y appliquer exactement, ou y tracer une ligne droite dans tous les sens ; il ne peut y avoir qu'une seule espèce de plan.

Toute surface qui n'est pas plane ou composée de plusieurs plans, est courbe ; et le nombre des surfaces courbes est infini.

J'exposerai successivement les propriétés les plus remarquables des lignes, des surfaces et des corps, en me bornant à celles qu'il est indispensablement nécessaire de connaître pour étudier avec fruit les diverses branches des Mathématiques pures et appliquées.

PREMIÈRE PARTIE.

SECTION PREMIÈRE.

Des propriétés des lignes droites et des lignes circulaires.

N. B. Pour toute cette première partie, les lignes représentées dans les figures sont situées sur un même plan.

DÉFINITIONS ET NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

3. On ne considère, dans les élémens de Géométrie, que deux espèces de lignes, savoir : la *ligne droite*, ou simplement la *droite*, qui est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre, et la *circonférence du cercle*, ou la *ligne circulaire*, dont tous les points, situés sur le même plan, sont également éloignés d'un autre point pris dans ce plan, et qu'on nomme le *centre*.

AB, *fig.* 1ère, est une droite. Il est évident (2) que rien ne s'oppose à ce qu'on prolonge indéfiniment la droite *AB* en-deçà du point *A* et au-delà du point *B*, et qu'elle sera déterminée par deux autres quelconques de ses points *C* et *D*, aussi bien que par les points *A* et *B*; c'est-à-dire que si l'on proposait de joindre par une droite les points *C* et *D*, le trait passerait sur la ligne *AB*. Fig

ABEA, *fig.* 2, est une circonférence de cercle dont le centre est en *O*. Les droites *AO*, *BO*, *CO*, qui mesurent la distance des points quelconques *A*, *B*, *C*, de Fig

cette dernière ligne, au centre O, et qui sont toutes égales, se nomment les *rayons* du cercle; une partie quelconque de sa circonférence se nomme *arc*; enfin l'on entend par le *cercle* la portion du plan terminée de toutes parts par la ligne circulaire.

Il est visible que pour trouver tous les points qui sont à une distance donnée ao du point O, il suffit de décrire de ce point, comme centre, et avec un rayon égal à ao, une circonférence de cercle.

Cela posé, je considérerai d'abord les lignes droites.

4. Mesurer la distance de deux points ou la longueur d'une droite, c'est chercher combien de fois cette droite en contient une autre, prise pour unité, ce qui se fait en portant la seconde sur la première, autant qu'il est possible; et si l'on trouve un reste, il faut tâcher d'évaluer ce reste en fraction de la seconde ou de l'unité.

En général, mesurer une ligne par une autre, c'est chercher le rapport de ces deux lignes, ou chercher s'il n'y a pas une ligne plus petite qui soit contenue un nombre exact de fois dans l'une et dans l'autre, et qui par conséquent soit la commune mesure de toutes deux. Cette recherche est donc, par rapport aux lignes, ce qu'est celle du commun diviseur à l'égard des nombres.

PROBLÈME.

5. *Deux droites étant données, trouver leur commune mesure, ou au moins le rapport approché de l'une à l'autre.*

Fig 3. *Solution.* Soient AB et CD, *fig.* 3, ces deux droites; on portera la plus petite CD sur la plus grande, autant de fois qu'elle pourra y être contenue; on trouvera qu'elle y est trois fois depuis A jusqu'en E, avec un reste EB; en sorte que l'on aura

$$AB = 3\,CD + EB.$$

On portera ensuite sur CD le reste EB, qui s'y trouvera contenu quatre fois avec un second reste FD, ce qui donnera

$$CD = 4EB + FD.$$

On portera ce second reste sur EB; et comme il sera contenu une fois de E en G, avec un troisième reste GB, on aura

$$EB = FD + GB.$$

Enfin, GB étant porté sur FD, et s'y trouvant trois fois, il viendra, pour dernier résultat,

$$FD = 3\,GB.$$

En remontant de la valeur de FD à celle de EB, de celle-ci à celle de CD, et de cette dernière à celle de AB, on trouvera successivement

$$FD = 3GB,\ EB = 4GB,\ CD = 19GB,\ AB = 61GB;$$

d'où l'on voit que le dernier reste GB est la commune mesure des droites AB et CD; et puisqu'il est 61 fois dans la première et 19 fois dans la seconde, il s'ensuit que ces droites sont entre elles dans le rapport de 61 à 19.

Rien ne doit être plus facile maintenant que d'appliquer ce procédé à tout autre exemple. La comparaison des restes successifs doit être poussée jusqu'à ce qu'on en trouve un qui soit contenu un nombre exact de fois dans celui qui le précède, ou qui soit tel, que le reste qu'il pourrait laisser dans cette opération échappe aux sens par sa petitesse. C'est ainsi qu'on parviendra toujours à un résultat au moins approché.

6. Il est évident qu'une droite n'en peut rencontrer une autre qu'en un seul point (3).

7. L'espace indéfini BAC, *fig.* 4, compris entre deux droites qui se coupent en un point A, et que l'on peut Fig. 4

concevoir prolongées autant qu'on le voudra, se nomme *angle*. Quoique cet espace ne soit pas fermé du côté BC; il est néanmoins bien distingué du reste du plan, par les limites AB et AC. Deux angles peuvent différer entre eux à cet égard; la droite AD, par exemple, fait évidemment, avec AB, un angle plus grand que celui que font entre elles les droites AB et AC.

On désigne ordinairement un angle par trois lettres, en mettant au milieu celle qui occupe le point où les deux lignes se coupent, point qu'on nomme *sommet* de l'angle. L'angle formé par les droites AB et AC, est l'angle BAC. Quand il n'y a qu'un seul angle dans un point, comme en a, par exemple, on peut ne mettre que la lettre du sommet, et dire l'angle a.

8. Deux angles sont égaux lorsqu'étant posés l'un sur l'autre, ils se recouvrent parfaitement. L'angle bac sera égal à l'angle BAC, si, la droite ab étant posée sur AB de manière que le point a soit sur le point A, l'autre droite ac tombe sur AC. Il n'est pas nécessaire, pour que l'égalité ait lieu, que les longueurs des lignes AB et ab, AC et ac, soient respectivement égales; car on sent parfaitement que si, dans les portions Ab' et Ac' de leurs longueurs, les droites AB et AC se confondent avec les droites ab et ac, il en sera de même dans tout le reste lorsqu'on prolongera celles-ci d'une quantité suffisante (2).

9. La position respective de deux droites dépend de l'angle qu'elles font entre elles. Parmi toutes les situations qu'une droite peut avoir à l'égard d'une autre qu'elle rencontre, la plus remarquable est la situation *perpendiculaire*. C'est par ce mot que l'on désigne le cas où une droite AC, *fig.* 5, tombant sur une autre AB, fait, avec cette dernière, prolongée en-deçà du point A en AD, deux angles BAC et DAC égaux entre eux : c'est-à-dire qu'alors si on plie la figure le long de la ligne AC, Fig. 5.

la portion AB de la droite BD doit se coucher sur l'autre portion AD.

Il est évident que, dans ce cas, la droite AC ne penche ni vers D ni vers B.

Les angles BAC et CAD sont nommés *angles droits*.

Tout angle moindre qu'un droit se nomme *angle aigu*. L'angle BAE est un angle aigu.

Tout angle plus grand qu'un droit se nomme *angle obtus*. L'angle BAF est un angle obtus.

Il est visible qu'un angle droit doit en couvrir un autre; que l'angle droit $A'B'D'$, *fig.* 6, par exemple, étant placé sur l'angle droit ABD, doit le couvrir exactement. En effet, si l'on prend $AB=A'B'$, et qu'on porte ensuite la figure $A'C'B'$ sur ACD, en faisant coïncider les points A' et B' avec les points A et B, les droites AC et $A'C'$ se couvriront parfaitement, puisqu'on n'en peut mener qu'une seule entre deux points donnés; et si la ligne $B'D'$ ne tombait pas alors sur BD, mais prenait une position Bd, les angles $A'B'D'$, $D'B'C'$, représentés par ABd, dBC, ne seraient pas égaux, et ne seraient par conséquent pas droits. Fig. 6.

10. On voit, à l'inspection seule de la figure 5, que la somme de tous les angles BAE, EAC, CAF, FAD, qu'on peut faire du même côté d'une droite et autour d'un de ses points pris pour sommet, équivaut toujours à deux droits, en quelque nombre que soient ces angles. Fig. 5.

11. Lorsqu'une droite AE tombe sur une autre droite prolongée de chaque côté du point de rencontre, elle fait, avec cette autre, deux angles EAB et EAD, qui, réunis ensemble, valent deux droits.

Deux droites BD et EF, *fig.* 7, qui se coupent, étant prolongées au-delà de leur point de rencontre X, forment autour de ce point quatre angles qui sont opposés par le sommet deux à deux, savoir: EAB à FAD, EAD à FAB.

THÉORÈME.

12. *Les angles opposés par le sommet, que forment deux droites en se coupant, sont égaux.*

Démonstration. En effet, il résulte, du numéro précédent, que la somme des angles *BAE* et *DAE*, placés du même côté de la droite *DB*, est égale à deux droits, et que celle des angles *DAE* et *DAF*, placés du même côté de la droite *EF*, est aussi égale à deux droits; ainsi les angles *BAE* et *DAE* réunis équivalent aux angles *DAE* et *DAF* réunis. Retranchant de part et d'autre l'angle commun *DAE*, il restera l'angle *BAE*, égal à l'angle *DAF*, qui lui est opposé par le sommet.

On démontrerait de même que l'angle *DAE* est égal à *BAF*.

13. *Corollaire.* Il suit de la proposition précédente, que si l'on continue au-dessous de *AB*, *fig.* 8, la droite *AC*, qui fait avec *DB* deux angles droits, *CAB* et *CAD*, son prolongement *AE* fera encore, de l'autre côté de *AB*, deux angles droits, *BAE* et *DAE*, puisque ces angles, étant opposés par le sommet aux angles *CAD* et *CAB*, qui sont supposés droits, seront eux-mêmes droits (9). Fig. 8.

Il résulte encore de là que *CE* étant perpendiculaire sur *DB*, *DB* l'est aussi sur *CE*.

Si maintenant on mène par le point *A* tant de droites *FG*, *HI*, etc., qu'on voudra, il est visible que la somme de tous les angles *BAF*, *FAC*, *CAH*, *HAD*, *DAG*, *GAE*, *EAI*, *IAB*, que ces droites feront entre elles, ne composera jamais que quatre angles droits.

14. On ne peut enfermer un espace par un nombre de droites moindre que trois. Cet espace se nomme *triangle*. Les lignes qui le terminent se coupent deux à deux, et forment trois angles : *ABC*, *fig.* 9, est un triangle dont les côtés sont *AB*, *AC*, *BC*, et les trois angles sont *A*, *B*, *C*. Fig. 9.

Les premières propriétés du triangle servent de base à tout ce qui regarde la situation respective des droites: il faut donc les faire connaître avant d'aller plus loin.

15. *Remarques.* Puisque la ligne droite AB est le plus court chemin pour aller du point A au point B, il s'ensuit que la somme des deux autres côtés AC et BC du triangle ABC, surpasse AB; et l'on verra de même que la somme de deux côtés quelconques d'un triangle surpasse toujours le troisième.

Mais si l'on prend dans l'intérieur d'un triangle ABC, un point quelconque E, et qu'on tire les droites AE et EB, la somme de ces droites sera moindre que celle des droites AC et BC qui les enveloppent. En effet, si l'on tire par le point E une droite GF qui coupe en même temps les deux droites AC et BC, on aura

$$GF < GC + CF;$$

d'où il suit que le contour $AGFB$ sera moindre que la somme des droites AC et CB. Par la même raison,

$$AE < AG + GE, \quad EB < EF + FB;$$

donc $AE + EB < AG + GE + EF + FB$,

ou plus petit que le contour $AGFB$, et par conséquent à plus forte raison plus petit que la somme des droites AC et BC.

On distingue six choses dans un triangle; savoir, trois angles et trois côtés. Il y a entre ces six choses des relations nécessaires qui sont contenues dans les propositions suivantes.

THÉORÈME.

16. *Lorsque deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun, ils sont égaux dans toutes leurs parties.*

L'angle C du triangle ABC, *fig.* 10, est égal à l'angle Fig. 10.
du triangle $A'B'C'$, et que les côtés AC et BC, qui
forment le premier de ces angles, soient respecti-

vement égaux aux côtés $A'C'$ et $B'C'$, qui comprennent le second, le triangle ABC sera égal au triangle $A'B'C'$ dans toutes ses autres parties; c'est-à-dire que l'angle A sera égal à l'angle A', l'angle B à l'angle B', et le côté AB au côté $A'B'$.

Démonstration. Si l'on porte le triangle $A'C'B'$ sur le triangle ACB, de manière que le côté $A'C'$ tombe sur AC, en mettant le point C' sur le point C, le point A' se trouvera sur le point A, puisque $A'C' = AC$; de plus, les angles ACB et $A'C'B'$, étant égaux par l'hypothèse, se couvriront exactement, et le côté $C'B'$ tombera par conséquent sur le côté CB : enfin le point B' tombera sur le point B, puisque $C'B' = CB$. La droite $A'B'$, ayant ses deux extrémités sur celles de la droite AB, se confondra avec elle; le triangle $A'C'B'$ couvrira donc exactement le triangle ACB, et lui sera parfaitement égal.

Il est important de remarquer que les côtés égaux, ou ceux qui se confondent lorsque les deux figures sont posées l'une sur l'autre, se trouvent opposés à des angles égaux dans chacun des triangles; ainsi, $A'B'$, qui se confond avec AB, est opposé à l'angle C' égal à l'angle C. Il en est de même dans les propositions suivantes.

17. *Corollaire.* Un triangle est entièrement déterminé par l'un de ses angles et les deux côtés qui le comprennent, puisque, quand deux triangles sont égaux dans ces parties, ils le sont dans toutes les autres. On peut encore se convaincre de cette vérité, en observant que lorsque l'angle C est donné, la situation respective des côtés AC et CB l'est aussi; et si l'on a de plus leur longueur, qui fixe les points A et B, on ne peut joindre ces points que par la seule droite AB, et l'on n'obtient ainsi que le seul triangle ABC.

THÉORÈME.

18. *Lorsque deux triangles ont, chacun à chacun, un côté égal adjacent à deux angles égaux, ces triangles sont égaux dans toutes leurs parties.*

Si le côté AB du triangle ABC est égal au côté $A'B'$ du triangle $A'B'C'$, et que les angles CAB et CBA du premier triangle soient respectivement égaux aux angles $C'A'B'$ et $C'B'A'$ du second, ces deux triangles seront égaux en tout.

Démonstration. Pour reconnaître la vérité de cette proposition, il faut concevoir que le triangle $A'B'C'$ soit posé sur le triangle ABC, de manière que le côté $A'B'$ soit placé sur son égal AB, savoir, le point A' sur le point A, et le point B' sur le point B. Il suit, de l'égalité des angles CAB et $C'A'B'$, que le côté $A'C'$ doit tomber dans la direction du côté AC; de même les angles CBA et $C'B'A'$ étant égaux, le côté $C'B'$ tombera dans la direction de CB, et le point C', commun aux deux côtés $C'A'$ et $C'B'$, se trouvera par conséquent sur le point C, commun aux deux côtés CA et CB : les deux triangles se couvriront parfaitement, et seront donc égaux dans toutes leurs parties.

THÉORÈME.

19. *Si les côtés* A'B' *et* B'C' *du triangle* A'B'C', fig. 11, *sont respectivement égaux aux côtés* AB *et* BC *du triangle* ABC, *et que l'angle* B', *compris entre les deux premiers, soit moindre que l'angle* B, *compris entre les deux derniers, le côté* A'C', *opposé à l'angle* B' *dans le triangle* A'B'C', *sera moindre que le côté* AC, *opposé à l'angle* B *dans le triangle* ABC. Fig. 11.

Démonstration. En effet, lorsqu'on place le triangle $A'B'C'$ sur le triangle ABC, en posant $A'B'$ sur AB, le point C' ne peut prendre que les trois positions représentées en C'' dans les numéros 1, 2 et 3 de la figure.

Par la première, dans laquelle il tombe sur le côté AC, il est évident que AC'', qui représente $A'C'$, est moindre que AC.

Par la seconde, qui suppose le point C'' au-dedans du triangle ABC, on aurait

$$AC'' + BC'' < AC + BC, \quad (15),$$

d'où il résulterait encore

$$AC'' \text{ ou } A'C' < AC,$$

puisque BC'', qui représente $B'C'$, est égal à BC, par l'hypothèse.

Enfin, dans la troisième position, le point C'' étant extérieur au triangle ABC, on aurait

$$AC'' < OC'' + OA, \quad BC < OB + OC,$$

d'où l'on conclurait

$$AC'' + BC < OC'' + OA + OB + OC,$$

ce qui revient d'abord à

$$AC'' + BC < AC + BC'',$$

puisque $OC'' + OB = BC''$, $OA + OC = AC$; et retranchant ensuite de part et d'autre les lignes égales BC et BC'', il resterait toujours

$$AC'' \text{ ou } A'C' < AC.$$

20. *Corollaire.* Il suit de là que *deux triangles dont les trois côtés sont égaux chacun à chacun, sont égaux dans toutes leurs parties;* car si les côtés AB, AC, BC, du triangle ABC, *fig.* 10, sont respectivement égaux aux côtés $A'B'$, $A'C'$ et $B'C'$ du triangle $A'B'C'$, l'angle compris entre deux côtés quelconques du premier, sera égal à l'angle compris entre les deux côtés égaux à ceux-ci dans le second. Si, par exemple, l'un des deux angles B et B' était moindre que l'autre, l'un des côtés AC et $A'C'$ serait aussi moindre que l'autre (n° précéd.), ce qui est contre l'hypothèse : donc les triangles ABC et

Fig. 10.

$A'B'C'$ ont en même temps leurs côtés et leurs angles égaux chacun à chacun, et sont par conséquent égaux en tout (16 ou 18).

PROBLÈME.

21. *Les trois côtés d'un triangle étant donnés séparément, décrire le triangle.*

Solution. Soient M, N, P, *fig.* 12, les trois lignes données; ayant pris la première, M, pour former le côté AB, on décrira du point A, comme centre, et d'un rayon égal à la seconde, N, un cercle CDC', puis, du point B, comme centre, et d'un rayon égal à la troisième, P, un autre cercle CEC'. Leurs circonférences se couperont en deux points, C et C', situés l'un au-dessus de AB, et l'autre au-dessous. En joignant chacun de ces points avec les extrémités de la ligne AB, on formera deux triangles qui satisferont à la question, puisqu'ils auront leurs côtés respectivement égaux aux trois lignes données. Fig. 12.

22. *Remarques.* Si l'on prenait trois lignes au hasard, il pourrait arriver que les circonférences des deux cercles décrits ne se rencontrassent pas. Cette circonstance aurait lieu, 1°. dans le cas où $P+N$ serait moindre que M; en effet, il est visible, et on le prouvera d'ailleurs dans la suite, que deux cercles ne peuvent se couper qu'autant que la distance de leurs centres est moindre que la somme de leurs rayons; 2°. dans le cas où l'un des cercles embrasserait l'autre, c'est-à-dire où l'on aurait

$$AD > AB + BF, \text{ ou } N > M + P.$$

Ces deux cas sont compris dans la condition générale que la somme de deux côtés quelconques d'un triangle est toujours plus grande que le troisième, et qu'on peut s[illegible] en l'énonçant ainsi : *La somme des deux plus p[illegible]s d'un triangle est toujours plus grande que le troisième.* En effet, la condition $N + P > M$ doit suffire

lorsque N et P sont moindres que M, puisque, dans ce cas, les conditions $N+M>P$ et $P+M>N$ sont nécessairement remplies.

La solution du problème précédent, qui met en état de construire un triangle égal à un autre, en faisant usage des côtés de ce dernier, offre le moyen de faire un angle égal à un autre.

PROBLÈME.

23. *Par un point donné, pris sur une ligne donnée, faire un angle qui soit égal à un angle donné.*

13. *Solution.* Soient, *fig.* 13, CAB l'angle donné, $A'B'$ la droite sur laquelle on veut construire le nouvel angle qui doit avoir son sommet en A'; je prends sur les côtés du premier, à partir du sommet, deux distances, AB et AC, égales entre elles, et je joins, par une droite, les points C et B, où elles se terminent. Portant ensuite AB de A' en B', je n'ai plus qu'à décrire sur $A'B'$ un triangle dont les deux côtés $A'C'$ et $B'C'$ soient respectivement égaux à AC et à BC, ce qui se fait en marquant l'une des intersections C' des circonférences des cercles décrits avec les rayons AC et BC, des points A' et B' comme centres (*). Tirant $A'C'$, l'angle $C'A'B'$ sera égal à l'angle CAB, puisque les triangles CAB et $C'A'B'$ sont égaux par construction (21).

PROBLÈME.

24. *Un triangle étant donné, en construire un autre qui lui soit égal, en employant à la construction de cet autre un angle du premier et les deux côtés qui le comprennent.*

(*) Pour simplifier la figure, on n'a point tracé les circonférences entières, comme dans la figure 12, mais seulement les portions voisines de l'intersection cherchée. On en usera toujours ainsi désormais.

Solution. Si cet angle et ces côtés sont l'angle C et les droites AC et BC, du triangle ABC, *fig.* 10, on fera sur Fig. 10.
la droite $A'C'$, un angle C' égal à C; puis on prendra sur les côtés $A'C'$ et $C'B'$, à partir du point C', des distances égales à AC et à BC, qui détermineront les points A' et B'; joignant ces points par une droite, on formera le triangle $A'C'B'$ égal au triangle ACB, par le numéro 16.

PROBLÈME.

25. *Un triangle étant donné, en construire un autre qui lui soit égal, en employant à la construction de ce dernier un côté du premier et les deux angles adjacens.*

Solution. AB étant ce côté, A et B les angles adjacens, on prendra sur la droite $A'B'$ une partie $A'B'=AB$; on fera, aux extrémités de $A'B'$, les angles A' et B', respectivement égaux aux angles A et B. Ayant ainsi la direction des droites $A'C'$ et $B'C'$, en les prolongeant jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en C', on formera le triangle $A'B'C'$ égal au triangle ABC, par le numéro 18.

DES LIGNES PERPENDICULAIRES ET DES OBLIQUES.

THÉORÈME.

26. *Les lignes* AC *et* CB, fig. 14, *qui partent d'un* Fig. 14.
point quelconque C *de la droite* CD, *perpendiculaire sur* AB, *et qui s'écartent également du pied de cette perpendiculaire, c'est-à-dire du point* D *où elle rencontre la ligne* AB, *sont égales; et celles qui s'en écartent le plus sont les plus longues.*

Démonstration. Puisqu'on suppose que les distances AD et DB sont égales entre elles, que, par la nature de la perpendiculaire, les angles CDA et CDB sont égaux, et qu'enfin la ligne CD est commune aux deux triangles ACD et DCB, il s'ensuit que ces triangles ont un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à

chacun, et sont par conséquent égaux (16) : donc $BC = AC$; donc les lignes AC et BC, qui s'écartent également de la perpendiculaire CD, sont égales entre elles.

Si l'on tire par le point C la droite CE, qui s'écarte plus de CD que ne le fait CA, qu'on prolonge CD au-dessus de AB, d'une quantité $CD = CD$, et qu'on tire les droites AC' et $C'E$, on aura

$$CE + C'E > CA + C'A \quad (15).$$

Mais les triangles CAD et $C'AD$ seront égaux, en vertu du numéro 16, puisque les angles ADC et ADC' sont égaux (13), que les côtés CD et $C'D$ sont égaux par construction, et que le côté AD est commun à ces deux triangles : on aura donc

$$CA = C'A.$$

On prouvera de même que $CE = C'E$, et il en résultera

$$2CE > 2CA \text{ ou } CE > CA,$$

ce qui montre que les lignes qui s'écartent le plus de la perpendiculaire sont les plus longues.

27. 1er *Corollaire.* Les lignes CA, CB, CE se nomment *obliques*, par rapport à la ligne AB; et l'on dit en conséquence que *les obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire sont égales, et que celles qui s'en écartent le plus sont les plus longues* : d'où il résulte évidemment que si deux obliques sont égales, elles ne tombent pas du même côté de la perpendiculaire, mais qu'elles s'en écartent également de chaque côté de son pied.

28. 2e *Corollaire.* Il suit de là, 1°. que la perpendiculaire CD est la plus courte de toutes les lignes que l'on peut mener du point C sur la droite AB, et est par conséquent la mesure naturelle de la distance entre ce point et cette droite :

2°. Qu'elle a tous ses points à égale distance des points A et B ; car si l'on prend sur sa direction un point quelconque F, on aura encore

$$AF = BF ;$$

3°. Qu'un point quelconque G, pris hors de la perpendiculaire, est inégalement éloigné des points A et B ; car on a

$$BG < BF + FG ,$$

d'où

$$BG < AG ,$$

puisque $BF = AF$ et $AG = AF + FG$;

4°. Enfin, que d'un point à une droite, on ne saurait tirer trois droites égales.

PROBLÈME.

29. *Mener sur la ligne* AB, fig. 15, *une perpendiculaire qui la partage en deux parties égales.* Fig. 15.

Solution. Des points A et B, pris successivement pour centre, et avec une ouverture de compas plus grande que la moitié de AB, on décrira deux arcs de cercle, CF et CE, qui se couperont en un point C. On fera la même chose au-dessous de AB; et joignant les points C et C', la droite CC' sera la perpendiculaire demandée. En effet, les triangles CBC' et CAC' sont égaux, comme ayant tous leurs côtés égaux chacun à chacun (20), puisque $AC = BC$, $AC' = BC'$, et que CC' est commun aux deux triangles : les angles ACD et DCB sont donc égaux entre eux. Les côtés AC et CD, CB et CD qui les comprennent, dans les triangles ACD et DCB, étant respectivement égaux, ces derniers triangles sont égaux par le 16 : donc l'angle ADC est égal à l'angle BDC, et par conséquent droit ; et, de plus, à cause de $AD = BD$, le point D est le milieu de AB.

PROBLÈME.

30. *Par un point donné* D, fig. 16, *sur une droite* Fig. 16.
AB, *élever une perpendiculaire à cette droite.*

Solution. De part et d'autre du point *D* de la ligne *AB*, par lequel on veut élever la perpendiculaire, on prendra des distances égales, *AD* et *BD*; et des points *A* et *B*, avec des rayons égaux, on décrira les deux arcs de cercle *CF* et *CE*, qui se couperont au point *C*: ce point étant joint avec le point *D*, la ligne *CD* sera perpendiculaire sur *AB*. En effet, les droites *AC* et *CB* étant égales, ainsi que les parties *AD* et *DB*, les triangles *ACD* et *BCD*, ayant en outre un côté commun, *CD*, sont égaux, et par conséquent aussi les angles *ADC*, *BDC*.

PROBLÈME.

Fig. 17. 31. *Par un point donné* C, fig. 17, *pris hors d'une droite* AB, *abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

Solution. Du point *C*, comme centre, et d'un rayon pris à volonté, mais cependant plus grand que la plus courte distance du point *C* à la droite *AB*, on décrira un arc de cercle qui coupera *AB* aux points *A* et *B*; on prendra ensuite ces points pour centres, et, avec le même rayon, on décrira deux arcs de cercles qui, se coupant en *C'*, détermineront un second point de la perpendiculaire demandée *CC'*. En effet, les points *A* et *B* étant, par construction, également éloignés du point *C*, et également éloignés du point *C'*, on prouvera, comme dans le numéro 29, que les angles *ADC* et *BDC* sont droits.

THÉORÈME.

32. *D'un point* C *pris hors d'une droite* AB, *on ne peut abaisser sur cette droite qu'une seule perpendiculaire* CD.

Démonstration. Les obliques *AC* et *BC* déterminées dans le problème précédent, étant égales, doivent s'écarter également de la perpendiculaire (27), qui ne peut passer par conséquent que par le point *D*, milieu de l'intervalle *AB*; or, par les points *C* et *D*, on ne saurait mener que la seule droite *CD*, et toutes les obliques

qui seront égales deux à deux, quelle que soit d'ailleurs leur longueur, ne pourront rencontrer AB qu'à des distances égales du point D. En effet, si cela n'était pas pour les obliques CE et CF, par exemple, et que $DF > DE$, on pourrait prendre $DF' = DE$, et tirer CF', qui serait égale à CE; il se trouverait alors du même côté de la perpendiculaire CD, deux obliques égales, ce qui est impossible (27) : donc l'arc de cercle que l'on décrirait du rayon CE, rencontrerait AB en F', et par conséquent la perpendiculaire CD est unique.

Quand le point d'où l'on doit mener la perpendiculaire est pris sur la ligne proposée, le théorème est évident (9).

33. 1er *Corollaire.* Il suit de là que deux droites, DE et FG, perpendiculaires à une même droite AB, *fig.* 18, ne se rencontrent point, quelque prolongées qu'on les suppose, soit au-dessus, soit au-dessous de cette droite; car si elles se rencontraient, on pourrait, du point où elles se coupent, abaisser deux perpendiculaires sur la droite AB, ce qui est absurde. Fig. 18.

34. 2e *Corollaire.* Il suit encore de la même proposition, 1°. que deux triangles ABC, $A'B'C'$, *fig.* 19, qui ont chacun un angle droit, l'un en A, l'autre en A', sont égaux lorsque leurs côtés BC et $B'C'$, respectivement opposés aux angles droits, ainsi qu'un de leurs autres angles, B et B', par exemple, sont égaux. Fig. 19.

En effet, si l'on porte le triangle $A'B'C'$ sur le triangle ABC, en plaçant l'angle B' sur l'angle B, le côté $B'C'$ prendra exactement son correspondant BC; le côté $A'B'$ tombera dans la direction de AB; et si le côté $A'C'$, dont l'extrémité C' se trouve sur le point C, ne coïncidait pas exactement sur AC, il s'ensuivrait que l'on pourrait abaisser du point C deux perpendiculaires sur AB, confondue maintenant avec $A'B'$, quant à sa direction.

2°. L'égalité des mêmes triangles aurait encore lieu, si les côtés AC et BC étaient respectivement égaux aux côtés $A'C'$ et $B'C'$; car, en posant un de ces triangles sur l'autre, de manière que $A'C'$ fût sur AC, le côté $A'B'$ tomberait sur AB, parce que les angles BAC et $B'A'C'$ sont égaux comme droits; alors les côtés BC et $B'C'$ devenant des obliques égales, placées d'un même côté de la perpendiculaire AC, s'en écarteraient également, et tomberaient par conséquent l'un sur l'autre.

35. *Remarques.* Le premier des cas d'égalité, démontré ci-dessus par rapport aux triangles qui ont un angle droit, a lieu également par rapport aux triangles quelconques, qui sont égaux dès qu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun, et un côté égal, opposé au même angle dans l'un et dans l'autre; mais ce cas n'est pas nécessaire pour ce qui suit, et il résulte d'ailleurs d'une proposition démontrée plus bas (51).

Il n'en est pas de même du second. Si, dans les triangles ABC et $A'B'C'$, *fig.* 20, on a $A=A'$, $AC=A'C'$, $BC=B'C'$, que l'angle A soit aigu, et que AC surpasse CB, on n'en pourra pas conclure que ces triangles soient égaux; car, ayant abaissé, dans le triangle $A'B'C'$, la perpendiculaire $C'D'$, on trouvera de chaque côté de cette perpendiculaire, deux obliques, $C'B'$ et $C'B''$, égales entre elles. Les triangles $C'A'B'$ et $C'A'B''$, entre lesquels l'angle A' et le côté $A'C'$ sont communs, rempliront donc les conditions données; mais il n'y en a qu'un qui soit égal au triangle ABC, celui dans lequel l'angle B' est de même espèce que l'angle B, c'est-à-dire aigu, dans le cas de la figure. Il est d'ailleurs visible que l'angle $C'B''A'$ est obtus, puisqu'il repose sur la même droite que l'angle $C'B''B'=C'B'B''$.

THÉORÈME.

36. *Lorsque deux côtés d'un triangle sont égaux, les angles opposés à ces côtés sont égaux; et lorsqu'ils sont*

inégaux, le plus grand des deux est opposé au plus grand angle.

Démonstration. Si dans le triangle ABC, *fig.* 21, les côtés AB et BC sont égaux entre eux, la perpendiculaire abaissée du point B sur le côté AC, passant par le milieu D de ce côté (32), partagera le triangle ABC en deux autres, qui seront égaux entre eux (16), puisque l'angle droit BDA de l'un sera compris entre les côtés AD et BD, respectivement égaux aux côtés DC et BD, qui comprennent l'angle droit BDC de l'autre : l'angle A sera donc égal à l'angle C. Fig. 21.

A l'égard du triangle ACE, dans lequel les côtés AE et EC sont inégaux, il est évident que le point E, où se coupent ces deux côtés, doit tomber hors de la perpendiculaire BD, vers celle des extrémités de AC dont il est le plus près (28), et par conséquent dans l'angle FDC. Cela posé, en tirant BC, on formera le triangle ABC, dont les angles BCA et BAC seront égaux, d'après ce qui précède, puisque les côtés opposés AB et BC le seront comme des obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire ; mais l'angle BCA étant intérieur à l'angle ECA, il s'ensuit que ce dernier, opposé au côté AE, surpasse l'angle EAC, opposé au côté EC plus petit que AE.

Corollaire. Il suit de là que si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés opposés à ces angles sont égaux entre eux ; car, s'ils étaient inégaux, l'angle opposé au plus grand des deux serait plus grand que l'autre angle, ce qui est contre l'hypothèse.

Les mêmes raisonnemens prouvent aussi que quand deux angles sont inégaux, le plus grand des deux côtés est celui qui est opposé au plus grand des deux angles ; puisque l'inégalité des angles entraîne celle des côtés, et que quand deux côtés sont inégaux, l'angle opposé au plus grand côté est toujours le plus grand.

Enfin, quand les trois côtés d'un triangle sont égaux, les trois angles sont égaux, et réciproquement.

38. Les triangles dont les côtés sont inégaux, se nomment *scalènes ;* ceux qui ont deux côtés égaux, se nomment *isoscèles ;* et ceux dont les trois côtés sont égaux, se nomment *équilatéraux.*

DES LIGNES PARALLÈLES.

39. Deux droites qui, quoique situées dans le même plan, ne se rencontrent pas, sont dites *parallèles* entre elles.

Fig. 18. Deux droites, DE et FG, *fig.* 18, perpendiculaires à une même droite AB, sont donc parallèles entre elles (33).

40. *Remarque.* Tout ce qu'on va lire repose sur la vérité des propositions suivantes, dont l'évidence semble tenir immédiatement à la notion que nous avons de la Fig. 22. ligne droite. 1°. Si, par le point D, *fig.* 22, on mène une droite HH', qui fasse, avec la ligne DB, un angle HDB, moindre que le droit EDB, ou qui soit inclinée vers la partie FG de la droite GG' perpendiculaire sur AB, elle rencontrera GG' lorsqu'elles seront suffisamment prolongées l'une et l'autre au-dessus de AB; 2°. si, par le même point D, on mène la droite II', qui fasse, avec DB, l'angle IDB plus grand que le droit EDB, comme elle fera au-dessous de AB, l'angle $I'DB$ moindre que le droit $E'DB$, elle inclinera vers la partie FG' de la droite GG', et rencontrera par conséquent cette droite prolongée suffisamment au-dessous de AB.

De là résulte cette proposition, l'un des fondemens de la théorie des parallèles : *une droite qui est perpendiculaire à une autre, est rencontrée par toutes celles qui sont obliques sur cette autre ; et il n'y a par conséquent, sur un plan, que les droites perpendiculaires à une même*

lignes qui ne se rencontrent pas ou qui soient parallèles entre elles (*).

(*) C'est dans la difficulté de prouver immédiatement cette proposition, que réside l'imperfection de la théorie des parallèles. Beaucoup d'auteurs ont fait, pour en venir à bout, des efforts inutiles; et d'autres, comme *Bézout*, ont dissimulé le vice du raisonnement, ce qui me semble contraire au devoir rigoureux que s'impose tout auteur d'ouvrages élémentaires, de ne donner jamais que des notions exactes, et surtout d'en faire connaître avec soin l'origine. J'ai jugé convenable de mettre en évidence ce point délicat, en formant, à l'exemple d'Euclide, une *demande*, mais que je crois plus aisée à accorder que la sienne, parce qu'elle présente la difficulté réduite à ses moindres termes. (Voyez, dans les *Essais sur l'Enseignement*, le paragraphe des *Élémens de Géométrie*.)

Plusieurs géomètres ont essayé de prouver la vérité de cette demande, soit directement, soit en transposant la difficulté; presque tous sont tombés dans de très grandes longueurs, ou dans l'inconvénient de compliquer, par des raisonnemens obscurs, des propositions dont la preuve directe est extrêmement simple. On doit cependant excepter de ce reproche la démonstration donnée par M. *Bertrand*; elle m'a paru la plus simple et la plus ingénieuse de toutes celles que je connais; en voici le fond.

Il est d'abord évident que si l'on ajoute un angle quelconque *edh* un nombre suffisant de fois à lui-même, comme le montre la fig. 23, en hdh', $h'dh''$, $h''dh'''$, $h'''dh''''$, on parviendra toujours à former un angle total edh'''' plus grand que l'angle droit *edb*; mais si l'on élève sur la droite *DB* les perpendiculaires *DE* et *FG*, prolongées indéfiniment, on formera une bande indéfinie *EDFG*, qui ne saurait remplir l'angle droit *EDB*, quelque nombre de fois qu'elle soit ajoutée à elle-même. En effet, si l'on prend $FK = DF$, et qu'on élève KL perpendiculaire sur *AB*, que l'on plie ensuite la figure le long de KL, la bande *EDFG* couvrira exactement la bande *GFKL*; et les angles *GFD*, *GFK*, étant droits, la partie *DF* tombera sur *FK*. Si maintenant on prend $DF = FK$ par construction, le point *D* se placera sur le point *K*; de plus, l'angle *FKL* étant droit aussi bien que *DFK*, la ligne *DE* se placera sur *KL*. Cela posé, puisqu'on peut porter sur la droite indéfinie *DB* autant qu'on voudra de parties égales à *DF*, sans arriver à son terme, on formera un nombre aussi grand qu'on voudra de bandes égales à *EDFG*, sans pouvoir couvrir l'espace indéfini compris entre les deux côtés de l'angle droit *EDB*. Il suit de là que, considérées relativement à leurs limites latérales, la surface de l'angle *edh* est plus grande que celle de la bande *EDFG*. Si donc on construit dans cette bande, sur

Fig. 23.

THÉORÈME.

Fig. 24. 41. *Lorsque deux droites* DE *et* FG, fig. 24, *sont parallèles, toutes les droites, telles que* LM, *qui sont perpendiculaires sur l'une, le sont en même temps sur l'autre.*

Démonstration. Supposons que cela n'ait pas lieu, et que LM, perpendiculaire en M sur FG, ne le soit pas en L sur DE; on pourrait élever alors par le point L sur LM, une perpendiculaire qui serait différente de EL, et à laquelle EL serait intérieure ou extérieure, par rapport à FG. D'après la proposition du n° 40, EL devrait donc rencontrer GM, ce qui ne saurait arriver, puisque les droites DE et FG sont parallèles : on ne peut donc pas élever sur LM, par le point L, une perpendiculaire différente de EL; ainsi LM est perpendiculaire à la fois sur DE et sur FG.

42. *Corollaire.* Il suit du théorème précédent, que deux droites parallèles à une troisième, sont aussi

---

la droite ED, un angle EDH égal à edh, il ne pourra demeurer contenu entre les lignes ED et FG; son côté DH coupera nécessairement la droite FG.

Pour sentir la force de cette démonstration, il faut bien concevoir que lorsqu'on applique l'angle droit edb sur l'angle droit EDB, ces deux surfaces doivent toujours coïncider entre leurs limites latérales de et db, DE et DB, quelque loin qu'on les prolonge : alors on verra que si les angles construits dans les bandes n'en sortaient pas, ils laisseraient un vide indéfini, après la dernière bande, et un autre dans chaque bande; mais celui-ci, qui a toujours lieu près de leur sommet, est plus que compensé par les espaces qui leur deviennent communs quand ils sont sortis des bandes, parce que leurs côtés se croisant, ils se recouvrent en partie : tel est l'espace MNO, commun aux angles EDH, GFH'. Avec cette explication, il ne doit rester, à ce que je crois, aucun doute fondé sur ce que l'infini entre dans les considérations précédentes; car il ne s'agit que de concevoir qu'il est toujours possible de placer dans l'angle droit un nombre de bandes qui surpasse un nombre donné, quelque grand que soit ce dernier.

parallèles entre elles. En effet, toute ligne perpendiculaire sur celle-ci, le sera aussi sur les deux premières, qui, se trouvant par là perpendiculaires à une même droite, ne pourront se rencontrer, et seront par conséquent parallèles entre elles.

THÉORÈME.

43. *Lorsque deux droites,* DE *et* FG, *parallèles entre elles,* fig. 25, *sont coupées par une droite quelconque* HI, *les angles* ELI *et* GMI, *qu'elles font avec cette dernière, d'un même côté, l'un en dedans, l'autre en dehors, sont égaux entre eux.* Fig. 25.

Démonstration. Si du point *K*, milieu de *LM*, on abaisse sur l'une des droites *ED*, *FG*, la perpendiculaire *DF*, cette ligne sera en même temps perpendiculaire sur l'autre (41). Les triangles *DLK*, *KFM* seront égaux (34), parce que les côtés *LK* et *KM*, respectivement opposés aux angles droits *D* et *F*, sont égaux par construction, et que, de plus, les angles *DKL* et *MKF* le sont aussi, comme étant opposés par le sommet: donc l'angle *DLK* ou *ELI* est égal à *KMF*, et par conséquent à *GMI*, opposé par le sommet à ce dernier.

THÉORÈME.

44. *Si deux droites,* DE *et* FG, *font, avec une troisième,* IH, *et du même côté, par rapport à celle-ci, des angles égaux,* ELI, *GMI, l'un en dedans, l'autre en dehors, ces deux droites seront parallèles entre elles.*

Démonstration. Si, du point *K*, milieu de *LM*, on abaisse sur *DE* la perpendiculaire *DF*, on formera les triangles *DLK* et *MKF*, égaux entre eux (18), parce que, d'après l'hypothèse, l'angle *DLK* ou *ELI* est égal à l'angle *KMF*, opposé par le sommet à *GMI*; l'angle *DKL* est égal à *MKF*, comme opposé par le sommet, et enfin le côté *LK* est égal à *KM*, par construction. L'angle *KFM* sera donc égal à *LDK*, et droit par con-

séquent; ainsi les deux droites *DE* et *FG*, étant perpendiculaires l'une et l'autre à la même droite *DF*, seront parallèles entre elles.

45. *Remarques.* Le fréquent usage que l'on fait des propriétés des parallèles, a porté les géomètres à désigner par des noms particuliers les différens angles qu'elles font avec les droites qui les coupent, droites que, pour cette raison, on appelle *sécantes.*

Fig. 26. Les angles tels que *ELI*, *GMI*, *fig.* 26, situés du même côté de la sécante *IH*, et dont l'ouverture est tournée du même côté, se nomment *angles correspondans.*

Les angles *DLM*, *FMI*, sont aussi des angles correspondans.

Tous les angles dont l'ouverture est entre les parallèles, sont compris dans la dénomination générale d'*angles internes*, et tous ceux dont l'ouverture est en dehors, s'appellent *angles externes.*

On distingue ensuite ces mêmes angles par leur position relativement à la *sécante.* Ceux qui sont du même côté par rapport à cette droite, sont des *angles internes* ou des *angles externes du même côté.*

ELM, *GML*, sont deux angles internes du même côté.

HLD, *IMF*, sont deux angles externes du même côté.

Les angles qui sont dans une situation opposée, tant par rapport à la sécante que par rapport aux parallèles, se nomment *angles alternes.* Il y a des angles *alternes internes*, comme *ELM* et *FML*, ou *DLM* et *GML*; et des *angles alternes externes*, comme *HLD* et *GMI*, ou *HLE* et *FMI.*

THÉORÈME.

46. *Lorsque deux parallèles*, DE *et* FG, *sont coupées par une troisième ligne* IH,

1°. *Les angles correspondans sont égaux;*

2°. *Les angles alternes internes sont égaux ;*

3°. *Les angles alternes externes sont égaux ;*

4°. *Les angles internes du même côté, réunis, forment deux angles droits ;*

5°. *Les angles externes du même côté, réunis, forment deux angles droits ;*

6°. *Lorsque l'une quelconque de ces propriétés a lieu, les droites* DG *et* FG *sont nécessairement parallèles.*

Démonstration. 1°. L'égalité des *angles correspondans* n'est autre chose que le théorème du n° 43, puisque les angles *ELI* et *GMI*, *fig.* 25, sont évidemment des *angles correspondans*, d'après le sens attaché à ce mot. L'égalité de ces deux-là étant prouvée, celle de tous les autres angles correspondans s'en déduit sur-le-champ. Pour les angles *DLM* et *FMI*, par exemple, *fig.* 26, on remarquera que la somme des angles *DLM* et *ELI*, qui reposent sur la même droite *DE*, est égale à deux droits (11) ; que, par la même raison, la somme des angles *FMI* et *GMI* est aussi égale à deux droits. Retranchant de ces sommes égales les angles égaux *ELI* et *GMI*, les angles restans *DLM* et *FMI* seront nécessairement égaux.

Fig. 25.

Fig. 26.

2°. L'égalité des *angles alternes internes*, celle de *ELI*, *FMH*, par exemple, a lieu, parce que *FMH* est égal à *GMI*, son opposé par le sommet, et que celui-ci est égal à *ELI*, comme correspondant : les deux angles *ELI* et *FMH* étant égaux à un troisième *GMI*, sont aussi égaux entre eux. En raisonnant d'une manière semblable, on reconnaîtrait l'égalité des angles *DLI* et *GMH*.

3°. L'égalité des *angles alternes externes*, celle de *DLH* et *GMI*, par exemple, a lieu, parce que *GMI* étant opposé par le sommet à *FMH*, lui est égal, et que ce dernier angle est égal à *DLH*, comme correspondant : les deux angles *DLH* et *GMI* étant donc égaux à un troisième *FMH*, sont égaux entre eux. C'est ainsi

qu'on démontrerait l'égalité des deux angles *ELH*, *FMI*.

4°. Les *angles internes du même côté*, *ELI* et *GMH*, par exemple, pris ensemble, valent deux droits, parce que *ELI* et *GMI* sont égaux, comme correspondans, et que la somme des angles *GMI* et *GMH*, qui reposent sur la même droite *HI*, étant égale à deux droits (11), si l'on substitue à *GMI* son égal *ELI*, la somme des angles *ELI* et *GMH* demeurera la même que celle des angles *GMI* et *GMH*, et sera par conséquent égale à deux droits.

5°. Les *angles externes du même côté*, *ELH* et *GMI*, par exemple, pris ensemble, valent deux droits, parce que les angles *GMI* et *ELM* sont égaux, comme correspondans, et que la somme des angles *ELM* et *ELH*, qui reposent sur la même droite *IH*, étant égale à deux droits (11), si l'on substitue à l'angle *ELM* son égal *GMI*, la somme des angles *GMI* et *ELH* sera la même que la précédente, et par conséquent encore égale à deux angles droits.

6°. Enfin, lorsque l'une quelconque de ces propriétés a lieu, les droites *DE* et *FG* sont parallèles, parce que si c'est l'égalité des angles correspondans que l'on remarque d'abord, il suit du n° 44, que cette égalité entraîne nécessairement le parallélisme; et quant aux quatre autres propriétés, il suffit d'observer que l'on conclut de chacune d'elles l'égalité des angles correspondans.

En effet, les angles alternes internes *ELI* et *FMH* ne peuvent être égaux sans que l'angle *GMI*, égal à *FMH*, comme son opposé par le sommet, ne le soit par conséquent à *ELI*; donc, dans ce cas, les angles correspondans *ELI* et *GMI* sont égaux.

Il en est de même des angles alternes externes *ELH* et *FMI*, puisque *FMI* et *GMH* étant égaux comme opposés par le sommet, *GMH* se trouve égal aussi à son correspondant *ELH*.

Quand on sait que la somme des angles internes ou

externes du même côté, est égal à deux droits, on s'assure, ainsi qu'il suit, que les angles correspondans sont égaux. Si, par exemple, la somme des angles *ELI* et *GMH* est égale à deux droits, l'angle *ELI* sera égal à deux angles droits moins l'angle *GMH*; mais parce que les deux angles *GMH* et *GMI*, qui reposent sur une même droite, valent ensemble deux droits, l'angle *GMI* sera aussi égal à deux angles droits moins l'angle *GMH*, et par conséquent égal à son correspondant *ELI*, qui a la même valeur. On raisonnerait de la même manière pour les angles externes du même côté.

47. *Corollaire.* Puisque deux lignes parallèles jouissent toujours des propriétés précédentes, et que lorsque ces propriétés ont lieu par rapport à deux droites, celles-ci sont parallèles, il s'ensuit que les droites pour lesquelles ces propriétés n'ont pas lieu ne sont point parallèles.

Par exemple, deux droites *DE* et *FG*, *fig.* 27, perpendiculaires à deux droites *AB* et *BC* qui se coupent, ne sont point parallèles; car si l'on tire la sécante *IH*, il est visible que la somme des angles *EIH* et *GHI*, intérieurs du même côté, est moindre que celle des deux angles droits *EIB*, *GHB*. Fig. 27.

PROBLÈME.

48. *Par un point donné* C, fig. 28, *mener une droite parallèle à la droite donnée* AB. Fig. 28.

Solution. Par le point *C*, on mènera une droite quelconque *CB* rencontrant *AB*; puis on fera au point *C*, sur *CB*, l'angle *BCD* égal à l'angle *ABC* (23); la droite *CD*, obtenue par ce procédé, sera la parallèle demandée, puisqu'elle passera par le point *C*, et qu'en considérant *CB* comme sécante, les angles alternes internes *ABC* et *BCD* seront égaux par construction.

PROBLÈME.

49. *Par un point donné* C, *pris hors d'une droite* AB, fig. 29, *mener une droite qui fasse avec la première un angle égal à un angle donné* A'. Fig. 29.

Solution. Par un point quelconque A de la droite AB, on fera l'angle DAB égal à l'angle A' (23), et menant par le point C, parallèlement à AD (n° précédent), la droite CE, elle fera avec AB un angle CEB égal à DAB (47), et par conséquent à l'angle donné A'.

THÉORÈME.

Fig. 30. 50. *Les angles* ABC, DEF, fig. 30, *qui ont les côtés parallèles et l'ouverture placée dans le même sens, sont égaux.*

Démonstration. Si l'on prolonge un côté quelconque du second angle, DE, par exemple, jusqu'à ce qu'il rencontre un de ceux du premier, en considérant les parallèles EF et CH, par rapport à la sécante DH, on reconnaîtra que les angles DEF et DHC sont égaux comme correspondans (47); puis, en considérant les parallèles AB et DH, par rapport à la sécante BC, on reconnaîtra que les angles ABC et DHC sont égaux comme correspondans : les deux angles DEF et ABC étant égaux à un troisième DHC, seront par conséquent égaux entre eux.

THÉORÈME.

51. *Les trois angles d'un triangle réunis, valent toujours deux angles droits.*

Démonstration. Si l'on mène par l'angle A du triangle
Fig. 31. quelconque ABC, *fig.* 31, une droite AD parallèle au côté opposé BC, les angles ABC et EAD, formés sur la sécante AB, seront égaux comme correspondans (47); les angles DAC et ACB, alternes internes par rapport à la sécante AC, seront aussi égaux (47); donc l'angle EAC, composé des angles EAD et DAC, sera égal à la somme des angles ABC et ACB du triangle proposé; et en joignant à l'angle EAC le troisième angle CAB, on aura, autour du point A et sur la droite EB,

trois angles, *EAD*, *DAC*, *CAB*, équivalens à ceux du triangle *ABC*, et égaux à deux droits (10).

N. B. Il peut être utile de se rappeler que l'angle *EAC* se nomme *angle extérieur* du triangle *ABC*, et qu'il vaut à lui seul les deux intérieurs opposés *ABC*, *ACB*.

52. *Corollaire.* Il suit du théorème ci-dessus, que quand deux angles d'un triangle sont respectivement égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle de l'un est aussi égal au troisième angle de l'autre, puisque ce dernier angle, réuni aux deux premiers dans chaque triangle, compose de part et d'autre une somme égale.

On voit encore par là qu'un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit, et à plus forte raison qu'un seul angle obtus.

53. On nomme triangle *rectangle* celui qui a un angle droit, *acutangle* celui qui n'a que des angles aigus, *obtusangle* celui qui a un angle obtus; et les deux dernières espèces sont comprises sous la dénomination générale de triangles *obliquangles*.

Il est visible que, dans le triangle équilatéral, dont tous les angles sont égaux (37), chaque angle est les deux tiers d'un droit.

THÉORÈME.

54. *Les parties* AC *et* BD, fig. 32, *de deux droites parallèles interceptées entre deux droites parallèles, sont égales entre elles, et réciproquement.* Fig. 32.

Démonstration. Si l'on tire la droite *AD*, on formera deux triangles *ABD* et *ACD*, qui seront égaux; car en prenant *AD* pour sécante des parallèles *AB* et *CD*, on verra que les angles *BAD* et *ADC* sont égaux comme alternes internes (47); regardant ensuite la même droite comme sécante des parallèles *AC* et *BD*, on

reconnaîtra que les angles *ADB* et *DAC* sont égaux par la même raison ; de plus, le côté *AD* étant commun aux deux triangles *ABD* et *ACD*, ces triangles seront égaux (18) : les côtés *AC* et *BD*, opposés à des angles égaux *ADC* et *BAD*, seront donc égaux, ce qui fait le sujet de la proposition. Il en sera de même des côtés *AB* et *CD*.

Réciproquement, si les parties *CD* et *AB* sont égales, ainsi que les parties *AC*, *BD*, les triangles *ACD* et *ABD* auront leurs côtés égaux chacun à chacun, et seront par conséquent égaux. L'égalité des angles *CAD*, *ADB*, alternes internes, établira le parallélisme des droites *AC*, *BD* (47), et l'égalité des angles *BAD*, *CDA*, celui des droites *AB*, *CD*.

On prouverait, sans plus de difficulté, que les droites *CD* et *AB* sont égales et parallèles, dès que les droites *AC* et *BD* sont égales et parallèles entre elles.

55. *Corollaire.* La proposition précédente ne cesserait pas d'être vraie, quand même les droites *AC* et *BD* seraient perpendiculaires sur *AB* et *CD*, puisqu'elles seraient toujours parallèles entre elles ; mais alors les parties *AC* et *BD* mesurant la distance des deux droites *AB* et *CD*, il s'ensuit que deux parallèles sont partout également éloignées l'une de l'autre.

THÉORÈME.

Fig. 33. 56. *Si deux droites quelconques* AF *et* GM, fig. 33, *sont coupées par un nombre quelconque de parallèles*, AG, BH, CI, *etc.*, *menées par des points pris à des distances égales sur la première, les parties* GH, HI, IK, *etc.*, *de la seconde, seront aussi égales entre elles.*

Démonstration. En menant par les points *G*, *H*, *I*, etc., les droites *GN*, *HO*, *IP*, etc., parallèles à *AF*, on forme les triangles *GNH*, *HOI*, *IPK*, etc., dans lesquels les côtés *NG*, *OH*, *IP*, etc., étant respectivement

égaux à AB, BC, CD, etc., comme parallèles comprises entre parallèles (54), sont égaux entre eux. Les angles NGH, OHI, PIK, etc., sont égaux comme correspondans, par rapport à la sécante GM; et enfin les angles GNH, HOI, IPK, etc. sont égaux, parce qu'ils ont les côtés parallèles et l'ouverture placée dans le même sens (50). Ces triangles ayant donc, chacun à chacun, un côté égal, adjacent à deux angles égaux, sont égaux (18); d'où il suit que les côtés GH, HI, IK, etc., le sont aussi.

57. *Corollaire.* Il suit de ce qui précède, que AB est contenu dans AF, autant que GH l'est dans GM; en sorte qu'on a cette proportion:

$$AB : AF :: GH : GM,$$

que l'on peut changer en cette autre:

$$AB : GH :: AF : GM;$$

et de cette dernière on tire

$$2AB : 2GH :: AF : GM,$$
$$3AB : 3GH :: AF : GM,$$
etc.,

c'est à-dire qu'un nombre quelconque de parties de AF est à un pareil nombre de parties de GM, comme la droite entière AF est à la droite entière GM.

THÉORÈME.

58. *Trois parallèles* AG, DK, FM, fig. 34, *coupent* Fig. 34.
toujours deux droites quelconques, AF *et* GM, *en parties proportionnelles, ou de manière qu'on a*

$$AD : DF :: GK : KM.$$

Démonstration Il peut arriver deux cas: 1°. que AD soit commensurable avec AF, c'est-à-dire que le rapport de AD avec AF puisse s'exprimer exactement par deux nombres. Je suppose, par exemple,

qu'on ait

$$AF : AD :: 47 : 25;$$

si l'on conçoit la droite AF divisée en 47 parties égales, AD en contiendra 25, et DF 22. Menant ensuite par toutes les divisions, des parallèles à FM, la droite GM se trouvera divisée en 47 parties égales, dont 25 composeront GK, et 22 composeront KM: on aura donc

$$AD : DF :: 25 : 22,$$
$$GK : KM :: 25 : 22;$$

d'où il suit

$$AD : DF :: GK : KM.$$

De plus, à cause des proportions

$$AF : AD :: 47 : 25,$$
$$GM : GK :: 47 : 25,$$

on obtiendra encore

$$AF : AD :: GM : GK.$$

2°. Si AF et AD sont incommensurables, on prouvera, ainsi qu'il suit, que leur rapport ne peut être ni plus petit ni plus grand que celui de GM à GK.

Soit d'abord

$$AF : AD :: GM : GI,$$

GI étant plus petit que GK. On peut toujours diviser le côté AF en parties assez petites pour qu'en menant par tous les points de division des parallèles à FM, il en passe une, de, entre les points I et K; on aura, d'après ce qui précède, à cause de la commensurabilité de AF à Ad,

$$AF : Ad :: GM : Ge.$$

Les antécédens de cette proportion étant les mêmes que ceux de la précédente, on en conclura cette nouvelle proportion entre les conséquens de l'une et de l'autre:

$$AD : Ad :: GI : Ge,$$

résultat absurde, puisque AD étant plus grand que Ad, GI est plus petit que Ge.

On ne peut pas avoir non plus

$$AF : AD :: GM : GI',$$

GI' étant plus grand que GK; car ayant divisé AF de manière qu'une des parallèles $d'e'$ tombe entre les points K' et I', on aura

$$AF : Ad' :: GM : Ge'.$$

Faisant une nouvelle proportion entre les conséquens de cette dernière et ceux de la précédente, on aura

$$AD : Ad' :: GI' : Ge',$$

résultat encore absurde, puisque AD étant plus petit que Ad', GI' est plus grand que Ge': il faut donc nécessairement que le quatrième terme de la proportion formée des droites AF, AD, GM, soit GK.

On tire de la proportion $AF : AD :: GM : GK$,

$$AF - AD : AD :: GM - GK : GK,$$

ou $$DF : AD :: KM : GK,$$

ou enfin $$AD : DF :: GK : KM,$$

en renversant les deux rapports (*).

59. 1er *Corollaire.* Si, par le point G, on tire la droite GN parallèle à AF, on aura

$$GO = AD,\ ON = DF\ (54);$$

(*) On éprouvera peut-être quelque difficulté à transporter aux parties de l'étendue la notion de rapport, telle qu'on la conçoit à l'égard des nombres, surtout lorsqu'il s'agira de lignes incommensurables entre elles; mais l'obscurité disparaîtra, si l'on fait attention qu'on ne peut comparer deux lignes qu'en les supposant rapportées à une commune mesure (5), et qu'alors leur rapport est vraiment un nombre, ou une fraction dont les termes sont exprimés par les nombres de mesures communes comprises dans chaque droite. Quoique cette fraction cesse d'être rigoureusement assignable dans le cas où le rapport est incommensurable, elle n'en existe pas moins, puisqu'on peut en approcher d'aussi près qu'on voudra; et deux rapports incommensurables devront être regardés comme égaux, dès qu'on prouvera que, quelque loin que soit poussée l'approximation pour l'un et pour l'autre, leur différence demeurera toujours nulle.

et, par ce qui précède,

$$GO : ON :: GK : KM,$$
$$GO : GN :: GK : GM.$$

Si donc on mène dans un triangle une droite OK parallèle à l'un des côtés NM, les deux autres côtés GN et GM seront coupés en parties proportionnelles par cette droite.

60. 2° *Corollaire.* Réciproquement, lorsqu'une droite coupe deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles, elle est parallèle au troisième.

Fig. 35. En effet, si dans le triangle ABC, *fig.* 35, on avait

$$AB : Ae :: AC : Af,$$

et que la ligne ef ne fût pas parallèle à BC, on pourrait mener, par le point e, une droite eH parallèle à BC, et qui donnerait

$$AB : Ae :: AC : AH \quad (59),$$

proportion dont les trois premiers termes sont les mêmes que ceux de la précédente; il s'ensuit donc que $AH = Af$, que par conséquent les droites ef et eH se confondent, et que la première est nécessairement parallèle à BC.

Fig. 36. 61. 3° *Corollaire.* La droite BD, *fig.* 36, qui divise en deux parties égales l'un des angles B d'un triangle quelconque ABC, partage le côté opposé AC en deux segmens proportionnels aux côtés adjacens, c'est-à-dire que l'on a cette proportion :

$$AD : DC :: AB : BC.$$

Cela se prouve, en menant CE parallèle à BD et qui rencontre en E, AB prolongée. Il en résulte, par le n° 59,

$$AD : DC :: AB : BE;$$

de plus, le triangle CBE est isoscèle; car l'angle BCE est égal à CBD, comme alterne interne par rapport à la sécante BC, l'angle BEC l'est à l'angle ABD, comme

correspondant par rapport à la sécante AE, et les angles ABD et CBD sont égaux comme moitiés du même angle ABC: donc les angles BCE et BEC le sont aussi; donc BE est égal à BC (37); donc enfin

$$AD : DC :: AB : BC.$$

PROBLÈME.

62. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données*, M, N, P, fig. 37, *ou le quatrième terme de cette proportion :* Fig. 37.

$$M : N :: P : x.$$

Solution. On tirera deux droites indéfinies AB et AC, faisant entre elles un angle quelconque; on prendra sur la première, de A en B, une distance AB égale à M, et de A en D une distance égale à N; puis on portera sur la seconde, de A en C, la troisième droite P. On joindra par une droite les points B et C, et tirant par le point D, parallèlement à BC, la droite DE, on aura dans AE la quatrième proportionnelle demandée, puisque

$$AB : AD :: AC : AE \text{ (59)},$$

ce qui donne

$$M : N :: P : AE.$$

Si les deux droites N et P étaient égales entre elles, la ligne déterminée par la proportion

$$M : N :: N : x,$$

serait ce que les géomètres ont appelé *troisième proportionnelle*. La construction de ce cas ne diffère pas de celle du précédent; le point C tombe alors en c, et la droite De, parallèle à Bc, coupe sur AC la partie Ae, égale à la troisième proportionnelle cherchée, puisqu'on a

$$AB : AD :: Ac : Ae,$$

ou

$$M : N :: N : Ae.$$

63. Deux triangles sont *semblables*, lorsque les angles de l'un sont respectivement égaux aux angles de l'autre,

et que les côtés qui, dans l'un et dans l'autre, sont opposés à des angles égaux, et que, pour cette raison, on nomme *côtés homologues*, sont proportionnels.

Ces deux conditions sont liées entre elles de manière, que l'une entraîne toujours l'autre.

THÉORÈME.

Fig. 38. 64. *Lorsque deux triangles*, ABC *et* DEF, fig. 38, *ont leurs angles égaux chacun à chacun, leurs côtés homologues sont proportionnels, et ils sont par conséquent semblables.*

Démonstration. Si l'on prend sur AB et AC deux parties Ae et Af, respectivement égales à DE et à DF, et qu'on tire ef, les triangles Aef et DEF seront égaux, puisque, par l'hypothèse, l'angle A de l'un est égal à l'angle D de l'autre, et que les côtés Ae et Af sont égaux à DE et à DF, par construction (16). L'angle Aef étant égal à E, le sera par conséquent à B, et ef sera parallèle à BC: on aura donc la proportion

$$Ae : AB :: Af : AC \quad (59),$$

ou
$$DE : AB :: DF : AC.$$

Tirant ensuite Gf parallèlement à AB, on obtiendra

$$Af : AC :: BG : BC,$$

ou
$$DF : AC :: EF : BC,$$

puisque BG est égal à ef (54), qui l'est à EF. Réunissant cette dernière proportion avec la première, par le moyen du rapport $DF : AC$, qui est commun à l'une et à l'autre, on aura cette suite de rapports égaux :

$$DE : AB :: DF : AC :: EF : BC,$$

de laquelle il résulte que les côtés homologues des triangles ABC, DEF, sont proportionnels entre eux.

65. *Corollaire.* Il suit de la proposition précédente, que deux triangles sont semblables, 1°. lorsqu'ils ont seulement deux angles égaux chacun à chacun, puisque

le troisième angle de l'un est nécessairement égal au troisième angle de l'autre (52);

2°. Lorsque leurs côtés sont respectivement parallèles;

3°. Lorsque leurs côtés sont respectivement perpendiculaires.

La seconde partie est évidente pour les triangles placés comme ABC et DEF; car les angles tels que A et D, qui ont leur ouverture tournée dans le même sens, sont égaux (50).

A l'égard des triangles placés dans une situation renversée, comme le montre la figure 39, si l'on prolonge le côté EF du triangle DEF, de manière qu'il en coupe deux du triangle ABC, en G et en H, les angles AGH et DEF seront égaux comme alternes externes, par rapport aux parallèles AB, DE, et à la sécante FH; les angles AHG et DFE le seront comme alternes internes, par rapport aux parallèles AC, DF; et le triangle DEF sera par conséquent semblable au triangle AGH, qui le sera lui-même au triangle ABC, puisque les angles AHG et AGH sont égaux aux angles ACB, ABC, comme correspondans, par rapport aux parallèles GH, BC, et aux sécantes AC, AB. Fig. 39.

Il est évident que les côtés homologues, dans le cas actuel, sont parallèles entre eux.

Pour prouver la dernière partie, soient les deux triangles ABC et DEF, *fig.* 40, placés de manière que le côté EF soit perpendiculaire sur BC prolongé, que DF prolongé le soit sur AC, et enfin que DE prolongé le soit sur AB; par le point A, opposé au côté BC, perpendiculaire sur EF, on mènera les droites AG et AH, respectivement parallèles aux deux autres côtés DF et DE, du triangle DEF, et par conséquent perpendiculaires l'une sur AC, l'autre sur AB. Les angles CAG et BAH seront droits d'après l'hypothèse; si l'on ajoute à chacun le même angle CAH, les deux angles résultans BAC et GAH seront égaux; mais les angles GAH Fig. 40.

et EDF, ayant par construction leurs côtés parallèles et leur ouverture tournée dans le même sens, sont égaux : l'angle BAC sera donc égal à EDF.

Menant ensuite, par le point B, les droites BI et BK parallèles aux côtés EF et DE, on formera les angles droits CBI et ABK, desquels, retranchant une partie commune ABI, il restera les angles égaux ABC, IBK; et le second étant égal à DEF, à cause du parallélisme des droites BI et EF, BK et DE, on en conclura que ABC est aussi égal à DEF. Les triangles ABC et DEF ayant deux angles égaux chacun à chacun, sont par conséquent semblables.

On voit, de plus, que les côtés homologues sont ceux qui sont respectivement perpendiculaires, puisque l'angle D étant égal à l'angle A, le côté EF est homologue à BC, et ainsi des autres.

THÉORÈME.

66. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal, chacun à chacun, compris entre des côtés proportionnels.*

Fig. 38. *Démonstration.* Si l'angle A du triangle ABC, *fig.* 38, est égal à l'angle D du triangle DEF, et qu'on ait $AB : DE :: AC : DF$, on prendra, sur les côtés AB et AC du premier triangle, deux parties, Ae et Af, respectivement égales à DE et à DF; tirant ef, on formera le triangle Aef égal au triangle DEF (16); et la droite ef, coupant les côtés du triangle BAC en parties proportionnelles, puisqu'on aura

$$AB : DE \text{ ou } Ae :: AC : DF \text{ ou } Af,$$

sera parallèle à BC (60). Les angles e et f, respectivement égaux aux angles E et F, le seront aussi aux angles B et C; et par conséquent les triangles ABC et DEF, ayant leurs angles égaux, seront semblables (64).

THÉORÈME.

67. *Deux triangles qui ont les côtés proportionnels, chacun à chacun, sont semblables.*

Démonstration. Soit, dans les triangles ABC, DEF, cette suite de rapports égaux :

$$AB : DE :: AC : DF :: BC : EF.$$

Si l'on prend sur AB une partie Ae égale à DE, et qu'on mène une droite ef parallèle à BC, les triangles ABC et Aef, semblables entre eux (65), donneront

$$AB : Ae :: AC : Af :: BC : ef;$$

mais parce que Ae est égal à DE, tous les rapports de la seconde suite seront égaux à ceux de la première, et comme les antécédens sont les mêmes de part et d'autre, les conséquens seront aussi les mêmes : on aura donc

$$Af = DF, \quad ef = EF.$$

Il suit de là que le triangle DEF est égal au triangle Aef; et comme ce dernier est semblable au triangle ABC, il en sera de même du premier.

PROBLÈME.

68. *Construire sur une droite donnée* EF, *un triangle semblable au triangle* ABC.

Solution. On peut construire un triangle semblable à un autre, en partant des divers caractères par lesquels la similitude de ces figures est constatée. Si l'on veut donc former sur la droite donnée EF, un triangle qui soit semblable au triangle ABC, on y parviendra, 1°. en menant par les points E et F, des droites qui fassent avec EF des angles E et F, respectivement égaux aux angles B et C (65);

2°. En faisant au point E, sur EF, un angle égal à l'angle B, et portant sur le côté DE de cet angle, une distance DE quatrième proportionnelle aux trois lignes BC, EF, AB; de cette manière, les deux triangles seront

encore semblables, comme ayant, chacun à chacun, un angle égal compris entre des côtés proportionnels (66);

3°. Enfin, en cherchant une quatrième proportionnelle aux trois lignes BC, EF, AB, une autre aux trois lignes BC, EF, AC, et construisant sur les deux lignes trouvées et sur EF, un triangle DEF; les triangles DEF et ABC seront semblables, comme ayant leurs côtés proportionnels (67).

THÉORÈME.

69. *Tant de lignes*, AB, AC, AD, AE, AF, *qu'on voudra*, fig. 41, *menées par un même point* A, *et rencontrées par deux parallèles* GL *et* BF, *sont coupées par ces parallèles en parties proportionnelles, et les coupent aussi en parties proportionnelles.* Fig. 41.

Démonstration. Les triangles BAC, CAD, DAE, EAF, ayant deux de leurs côtés coupés par une droite parallèle au troisième, donnent les proportions (59)

$$AG : BG :: AH : HC,$$
$$AH : HC :: AI : ID,$$
$$AI : ID :: AK : KE,$$
$$AK : KE :: AL : LF;$$

et le dernier rapport de chacune étant le premier de la suivante, on en tire

$$AG : BG :: AH : HC :: AI : ID :: AK : KE :: AL : LF,$$

d'où il résulte que les droites AB, AC, AD, AE, AF sont coupées en parties proportionnelles.

De plus, par les triangles BAC, GAH, semblables (65), on a

$$AB : AG :: AC : AH :: BC : GH;$$

par les triangles CAD et HAI,

$$AC : AH :: AD : AI :: CD : HI;$$

par les triangles DAE et IAK,

$$AD : AI :: AE : AK :: DE : IK;$$

par les triangles EAF et KAL,

$$AE : AK :: AF : AL :: EF : KL,$$

rapports qui sont tous égaux, puisque le second de chaque suite est le premier de celle qui vient après. Ne prenant d'abord que ceux qui renferment les lignes menées du point A, on aura

$$AB : AG :: AC : AH :: AD : AI :: AE : AK :: AF : AL.$$

Réunissant ensuite les rapports qui contiennent les parties des parallèles BF et GL, il viendra

$$BC : GH :: CD : HI :: DE : IK :: EF : KL,$$

ce qui fait voir que ces lignes sont coupées en parties proportionnelles.

PROBLÈME.

70. *Diviser une droite donnée, de la même manière qu'une autre est divisée.*

Solution. Soient gl la ligne à diviser, et BF la ligne déjà divisée. On décrira sur cette dernière un triangle BAF, dont les trois côtés soient égaux, ce qui s'effectuera suivant le procédé du n° 21, en prenant la ligne BF elle-même pour rayon des deux cercles à décrire des points B et F, comme centres; portant ensuite gl de A en G, sur le côté AB, et de A en L, sur le côté AF, on tirera GL; les droites qui joindront les points C, D, E, avec le point A, couperont la ligne GL en parties proportionnelles à celles de BF, comme le demande l'énoncé de la question.

En effet, puisque $AB = AF$, $AG = AL$, on a la proportion évidente :

$$AB : AG :: AF : AL,$$

de laquelle il résulte (60) que GL est parallèle à BF. Le triangle GAL étant donc semblable à BAF, donnera cette proportion :

$$AB : AG :: BF : GL;$$

et comme, par construction, $BF=AB$, on aura nécessairement $GL=AG=gl$. Cela posé, d'après le théorème précédent, les droites parallèles GL et BF sont divisées en parties proportionnelles, ou l'une comme l'autre.

Si la ligne à diviser était $g'l'$, plus grande que BF, il faudrait prolonger indéfiniment les côtés AB et AF, au-dessous de BF; portant ensuite $g'l'$ sur AB, de A en G', et sur AF, de A en L', on tirerait $G'L'$, et les prolongemens des droites AC, AD, AE, diviseraient $G'L'$, aux points H', I', K', en parties proportionnelles à celles de BF.

71. *Remarque.* La question précédente peut encore se résoudre comme il suit.

Fig. 42. Soit AH, *fig.* 42, la droite à diviser. On tirera par le point A une droite indéfinie AP, faisant, avec AH, un angle quelconque PAH, et sur laquelle on portera, à la suite les unes des autres, les parties dans lesquelles est partagée la ligne dont les divisions sont connues; on joindra l'extrémité P de la dernière avec l'extrémité H de la ligne à diviser; puis, par les points I, K, L, M, N, et O, on mènera parallèlement à PH, les droites IB, KC, LD, ME, NF, OG qui couperont AH en parties proportionnelles à celles de AP.

Ce dernier procédé se démontre en observant que le triangle ACK, dont les côtés AC et AK sont coupés par BI parallèle au troisième côté CK, donne (59)

$$AB : AI :: AC : AK :: BC : IK ;$$

que le triangle ADL, considéré par rapport à la droite CK, donne

$$AC : AK :: AD : AL :: CD : KL ;$$

que le triangle AEM, considéré par rapport à la droite LD, donne

$$AD : AL :: AE : AM :: DE : LM ,$$

et ainsi des autres. Toutes ces suites de rapports égaux s'enchaînent par le moyen du second rapport de chà-

cune, qui se trouve le premier dans celle qui vient après: ne prenant donc que les rapports qui contiennent les divisions de la droite AP, on aura

$AB : AI :: BC : IK :: CD : KL :: DE : LM ::$ etc.,

ce qui montre que les parties AB, BC, CD, etc., de AH, sont proportionnelles aux parties AI, IK, KL, etc., de AP.

On simplifie un peu ce dernier procédé, en menant par le point H une ligne QH parallèle à AP, et sur laquelle on prend, en commençant au point H, des parties HX, XV, VU, UT, etc., respectivement égales à PO, ON, NM, ML, etc.; les droites PH, OX, NV, etc., qui joindront les points de division correspondans, étant parallèles (54), couperont la droite AH en parties proportionnelles à celles de AP ou de HQ.

72. 1er *Corollaire.* Si, dans la figure 41, les parties de la droite BF, et dans la figure 42, celles de AP, étaient égales entre elles, celles de la droite GL dans la première, et de la droite AH dans la seconde, seraient aussi égales entre elles.

Il suit de là que le procédé du n° 70 et celui du n° 71, peuvent servir à diviser une ligne droite dans un nombre quelconque de parties égales. Il faut pour cela regarder d'abord la droite BF, *fig.* 41, comme indéfinie; puis, Fig. 41. prenant sur cette droite une partie BC d'une grandeur arbitraire, la porter à la suite d'elle-même un nombre de fois égal à celui des parties dans lesquelles la droite donnée GL doit être divisée: le point F, où se termineront ces parties, sera l'extrémité de la ligne BF, et l'on achèvera la construction comme dans le n° 70.

Par le procédé du n° 71, c'est sur la droite AP, *fig.* 42, Fig. 42. considérée comme indéfinie, qu'il faut porter successivement des parties égales et arbitraires, puisque AH représente la ligne donnée.

73. 2° *Corollaire.* La division des droites en parties

égales, est le fondement de la construction des *échelles*, c'est-à-dire des droites qui servent à mesurer les autres. En effet, si l'on avait divisé d'abord en parties égales
Fig. 3. la droite CD, *fig.* 3, il n'y aurait eu qu'à chercher combien AB contenait de ces parties, pour avoir le rapport de AB à CD, au moins d'une manière d'autant plus approchée, que les parties de CD auraient été plus petites. L'imperfection des instrumens et les bornes de nos sens nous forcent bientôt de nous arrêter dans la division des lignes dont les parties nous échappent par leur petitesse; pour étendre nos moyens à cet égard, on a imaginé la division par les *transversales*, repré-
Fig. 43. sentée dans la figure 43, dont voici la construction.

Ayant premièrement divisé la ligne AC en un nombre quelconque de parties égales, telles que BC, et voulant ensuite diviser BC en un nombre de parties trop grand pour que chacune de ces dernières puisse être bien distincte, on mènera sur AC, par les points A et C, les perpendiculaires AA'''' et CL; on prendra sur AA'''' une partie arbitraire AA', qu'on portera à la suite d'elle-même autant de fois que l'on voudra faire de parties dans BC (la figure en représente quatre); par les points de division A', A'', A''', A'''', on tirera des droites parallèles à AC; enfin on joindra les points B et L par la ligne *transversale* BL.

Cela fait, si l'on mène la ligne BK parallèle à CL, on formera les triangles BDE, BFG, BHI, BKL, évidemment semblables entre eux (65), qui donneront ces proportions :

$$BD : BK :: DE : KL,$$
$$BF : BK :: FG : KL,$$
$$BH : BK :: HI : KL,$$

desquelles il résulte, 1°. que BD étant le $\frac{1}{4}$ de BK, DE l'est aussi de KL ou de BC, qui est égal à KL (54);

2°. Que BF étant les $\frac{2}{4}$ ou la $\frac{1}{2}$ de BK, FG l'est aussi de KL ou de BC;

3°. que BH étant les $\frac{3}{4}$ de BK, HI l'est aussi de KL ou de BC.

On voit par là qu'en prenant sur la première, la seconde et la troisième des droites parallèles à AB, les distances AE, $A''G$, $A'''I$, respectivement égales à $A'D+DE$, $A''F+FG$, $A'''H+HI$, on aura

$$AB+\tfrac{1}{4}BC,\quad AB+\tfrac{2}{4}BC,\quad AB+\tfrac{3}{4}BC.$$

Ceci suffit pour montrer comment on peut construire une échelle de transversales avec des divisions quelconques, et l'usage qu'on peut en faire.

Une semblable échelle prend le nom d'échelle de *dixmes* quand elle contient dix parallèles à AB, parce qu'elle donne alors les dixièmes de BC.

THÉORÈME.

74. *Si, de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, qu'on nomme* hypoténuse, 1°. *cette perpendiculaire partagera le triangle en deux autres qui lui seront semblables, et qui le seront par conséquent entre eux;*

2°. *Elle divisera l'hypoténuse en deux parties ou* segmens, *tels que chaque côté de l'angle droit sera moyen proportionnel entre le segment qui lui est adjacent, et l'hypoténuse entière;*

3°. *La perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les deux segmens de l'hypoténuse.*

Démonstration. Le triangle ABC, *fig.* 44, étant supposé rectangle en B, et BD étant perpendiculaire sur AC, les triangles ABC et ABD seront semblables (65); car ils auront, chacun à chacun, deux angles égaux, savoir : l'angle A, qui leur est commun, et l'angle droit ABC, dans le premier, égal à l'angle droit ADB, dans le second. Le triangle BDC est, par les mêmes raisons, semblable au triangle ABC, puisque l'angle C leur est commun, et que l'angle BDC de l'un est droit, ainsi que l'angle ABC de l'autre. fig. 44.

Si l'on compare successivement chacun des deux triangles ABD et BDC avec le triangle ABC, en observant que les angles ABD et CBD sont respectivement égaux aux angles C et A, on trouvera, entre leurs côtés homologues, ces proportions

$$AD : AB :: AB : AC,$$
$$CD : BC :: BC : AC,$$

qui constituent la seconde partie de la proposition.

Comparant ensuite les triangles ABD et BCD l'un à l'autre, on aura

$$AD : BD :: BD : CD,$$

ce qui forme la troisième partie de l'énoncé ci-dessus.

75. *Corollaire.* Il suit, du théorème précédent, que les trois côtés d'un triangle rectangle étant rapportés à une mesure commune, la seconde puissance du nombre qui exprime la longueur de l'hypoténuse est égale à la somme des secondes puissances des nombres qui expriment les longueurs des deux autres côtés.

En effet, les proportions

$$AD : AB :: AB : AC,$$
$$CD : BC :: BC : AC$$

donnent

$$AD = \frac{\overline{AB}^2}{AC}, \qquad CD = \frac{\overline{BC}^2}{AC};$$

et en ajoutant AD avec CD, on a

$$AC = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}{AC} \qquad \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2.$$

Il suit de là que l'on peut trouver l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont on a les deux autres côtés. Si, par exemple, $AB = 3$, $BC = 4$, on aura

$$\overline{AC}^2 = 9 + 16 = 25, \text{ d'où } AC = \sqrt{25} = 5.$$

On peut aussi trouver un des côtés de l'angle droit

quand on connaît l'autre et l'hypoténuse, parce que de

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, on tire $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$.

Si, par exemple, $AC = 13$, $BC = 12$, on aura

$\overline{AB}^2 = 169 - 144 = 25$, d'où $AB = 5$.

On a aussi $AC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}$, $AB = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}$.

THÉORÈME.

56. *Les trois côtés d'un triangle quelconque étant rapportés à une mesure commune, et exprimés par conséquent en nombres, si, de l'extrémité de l'un quelconque de ces côtés, on abaisse une perpendiculaire sur l'un des deux autres, la seconde puissance du premier sera égale à la somme des secondes puissances des derniers, moins deux fois le produit du côté sur lequel tombe la perpendiculaire, par la distance de cette perpendiculaire à l'angle opposé au premier côté, si cet angle est aigu, et plus deux fois le même produit, si cet angle est obtus : c'est-à-dire qu'on aura, dans le premier cas*, fig. 45 *et* 46,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{BD},$$

et dans le deuxième, fig. 47,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{BD}.$$

Démonstration. Quand la perpendiculaire CD, *fig.* 45, partage ABC en deux triangles, ACD et BCD, rectangles en D, le premier donne d'abord, en vertu du n° précédent, Fig. 45.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2,$$

et l'on tire du second,

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2.$$

D'après cette valeur de $\overline{CD}^2$, celle de $\overline{AC}^2$ devient

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2;$$

mais il est visible que $AD = AB - BD$, nombre dont le quarré est $\overline{AB}^2 - 2\,\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2$ (*): mettant cette valeur dans l'expression de $\overline{AC}^2$, on aura enfin

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - 2\,\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2,$$

ce qui se réduit à

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{AB} \times \overline{BD}.$$

Fig. 46. Dans la figure 46, où la perpendiculaire tombe hors du triangle, la différence consiste en ce que

$$AD = BD - AB;$$

mais on a toujours pour le quarré,

$$\overline{AB}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2;$$

ainsi $\overline{AC}^2$ a la même valeur que ci-dessus : voilà le premier cas du théorème.

Fig 47. Lorsque le côté AC, *fig.* 47, est opposé à un angle obtus, la perpendiculaire tombe nécessairement hors du triangle ABC; on trouve encore par les triangles ACD et BCD, rectangles en D,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2, \quad \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2;$$

on en conclut

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2;$$

mais on a $AD = AB + BD$, valeur dont le quarré est $\overline{AB}^2 + 2\,\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2$, et de laquelle il résulte

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2,$$

(*) Dans cette proposition, où je regarde les lignes comme évaluées en nombres, j'ai dû supposer connue la composition de la seconde puissance d'un nombre égal à la somme ou à la différence de deux autres, composition à laquelle on peut d'ailleurs parvenir par le raisonnement seul, sans le secours des caractères algébriques.

ce qui se réduit à

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{BD}:$$

tel est le second cas de l'énoncé.

[illegible] parties AD et BD déterminées sur le côté AB, par la perpendiculaire CD, se nomment *segmens*.

47. *Corollaire*. En rapprochant ce théorème du précédent, on en conclura que l'on peut, lorsqu'on connaît les trois côtés d'un triangle, déterminer si l'angle opposé à l'un quelconque de ces côtés est aigu, droit ou obtus. En effet, dans le premier cas, où $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{BD}^2$, il est évident que la seconde puissance de AC est moindre que la somme de celles des deux autres côtés AB et BC. Dans le second cas, l'angle B étant droit, on a seulement

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2;$$

ainsi la deuxième puissance de AC est égale à la somme de celles des deux autres côtés. Dans le troisième cas enfin, où $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{BD}$, la seconde puissance de AC surpasse la somme de celles des deux autres côtés.

Ces remarques étant appliquées au triangle dont les côtés sont exprimés par 5, 7, 8, et leurs secondes puissances par 25, 49, 64, il en résulte que l'angle opposé au côté 8 est aigu, puisque la seconde puissance de ce côté étant 64, se trouve moindre que la somme 74 des secondes puissances des deux autres côtés.

Il est bon d'observer que l'espèce de l'angle opposé au plus grand côté, fera connaître celle du triangle (53).

DES POLYGONES.

[illegible] Les surfaces planes terminées par un assemblage quelconque de lignes droites, se nomment *polygones*.

Le plus simple de tous est le *triangle*. Les polygones de quatre côtés se nomment en général *quadrilatères ;*

de cinq, *pentagones ;*
de six, *hexagones ;*
de sept, *heptagones ;*
de huit, *octogones ;*
de neuf, *ennéagones ;*
de dix, *décagones ;*
etc.

On ne pousse guère cette nomenclature au-delà du polygone de dix côtés, que pour le *dodécagone*, polygone de douze côtés, et le *pentédécagone*, qui en a quinze.

Fig. 48 et 49. Dans les figures 48 et 49, *ABCDEF* représente un polygone de six côtés, ou un *hexagone*. Tous les angles de la première figure ayant leur ouverture en dedans du polygone, sont des angles *saillans ;* l'angle *DEF* de la figure 49 est un angle *rentrant*, parce qu'il a son ouverture en dehors du polygone.

Les lignes telles que *CA*, *CF*, etc., tirées entre des angles du polygone, qui ne sont pas adjacens au même côté, se nomment *diagonales*.

79. Parmi les quadrilatères ou polygones de quatre côtés, on désigne particulièrement sous le nom de *parallélogramme*, celui dont les côtés opposés sont paral-
Fig. 50. lèles. *ABCD*, *fig.* 50, est un parallélogramme.

Il suit, du n° 54, 1°. que chacune des diagonales *AC* et *BD*, partage le parallélogramme en deux triangles égaux ;

2°. Que les côtés opposés, *AB* et *DC*, *AD* et *BC*, d'un parallélogramme, sont respectivement égaux ;

3°. Que, réciproquement, si les côtés opposés d'une figure de quatre côtés sont égaux, ou bien si deux côtés opposés sont égaux et parallèles, cette figure est un parallélogramme.

THÉORÈME.

80. *Les deux diagonales* AC *et* BD *d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties*

Démonstration. Les triangles AOD et BOC sont égaux, car les côtés AD et BC sont égaux par l'hypothèse, les angles DAO, OCB sont égaux comme alternes internes, par rapport à la sécante AC et aux parallèles AD, BC, et les angles ADO et OBC, le sont aussi comme alternes internes, par rapport à la sécante BD : donc $AO = OC$, $DO = OB$.

THÉORÈME.

81. *En joignant l'un des angles d'un polygone à tous les autres, on partage ce polygone en un nombre de triangles égal à celui de ses côtés, diminué de deux unités.*

Démonstration. Cette proposition est presque évidente par l'inspection de la figure 48, où l'on voit que les diagonales CA, CF, CE, menées de l'angle C aux angles A, F et E, partagent le polygone $ABCDEF$, de six côtés, en quatre triangles, ACB, ACF, FCE, ECD. On se convaincra qu'elle convient à un polygone d'un nombre quelconque de côtés, en observant que les deux triangles extrêmes, tels que ACB, ECD, entre lesquels seront compris tous ceux que peut renfermer le polygone proposé, contiendront chacun deux de ses côtés, tandis que tous les autres n'en contiendront qu'un seul : il y aura donc dans ces deux triangles quatre côtés du polygone, le nombre des triangles intermédiaires sera par conséquent égal à celui des côtés du polygone, diminué de quatre; et le nombre total des triangles sera, comme le porte l'énoncé, égal à celui des côtés du polygone diminué de deux unités. Fig. 48.

82. *Corollaire.* Il suit de là que la somme de tous les angles intérieurs, *ABC*, *BCD*, *CDE*, *DEF*, *EFA*, *FAB*, d'un polygone, vaut autant de fois deux droits qu'il a de côtés moins deux, puisque cette somme se compose de celles des angles de tous les triangles *ACB*, *ACF*, *FCE*, *ECD*, qui valent chacune deux droits, et que le polygone contient un nombre de ces triangles égal à celui de ses côtés, diminué de deux unités.

Dans la figure 49, l'angle rentrant *DEF* est extérieur, et non pas intérieur. En faisant partir les diagonales du sommet *E* de cet angle, on voit évidemment qu'il est remplacé dans la somme des angles intérieurs, par celle des angles *DEC*, *CEB*, *BEA*, *AEF*, et que, réuni à cette dernière, il forme quatre droits (13).

THÉORÈME.

83. *Si l'on prolonge dans le même sens, comme dans le premier polygone de la figure* 48, *tous les côtés d'un polygone qui n'a point d'angles rentrans, la somme des angles extérieurs, formés par chaque côté et par le prolongement de celui qui lui est contigu, est égale à quatre droits, quel que soit d'ailleurs le nombre des côtés du polygone.*

Fig. 48.

Démonstration. Chaque angle extérieur, comme *aAB*, réuni avec l'intérieur *BAF* auquel il est adjacent, forme une somme égale à deux droits, et qui se trouve répétée, pour tout le polygone, autant de fois qu'il a de côtés ou d'angles : la somme des angles, tant extérieurs qu'intérieurs, vaudra donc autant de fois deux droits que le polygone a de côtés. Retranchant de cette somme celle des angles intérieurs, égale à autant de fois deux droits que le même polygone a de côtés moins deux, il restera deux fois deux droits, ou quatre droits, pour la somme des angles extérieurs.

que. Deux polygones sont égaux lorsqu'ils s d'un même nombre de triangles égaux nent disposés, ou assemblés de la même il est évident que, placés l'un sur l'autre, se couvriront parfaitement.

THÉORÈME.

on connait tous les côtés d'un polygone, un seul, et qu'on connait aussi les angles les côtés donnés, le polygone est déterminé, struit.

on. En effet, si, dans le polygone *ABC DEF*, on connait les côtés *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* et les angles qu'ils comprennent, on pourra, sur $A'B' = AB$, faire l'angle $A'B'C' = ABC$, puis prendre $B'C' = BC$; faire au point C', sur $B'C'$, l'angle $B'C'D' = BCD$, puis prendre $C'D' = CD$; faire au point D', sur $C'D'$, l'angle $C'D'E' = CDE$, puis prendre $D'E' = DE$; faire au point E', l'angle $D'E'F' = DEF$, et prendre enfin $E'F' = EF$. Étant parvenu ainsi au point F', il n'y aura qu'une seule manière de le joindre avec le point A', et de *fermer* le polygone $A'B'C'D'E'F'$.

Il est visible que ce polygone sera égal, dans toutes ses parties, au polygone *ABCDEF*; car si on le porte sur ce dernier, en plaçant $A'B'$ sur AB, à cause de l'égalité des an[illegible] ABC et $A'B'C'$, le côté $B'C'$ tombera sur son [illegible] BC; et continuant ainsi de proche en proche, on reconnaîtra que les points A', B', C', D', E', F' [illegible] respectivement sur les points A, B, C, D, E, F, d'où il suit que les deux polygones se [illegible].

[illegible] plusieurs autres cas d'égalité [illegible] je n'ai voulu donner dans le [illegible] exemple de cette égalité, pour montrer [illegible] d'un nombre quelconque N de côtés, [illegible] par conséquent un nombre N d'angles,

ce qui fait en tout $2N$ choses, est déterminé par la connaissance de $2N-3$ de ces choses. On observera ici, comme on l'a dû remarquer dans les différens cas d'égalité des triangles, que les N angles ne doivent compter que pour $N-1$ données, puisque leur somme est toujours donnée (82).

87. On nomme *polygones semblables* ceux dont les angles sont égaux, et dont les côtés homologues (ou semblablement placés) sont proportionnels.

THÉORÈME.

88. *Deux polygones composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés, ont leurs angles égaux chacun à chacun, leurs côtés homologues proportionnels, et sont par conséquent semblables.*

Fig. 51. *Démonstration.* Soient $BAEDC$ et $baedc$, *fig.* 51, les polygones proposés; les triangles ABC, abc, étant semblables, ont leurs angles égaux : ainsi l'on a

$$B=b, \quad BAC=bac.$$

Par la même raison, les triangles ACE et ace donnent

$$CAE=cae, \quad CEA=cea;$$

d'où il suit que l'angle BAE, formé des angles BAC et CAE, dans le premier polygone, est égal à l'angle bae, formé des angles bac et cae, dans le second. On prouvera de même l'égalité des angles AED et aed, EDC et edc; quant aux derniers angles BCD et bcd, il est visible qu'ils sont égaux, puisqu'ils sont formés, l'un des angles BCA, ACE, ECD, l'autre des angles bca, ace, ecd, qui sont respectivement égaux aux premiers, comme angles homologues de triangles semblables.

En formant les proportions qui résultent de la similitude des triangles ABC et abc, ACE et ace, ECD

a

$: bc :: AB : ab :: AC : ac,$

$: ac :: AE : ae :: CE : ce,$

$: ce :: ED : ed :: CD : cd.$

pport de chaque suite, formé par les
ommuns aux triangles adjacens, étant le
rnier de la précédente, ces rapports sont
e eux : en ne prenant donc que ceux qui
côtés des polygones, il viendra

$B : ab :: AE : ae :: ED : ed :: CD : cd,$

ce qui prouve que les côtés homologues sont proportionnels.

THÉORÈME.

89. *Lorsque deux polygones sont semblables, ils sont composés d'un même nombre de triangles semblables, chacun à chacun, et semblablement disposés.*

Démonstration. Puisque, par l'hypothèse, les angles de l'un des polygones sont respectivement égaux à ceux de l'autre, et les côtés homologues du premier sont proportionnels à ceux du second, on aura d'abord l'angle B égal à l'angle b, et

$$BC : bc :: AB : ab;$$

d'où il suit que les triangles ABC et abc sont semblables (66) : les angles BAC et bac seront donc égaux. Si on les retranche des angles BAE et bae, égaux comme appartenant aux polygones, les restes CAE et cae seront égaux ; de plus, les triangles semblables ABC et abc donnent $AB : ab :: AC : ac$, et les polygones AB [illegible] aura

$: AE : ae;$

angles CAE, cae sont encore
ouvera de même la similitude de
e chacun des polygones, en quelque
ent ces triangles.

PROBLÈME.

90. *Construire sur une ligne donnée, un polygone semblable à un polygone donné.*

Solution. Soient bc et $BAEDC$ la droite et le polygone donnés; on fera sur bc, par l'un des procédés du n° 68, un triangle abc semblable au triangle ABC, ce qui déterminera le point a; pour avoir le point e, on fera de même sur ac, un triangle cae semblable au triangle CAE, et ainsi de suite. Le polygone $abcde$ sera semblable au polygone $ABCDE$, puisqu'ils seront composés l'un et l'autre d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés.

Si l'on portait le côté bc sur BC, de C en b', il suffirait de tirer par le point b' la droite $b'a'$ parallèle à BA, puis, par le point a' la droite $a'e'$ parallèle à AE, etc., pour former les triangles $b'Ca'$, $a'Ce'$, etc., respectivement semblables aux triangles BCA, ACE, etc.; le polygone $b'a'e'd'C$ serait construit ainsi sur le côté donné, et semblable au polygone $BAEDC$.

91. *Remarque.* Dans ce qui précède, j'ai mené toutes les diagonales d'un même angle; mais on peut partager des polygones en triangles de plusieurs autres manières, et les propositions ci-dessus s'étendent également à ces cas, parmi lesquels il en est un qu'il est bon de connaître: c'est celui où on lie tous les angles du polygone aux deux extrémités de l'un de ses côtés. Ce cas est représenté dans la figure 52, où l'on a joint les points C, D, E aux points A et B, par des diagonales. Fig. 52.

1°. Il est clair que la position des trois premiers est fixée, à l'égard de la droite AB, dès que les triangles ABC, ABD, ABE sont donnés; et l'on voit bien évidemment de cette manière, que, pour déterminer un polygone, il ne faudra qu'un nombre de triangles moindre de deux unités que celui des angles ou des

côtés du polygone. On voit aussi que si N désigne ce dernier nombre, la détermination de la figure dépendra de $(N-2)$ lignes menées de chacun des angles de la base, et de cette base; ce qui fait en tout $2N-3$ [illegible]

2°. On démontrera sans difficulté, à peu près comme dans les numéros 88 et 89, que si les triangles ABC et abc, ACD et acd, ABE et abe sont respectivement semblables, les polygones $ABCDE$ et $abcde$ le seront aussi, et réciproquement, si ces polygones sont semblables, les triangles correspondans le seront eux-mêmes (*).

THEORÈME.

92. *Si l'on tire dans deux polygones semblables, deux droites qui soient semblablement placées dans chacun d'eux, c'est-à-dire qui passent par des points semblablement placés sur les côtés homologues, et qui fassent avec ces côtés des angles égaux entre eux, ou bien qui coupent, dans chaque polygone, deux côtés homologues en parties proportionnelles, ces droites seront proportionnelles aux côtés homologues des polygones.*

Démonstration. Soient les droites GF et gf, menées par des points G et g où l'on ait $BG : bg :: AB : ab$, et sous des angles FGB et fgb qui soient égaux; les triangles BGC et bgc seront alors semblables, à cause

(*) L'art de lever les plans n'est que celui de construire sur le papier, des polygones semblables à ceux que forment sur le terrain les points dont on veut connaître les situations respectives. On voit [illegible] à concevoir ces points liés [illegible] sur ces triangles un nombre [illegible] pour en faire de semblables [illegible] 68. Voilà tout ce [illegible] le détail des instrumens propres [illegible] les traités généraux, à peu [illegible] n'ont pas [illegible] ces instru- [illegible] connaissent.

des angles égaux B et b, et des côtés BG et bg proportionnels à BC et à bc, puisque les uns et les autres le sont à AB et à ab : on a donc

$$GC : gc :: BG : bg, \text{ ou } :: AB : ab,$$

et $$BCG = bcg, \quad CGB = cgb.$$

On conclut de là que GCF, ou $BCF - BCG$, est égal à gcf, ou à $bcf - bcg$; et parce que $FGB = fgb$, on aura CGF, ou $FGB - CGB$, égal à cgf, ou à $fgb - cgb$; les triangles FCG et fcg seront donc semblables, et donneront

$$FG : fg :: FC : fc :: GC : gc \text{ ou } :: AB : ab,$$

puisqu'on a ci-dessus $GC : gc :: AB : ab$.

Si, au lieu de faire les angles FGB et fgb égaux, on prend les points F et f, de manière que $FC : fc :: BG : bg$, les triangles FCG et fcg seront alors semblables, comme ayant un angle égal compris entre des côtés proportionnels; on aura les mêmes conclusions que ci-dessus, et l'on prouvera, dans ce cas, l'égalité des angles FGB et fgb.

THÉORÈME.

93. *Les contours de deux polygones semblables sont entre eux comme les côtés homologues de ces polygones.*

Démonstration. Les polygones semblables $ABCDE$, $abcde$ donnent cette suite de rapports égaux :

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: AE : ae,$$

on en conclura

$$AB + BC + CD + DE + AE : ab + bc + cd + de + ae$$

c'est-à-dire que

le contour $ABCDE$: au contour $abcde$ :: AB : ab

DE LA LIGNE DROITE ET DU CERCLE.

94. On a vu dans le n° 28, que l'on ne pouvait mener d'un même point à une ligne donnée trois droites égales; il résulte évidemment de là qu'une droite et un cercle ne peuvent se couper en plus de deux points.

Toute droite qui coupe la circonférence du cercle, et qui est prolongée en dehors, se nomme *sécante*. *EF*, fig. 53, est une sécante. Fig. 53.

La partie *CD* de cette droite, comprise dans le cercle, se nomme *corde*.

95. On dit que la corde *CD* qui passe par les extrémités d'un arc quelconque du cercle *CGD*, *soutend* cet arc; mais il faut observer que la même droite est aussi la corde de l'arc *CHD* qui, joint à *CGD*, compose la circonférence entière. Lors donc que le premier arc sera moindre que la demi-circonférence, le second sera nécessairement plus grand.

96. Lorsqu'une corde passe par le centre du cercle, on lui donne le nom de *diamètre*. La droite *AB*, qui passe par le point *O*, est un diamètre.

Tous les diamètres du cercle sont égaux, puisqu'ils sont composés de deux rayons, et que tous ces rayons sont égaux.

Il est visible que le diamètre est la plus grande des droites que l'on peut tirer dans la circonférence du cercle, puisque toute autre corde *CB* est moindre que la somme des deux rayons menés par ses extrémités (15).

97. Le diamètre *AB* partage la circonférence en [illegible] si l'on plie la figure le long [illegible] la circonférence [illegible] sans quoi tous [illegible] ne seraient pas égale-

[illegible] que deux cercles

décrits du même rayon sont égaux; car il en résulte que si l'on place le centre de l'un de ces cercles sur celui de l'autre, leurs circonférences doivent se confondre.

THÉORÈME.

98. *Si l'on porte un arc quelconque de cercle sur un autre arc du même cercle, ou d'un cercle décrit du même rayon que le premier, de manière que deux points quelconques de l'un des arcs tombent sur l'autre, et que les convexités soient tournées du même côté, le plus petit de ces arcs se confondra dans toute son étendue avec le plus grand.*

Démonstration. En effet, si l'on porte l'arc $A'C'$, fig. 54. *fig.* 54, sur AE, en mettant le point A' sur le point A, et que le point C' tombe en C, la corde $A'C'$ couvrira exactement AC; et comme les rayons $O'A'$ et $O'C'$ sont égaux aux rayons OA et OC, le point O' se trouvera sur le point O (20); dès lors tous les points de l'arc $A'C'$ doivent tomber sur ceux de l'arc AC, puisque les uns sont autant éloignés du centre O' que les autres le sont du centre O: donc l'arc $A'C'$ se confondra avec l'arc AC (*).

99. *Corollaire.* Il suit de là que, dans le même cercle ou dans deux cercles décrits du même rayon, les arcs dont les cordes sont égales, sont égaux, pourvu toutefois qu'ils soient de même espèce, c'est-à-dire qu'ils soient tous moindres que la demi-circonférence, ou tous plus grands. En effet, lorsque les cordes sont placées

(*) La propriété de la circonférence du cercle démontrée ci-dessus est d'autant plus remarquable qu'elle n'appartient qu'à cette courbe et à la ligne droite, et qu'elle rend évidente la similitude de toutes les parties de la circonférence du cercle, ou l'uniformité de sa courbure. Telle est la raison qui m'a engagé à donner à cette proposition un énoncé différent de celui qu'on trouve dans la plupart des livres élémentaires, et qui fait l'objet du corollaire suivant.

l'une sur l'autre, comme dans le cas précédent, les arcs se couvrent exactement.

La proposition réciproque est également vraie; c'est-à-dire que quand les arcs sont égaux (dans un même cercle ou dans des cercles décrits du même rayon), les cordes sont égales; car les arcs étant posés l'un sur l'autre, et se couvrant exactement, les extrémités du premier se confondent avec celles du second. Ainsi, $A'C'$ étant placé sur AC, de manière que le point A' soit sur A, le point C' soit sur C, les droites AC et $A'C'$ se couvrent exactement, et sont égales.

THÉORÈME.

100. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, le plus grand arc a la plus grande corde, et réciproquement, pourvu toutefois que les arcs que l'on compare soient moindres que la demi-circonférence.*

Démonstration. 1°. L'arc AE étant plus grand que l'arc AC, l'angle AOE sera visiblement plus grand que l'angle AOC, et par le n° 19, le côté AE du triangle AOE sera plus grand que le côté AC du triangle AOC, puisque ces triangles ont, chacun à chacun, deux côtés égaux;

2°. La corde AE étant plus grande que la corde AC, l'angle AOE sera plus grand que l'angle AOC : l'arc AE surpassera donc l'arc AC.

PROBLÈME.

101. *Deux arcs du même cercle ou de cercles égaux étant donnés, trouver le rapport de leurs longueurs.*

[illegible] stion proposée se [illegible] on pouvait porter [illegible] omme on le fait [illegible] superposition ne [illegible] on y supplée par [illegible] cordes, qui, lorsqu'elles sont égales, cor-

respondent à des arcs égaux. La corde de l'arc CD, Fig. 55. *fig.* 55, pourra être portée deux fois sur l'arc AB, de A en E; et l'arc AE déterminé ainsi, sera composé de deux parties Ad et dE, égales chacune à CD: on aura donc

$$AB = 2CD + EB.$$

On prendra la corde du reste EB, pour la porter sur l'arc CD, de C en F, ce qui s'effectuera une fois, et laissera pour reste l'arc FD; d'où il suit

$$CD = EB + FD.$$

Enfin la corde du second reste FD pouvant se porter quatre fois sur le premier EB, on aura

$$EB = 4FD.$$

En remontant de cette dernière valeur à celle des arcs précédens, on obtiendra

$$EB = 4FD, \quad CD = 5FD, \quad AB = 14FD;$$

l'arc FD, commune mesure des arcs AB et CD, étant contenu 14 fois dans l'un et 5 fois dans l'autre, on en conclura que les arcs proposés sont entre eux comme les nombres 14 et 5.

L'opération se termine ici, comme pour le cas des lignes droites, lorsqu'on trouve un reste qui est contenu exactement dans le précédent, ou qui est tel, que le reste suivant échappe aux sens par sa petitesse (*).

102. *Remarque.* Si l'on conçoit qu'une droite AB, Fig. 56. *fig.* 56, qui coupe le cercle en deux points A et B, tourne autour d'un de ces points, de A, par exemple, et qu'en tendant à sortir du cercle, elle prenne des positions telles que AB', on voit que les points d'intersection de la droite et du cercle se rapprochent sans cesse,

(*) Cette manière de déterminer le rapport de deux arcs de cercle se trouve dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1724, page 200.

et qu'enfin il y a une dernière position AC dans laquelle ces deux points étant réunis en un seul, la droite n'a plus qu'un point de commun avec le cercle, ou ne fait que le toucher. Dans cette position, la droite AC est *tangente* au cercle.

THÉORÈME.

103. *La perpendiculaire menée par un point de la circonférence du cercle, sur le rayon qui passe par ce point, est tangente au cercle; et réciproquement la tangente à un point quelconque de la circonférence, est perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené par ce point.*

Démonstration. La ligne AB, *fig.* 57, perpendiculaire sur le rayon AO, au point A, a tous ses autres points plus éloignés du centre O, que ne l'est le point A, puisque toutes les droites menées d'un côté ou de l'autre, comme OB et OC, sont des obliques nécessairement plus longues que AO (28). Les points C et B sont par conséquent hors du cercle, et la ligne AB n'ayant qu'un seul point A de commun avec la circonférence DA, est tangente. Fig. 57.

Il est aussi facile de voir que la tangente au point A ne peut être que la droite AB perpendiculaire sur AO; car cette tangente n'ayant de commun avec la circonférence que le point de *contact* A, et tous ses autres points étant plus éloignés du centre que celui-ci, il s'ensuit que le rayon AO est la plus courte ligne qu'on puisse mener du centre sur la tangente, et que par conséquent il est perpendiculaire sur cette tangente.

[illegible] une tangente [illegible] de la circonférence d'un cercle [illegible] perpendiculaire AB à l'extrémité du rayon mené par ce point.

THÉORÈME.

Fig. 58. 105. *Toute droite* CD, *fig.* 58, *élevée perpendiculairement sur le milieu d'une corde* AB, *passe par le centre* O *du cercle et par le milieu* C *de l'arc soutendu par cette corde.*

Démonstration. Puisque *CD* est, par l'hypothèse, perpendiculaire sur le milieu de *AB*, elle doit passer par tous les points également éloignés des points *A* et *B*; et le centre *O* est un de ces points, car il est à égale distance des extrémités *A* et *B* qui sont sur la circonférence *ACB*. Le point *C*, où la perpendiculaire *CD* rencontre la circonférence, étant également éloigné des extrémités *A* et *B* de l'arc *ACB*, les cordes *AC* et *BC* seront nécessairement égales; les arcs soutendus par ces cordes seront donc égaux (99); le point *C* sera donc le milieu de l'arc *ACB*: donc la droite *CD* passera par le centre *O* et par le milieu de l'arc soutendu par la corde *AB*.

106. 1er *Corollaire.* 1°. Puisque deux points suffisent pour déterminer la position d'une droite (3), et que le milieu d'une corde, le centre du cercle et le milieu de l'arc soutendu par la corde sont toujours sur la même droite, il s'ensuit que lorsqu'on sait qu'une droite donnée passe par deux de ces points, on en doit conclure qu'elle passe nécessairement par le troisième.

2°. Comme on ne peut, d'un point donné, abaisser sur une droite, qu'une seule perpendiculaire (32), il est encore évident, par ce qui précède, que toute perpendiculaire abaissée du centre ou du milieu de l'arc sur la corde, tombera sur le milieu de cette droite.

107. 2e *Corollaire.* Il suit encore du théorème précédent, que, pour diviser un arc en deux parties égales, il suffit d'élever une perpendiculaire sur le milieu de la corde qui soutend cet arc, puisque cette perpendiculaire passera par le milieu de l'arc proposé.

THÉORÈME.

108. *Les arcs interceptés, dans un même cercle, entre deux cordes parallèles, ou entre une tangente et une corde parallèles, sont égaux.*

Démonstration. Si les cordes BC, DE et la tangente FG, *fig.* 59, sont parallèles, et que l'on joigne Fig. 59.
le centre O et le point de contact A par un rayon, ce rayon étant perpendiculaire sur la tangente FG (103), le sera aussi sur les cordes BC et DE (42); il divisera en deux parties égales les arcs BAC et DAE; et par conséquent si des arcs AB et AC, égaux comme moitiés de l'arc BAC, on retranche les arcs AD et AE, égaux comme moitiés de l'arc DAE, les restes BD et EC seront égaux, ce qui est la première partie de l'énoncé du théorème : l'égalité des arcs AB et AC prouve la seconde.

THÉORÈME.

109. *Si des sommets* O *et* O′ *de deux angles* AOC *et* A′O′C′, fig. 60, *on décrit deux arcs de cercle du* Fig. 60.
même rayon, le rapport des arcs compris entre les côtés de chaque angle, sera le même que celui de ces angles.

Démonstration. Si les arcs AC et $A'C'$ ont une commune mesure $AB = A'B'$, en portant cette commune mesure sur chacun, autant de fois qu'elle y est contenue, on les divisera tous deux en parties égales; et si l'on joint les différens points de division avec le sommet de l'angle correspondant, par des droites comme OB et $O'B'$, on partagera les angles AOC et $A'O'C'$ en autant de parties égales que les arcs AC et $A'C'$ en contiennent.

En effet, les cordes AB et $A'B'$ étant égales, les triangles AOB et $A'O'B'$ seront égaux, comme ayant tous leurs côtés égaux chacun à chacun (20), puisque d'ailleurs les droites OA, OB, $O'A'$ et $O'B'$ sont

égales comme rayons de cercles égaux : l'angle AOB sera donc égal à l'angle $A'O'B'$. Cela posé, les angles AOC et $A'O'C'$ comprenant chacun autant d'angles égaux à AOB, que les arcs AC et $A'C'$ contiennent de parties égales à AB, seront évidemment dans le même rapport que ces arcs, et auront pour commune mesure l'angle AOB.

Le raisonnement précédent exige que les arcs AC et $A'C'$ soient commensurables entre eux ; mais la proposition aurait également lieu quand même ils seraient incommensurables; car on ne peut supposer que les angles AOC et $A'O'C'$, *fig.* 61, soient dans un rapport plus grand ou plus petit que celui de ces arcs. Fig. 61

Si, par exemple, au lieu d'avoir cette proportion,

$$AOC : A'O'C' :: AC : A'C',$$

on avait la suivante :

$$AOC : A'O'C' :: AC : A'd,$$

l'arc $A'd$ étant plus grand que $A'C'$, et qu'on divisât l'arc AC en parties égales assez petites pour qu'étant portées sur l'arc $A'C'$, un des points de division e tombât entre C' et d, on aurait entre les angles AOC, $A'O'e$ et les arcs AC et $A'e$, respectivement commensurables, cette proportion ;

$$AOC : A'O'e :: AC : A'e,$$

dont les antécédens sont les mêmes que ceux de la précédente ; ce qui donnerait par conséquent

$$A'O'C' : A'O'e :: A'd : A'e,$$

résultat absurde, puisque $A'O'C' < A'O'e$, et que $A'd > A'e$.

Si l'on prenait l'arc $A'd$ moindre que $A'C'$, on n'aurait pas non plus

$$AOC : A'O'C' :: AC : A'd ;$$

car, pour le point de division e', on aurait

$$AOC : A'O'e' :: AC : A'e';$$

d'où il s'ensuivrait, comme ci-dessus,

$$A'O'C' : A'O'e' :: A'd' : A'e'$$

proportion encore absurde, puisque

$$A'O'C' > A'O'e', \quad A'd' < A'e'.$$

Il est évident que la réciproque de cette proposition n'a pas besoin d'une démonstration particulière, car le rapport des arcs ne peut être égal à celui des angles, sans que ce dernier ne soit égal à celui des arcs (*).

110. 1er *Corollaire.* Le rapport des arcs AC et $A'C'$ étant le même que celui des angles AOC et $A'O'C'$, il en résulte que ces arcs sont la mesure naturelle des angles; et, d'après ces notions, on dit que *la mesure d'un angle est l'arc de cercle compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre.* Cette expression paraît d'abord obscure, car on ne peut mesurer des grandeurs quelconques que par d'autres grandeurs de la même espèce. L'arc de cercle étant une ligne, est hétérogène avec l'angle, qui est une surface (7); mais il faut observer que l'on sous-entend ici l'arc pris pour unité, et l'angle qui correspond à cet arc, et que l'énoncé ci-dessus revient à celui-ci : *Tout angle contient autant de fois un certain angle arbitraire, pris pour*

(*) Je crois devoir faire observer que cette proposition, qu'on se contentait presque d'énoncer dans les Élémens adoptés en France avant 1794, a été démontrée à peu près comme ci-dessus, dès 1760, dans ceux de *Karsten*, et l'était peut-être aussi dans de plus anciens ouvrages. Le moyen d'ailleurs s'offre de lui-même par une forme de raisonnement employée par Euclide, pour un semblable passage du commensurable à l'incommensurable, comme je l'ai dit ailleurs (*Essais sur l'Enseignement*), lorsqu'on se borne aux propositions vraiment nécessaires des Élémens de Géométrie, il ne reste plus qu'à s'occuper de l'arrangement qui les lie le mieux les unes aux autres, les rend plus évidentes et plus faciles à retenir.

unité ou pour terme de comparaison, que l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre, contient l'arc du même cercle, compris entre les côtés de ce second angle, et décrit de son sommet comme centre.

On voit par là que les arcs de cercle ne sont introduits que pour servir de termes de comparaison, et que pour trouver le rapport numérique de deux angles quelconques, il faudra chercher, par le procédé du n° 101, celui de deux arcs décrits de leurs sommets, comme centres, avec un rayon arbitraire, mais le même pour tous deux.

L'angle qui paraît le plus propre à servir d'unité est l'angle droit. Cet angle comprend évidemment, entre ses côtés, le quart de la circonférence; car, si du point
Fig. 62. *O*, comme centre, *fig.* 62, on décrit une circonférence, la droite *AB* en soutendra la moitié (97); les deux angles droits *COB*, *COA* étant égaux, comprendront chacun la moitié de cette moitié (n° précédent), c'est-à-dire le quart de la circonférence entière. On aura donc la mesure d'un angle, en comparant l'arc compris entre ses côtés avec celui qu'intercepte, sur la même circonférence, l'angle droit ayant son sommet au centre.

111. 2° *Corollaire.* Il suit encore du théorème précédent, que les droites qui divisent un arc en plusieurs parties égales, divisent aussi, dans un même nombre de parties égales, l'angle que mesure cet arc; et que par conséquent la division d'un angle se réduit à celle de l'arc qui lui sert de mesure. Malheureusement la Géométrie élémentaire ne fournit que le moyen de diviser un arc en deux parties égales.

Ce moyen consiste (107) à élever une perpendiculaire
Fig. 58. *CO*, *fig.* 58, sur le milieu de la corde *AB*; et cette perpendiculaire divisera aussi l'angle *AOB* en deux parties

égales. On peut d'ailleurs se convaincre *à priori* de l'égalité des angles AOD et BOD, par celle des triangles de même dénomination.

On pourra, par le même moyen, diviser de nouveau chaque moitié de l'arc ACB, ou de l'angle AOB, en deux parties égales, et pousser ainsi la division suivant les nombres 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc.; mais il ne sera pas possible de partager cet arc ou cet angle en 3, 6, etc., parties égales.

THÉORÈME.

112. *Lorsqu'un angle a son sommet placé sur la circonférence d'un cercle, il a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Démonstration. 1°. Je suppose que l'angle proposé soit BAC, dont l'un des côtés AC passe par le centre O du cercle, *fig.* 63. Si, par ce point, on mène le diamètre DE parallèle à AB, on fera l'angle DOC égal à BAC, comme correspondant par rapport à la sécante AC, et ayant pour mesure l'arc DC, compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre. Ainsi l'arc DC serait la mesure de l'angle BAC, si le sommet A de ce dernier était transporté en O; mais l'arc DC est d'abord égal à l'arc AE, puisque celui-ci mesure l'angle AOE, opposé par le sommet à DOC, et qui lui est par conséquent égal; puis les arcs AE et BD étant égaux comme compris entre des cordes parallèles (108), il s'ensuit que l'arc DC est aussi égal à BD: donc l'arc BC, composé de BD et de DC, contient deux fois l'arc DC; donc il est le double de la mesure de l'angle BAC. Fig. 63.

2°. Soit maintenant l'angle BAG, comprenant le centre entre ses côtés. Cet angle étant composé des angles BAC, CAG, aura pour mesure la somme des arcs qui mesurent ces derniers; mais comme ils ont chacun un côté qui passe par le centre, leurs mesures

respectives seront la moitié de BC et la moitié de CG, arcs dont la somme compose la moitié de l'arc BG, égal à $BC + CG$: l'angle BAG aura donc pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.

3°. L'angle FAB, qui ne comprend point le centre entre ses côtés, pouvant être considéré comme la différence des angles FAC, BAC, aura pour mesure la différence des arcs qui mesurent ces derniers; mais comme leur côté commun AC passe par le centre, leurs mesures respectives sont les moitiés de FC et de BC; et la différence de ces mesures composant la moitié de l'arc FB, égal à $FC—BC$, l'angle FAB aura donc pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.

4°. L'angle formé par une tangente et par une corde a aussi pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés; car l'angle CAH, formé par la tangente AH et le diamètre AC qui lui est perpendiculaire, étant droit, a pour mesure la moitié de la demi-circonférence ABC (110); si l'on ajoute à cet angle, l'angle CAG, formé par deux cordes, et ayant pour mesure la moitié de l'arc CG, l'angle total GAH aura pour mesure la moitié de CG, plus celle de ABC, ce qui fait la moitié de l'arc total ABG, compris entre ses côtés; et si l'on retranche du même angle droit CAH, l'angle FAC, mesuré par la moitié de l'arc FC, la différence FAH de ces angles sera mesurée par celle des moitiés de ABC et de FC, ce qui revient à la moitié de AF.

113. 1er *Corollaire*. L'angle FAI, formé par la corde AF et par le prolongement AI de la corde AG, a pour mesure la moitié de la somme des arcs AF et AG soutendus par ces cordes, en dehors de l'angle qu'elles forment.

En effet, l'angle FAI, égal à deux droits moins l'angle FAG (11), aura pour mesure la différence qu'il y a entre la demi-circonférence et la moitié de l'arc FG, qui mesure l'angle FAG; mais cette différence

est égale à la moitié de celle de la circonférence entière et de l'arc *FG* lui-même, ce qui revient évidemment à la moitié de la somme des arcs *AF* et *AG*.

114. 2e *Corollaire.* Il suit encore du théorème précédent, 1°. que tous les angles qui, comme *EGF*, *EHF*, *EIF*, *KEF*, *fig.* 64, ont leur sommet placé à la circonférence, et s'appuient sur le même arc, sont égaux, puisqu'ils ont pour mesure la moitié du même arc *EAF*, compris entre leurs côtés; Fig. 64.

2°. Que l'angle *BAC*, dont le sommet est sur la circonférence, et dont les côtés *AB* et *AC* passent par les extrémités d'un diamètre *BC*, est droit, puisqu'il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence *BGC*, comprise entre ses côtés, ou le quart de la circonférence entière (110).

THÉORÈME.

115. *L'angle* BAC, fig. 65, *dont le sommet est placé dans le cercle, entre le centre et la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc* BC *compris entre ses côtés, plus la moitié de l'arc* ED *compris entre leurs prolongemens.* Fig. 65.

Démonstration. Si, par le point *D*, on mène la corde *DF* parallèle à l'un des côtés *AC* de l'angle proposé, on formera l'angle *BDF* égal à l'angle *BAC*, comme correspondant par rapport à la sécante *BD*, et ayant pour mesure la moitié de l'arc *BCF* compris entre ses côtés, puisque son sommet est placé sur la circonférence (112); mais les arcs *ED* et *FC* étant égaux, comme compris entre des cordes parallèles (108), il s'ensuit que l'arc *BF*, égal à *BC* + *FC*, sera aussi égal à *BC* + *ED*; et puisque sa moitié mesure l'angle *BDF*, et par conséquent son égal *BAC*, ce dernier aura aussi pour mesure la moitié de la somme des arcs *BC* et *ED*, somme équivalente à l'arc *BF*; ce qui est l'énoncé du théorème.

THÉORÈME.

Fig. 66. 116. *L'angle* BAC, fig. 66, *dont le sommet est placé hors du cercle, a pour mesure la moitié de la différence des arcs* BC *et* DE *compris entre ses côtés, arcs dont l'un tourne sa concavité vers le sommet, et l'autre sa convexité.*

Démonstration. En tirant, comme ci-dessus, par le point D, la droite DF parallèle au côté AC, on formera l'angle BDF égal à BAC, comme correspondant par rapport à la sécante BD, et ayant pour mesure la moitié de l'arc BF compris entre ses côtés (112); mais les arcs ED et FC étant égaux, comme compris entre des cordes parallèles (108), il s'ensuit que l'arc BF, égal à $BC - FC$, sera aussi égal à $BC - ED$; et puisque sa moitié mesure l'angle BDF, et par conséquent son égal BAC, ce dernier aura aussi pour mesure la moitié de la différence des arcs BC et ED, différence équivalente à l'arc BF; ce qui est l'énoncé du théorème.

PROBLÈME.

117. *Élever une perpendiculaire à l'extrémité* A *d'une* Fig. 64. *ligne droite* AB, fig. 64, *sans la prolonger comme l'exigerait le procédé du* n° 30.

Solution. On prendra hors de la ligne AB un point quelconque O, duquel, comme centre, et avec un rayon égal à AO, on décrira une circonférence de cercle BAH; par le point B, où elle rencontrera la droite AB, et par le centre O, on tirera le diamètre BOC, qui déterminera sur la circonférence un point C: la droite AC, qui joint ce point et l'extrémité A de la droite AB, sera la perpendiculaire demandée, puisque l'angle BAC sera droit (114).

PROBLÈME.

Fig. 67. 118. *D'un point donné* A, *hors d'un cercle*, fig. 67, *mener une tangente à ce cercle.*

Solution. On joindra avec le point A, le point O, centre du cercle donné, et l'on décrira sur AO, comme diamètre, une circonférence de cercle qui rencontrera le cercle BDB' en deux points, B et B'; les droites BA et $B'A$, qui joindront ces points avec le point donné A, seront tangentes au cercle BDB'.

En effet, si l'on tire dans ce cercle les rayons BO et $B'O$, qui, dans le cercle $BB'A$, seront des cordes, les angles OBA et $OB'A$ seront droits, puisque leur sommet est sur la circonférence de ce dernier, et que leurs côtés passent par les extrémités de l'un de ses diamètres (114) : donc les droites AB et AB' seront tangentes au cercle BDB' (103).

PROBLÈME.

119. *Par trois points* A, B, C, fig. 68, *qui ne sont pas en ligne droite, faire passer une circonférence de cercle.* Fig. 68.

Solution. Si l'on joint les trois points A, B, C, par deux lignes droites AB et BC, ces droites seront des cordes du cercle qui passe par les points proposés. Élevant sur le milieu de AB la perpendiculaire DE, et sur le milieu de BC la perpendiculaire FG, le centre O, qui doit être en même temps sur l'une et sur l'autre de ces perpendiculaires (105), ne pourra se trouver qu'à leur intersection, qui aura nécessairement lieu (47).

120. 1er *Corollaire.* La construction précédente ne donne qu'un seul point pour centre et qu'un seul rayon, puisque les droites AO et OC étant égales à OB, comme obliques qui s'écartent également des perpendiculaires OD et OF, seront égales entre elles : il est donc évident qu'il n'y a qu'un seul cercle qui puisse en effet passer par les trois points A, B, C.

La question devient insoluble lorsque les trois points A, B, C sont sur la même ligne droite, parce que les

perpendiculaires DE et GF sont parallèles (39), et ne se rencontrant plus, n'indiquent plus aucun centre; et en effet, aucun cercle ne peut passer par les points proposés, puisque, s'il en passait un, ce cercle aurait trois points communs avec une droite, ce qui serait contraire à ce qui a été prouvé dans le n° 94.

121. 2e *Corollaire.* Il suit encore, de la même proposition, que deux cercles ne peuvent avoir trois point communs sans se confondre; car si l'on fait sur ces trois points la construction indiquée dans le problème ci-dessus, on trouvera que les cercles proposés doivent avoir le même rayon et leurs centres placés dans le même point.

C'est pour cette raison que deux cercles ne peuvent se rencontrer en plus de deux points.

THÉORÈME.

122. *Deux cercles qui passent par un même point de la droite qui joint leurs centres, n'ont que ce point de commun, dans lequel ils se touchent par conséquent; et réciproquement, si deux cercles se touchent, leurs centres et le point de contact sont en ligne droite.*

Démonstration. 1°. Si les centres O et O' des cercles
Fig. 69 AC et AC', *fig.* 69, sont situés tous deux du même côté du point A commun à ces deux cercles, sur la droite OO', et qu'on prenne un point quelconque M' sur celui des deux qui a le plus grand rayon, en joignant ce point avec les centres O et O', on formera un triangle $O'OM'$, dans lequel on aura toujours

$$OO' + OM' > O'M' \text{ ou } OO' + OM' > O'A;$$

mais puisque $O'A = OO' + OA$, on en conclura

$$OO' + OM' > OO' + OA,$$

et par conséquent $OM' > OA$: le point M' sera donc dans tous les cas hors du cercle AC.

2°. Si les centres sont de différens côtés du point A,

en O et O'', par exemple, le triangle $OM''O''$ donnant $OM'' + O''M'' > OA + O''A$, on en conclura

$$OM'' > OA,$$

puisque $O''M'' = O''A$; et par conséquent le point M'' sera hors du cercle AC.

La proposition inverse, comprise dans l'énoncé, se démontre en observant, 1°. que si les deux cercles AC et AC' n'ont que le point A de commun, et que leurs centres, au lieu d'être sur la droite OA, soient sur toute autre droite $O'M'$, en sorte que le centre du petit cercle se trouve en o, on aura

$$O'o + oA > O'A, \text{ ou } > O'M';$$

retranchant de part et d'autre $O'o$, il restera

$$oA > oM',$$

ce qui est absurde, puisque oA étant supposé rayon du petit cercle AC, est égal à om, nécessairement moindre que oM';

2°. Que si les deux cercles se touchent extérieurement, comme AC et AC'', il est évident que la plus courte ligne que l'on puisse mener du centre de l'un à celui de l'autre, est égale à la somme des rayons, et que cette plus courte ligne passe par le point de contact, puisque si l'on joignait le point M'' à chacun des centres, la somme des droites OM'', $O''M''$ serait plus grande que celle des rayons; mais la plus courte ligne que l'on puisse mener par deux points étant droite, la ligne OAO'' sera donc une droite.

[redacted]. *Remarque.* J'ai déjà indiqué, dans le n° 22, les conditions qui doivent avoir lieu pour que deux cercles se coupent; elles sont vérifiées de nouveau par le théorème précédent; car on voit bien évidemment que les cercles AC et AC' cesseraient de se toucher, et à plus forte raison ne se couperaient pas si la distance des centres, OO', était moindre que la différence des

rayons, et que si la distance OO'' surpassait la somme des rayons des cercles AC et AC'', ceux-ci ne se toucheraient pas non plus.

Puisque les cercles AC, AC', AC'' ont leur centre et leur point de contact A sur la même ligne droite, la perpendiculaire AB, élevée sur cette ligne par le point A, les touche tous à la fois (103).

De plus il est visible que quoiqu'on ne puisse mener aucune droite entre le cercle AC et sa tangente AB, on peut néanmoins y faire passer une infinité de cercles différens (*).

PROBLÈME.

124. *Décrire un cercle qui touche en un point donné* A, Fig. 70. fig. 70, *une droite* AB *donnée de position, et qui passe par un second point donné* C.

Solution. On élèvera sur AB, par le point A, la perpendiculaire AO', puis, joignant les points A et C, on élèvera aussi sur le milieu de AC, la perpendiculaire DO'; le point O', où se rencontrent ces deux perpendiculaires, sera le centre du cercle demandé.

En effet, le centre de ce cercle doit se trouver sur la droite AO' perpendiculaire à la tangente AB, et passant par le point A, où doit avoir lieu le contact du cercle et

(*) C'est là ce qu'il faut entendre dans cette proposition, soutenue par plusieurs géomètres, que l'angle de *contingence* CAB, formé entre le cercle et la tangente, est moindre que tout angle rectiligne, ou formé par deux droites, quelque petit que soit ce dernier. La discussion ouverte à cet égard n'est venue que de ce qu'on ne s'entendait pas sur le sens qu'on attachait dans ce cas au mot *angle*. Ceux qui voulaient y appliquer la notion tirée des lignes droites, voyant dans l'angle de contingence un espace indéfini CAB, compris entre le cercle AC et sa tangente, ne pouvaient, avec raison, le regarder comme moindre que tout angle rectiligne, puisqu'on peut évidemment tirer par le point A une droite qui passe entre les points C et B. Mais toute cette dispute, qui ne roulait que sur les mots, tomba dans l'oubli dès qu'on s'aperçut qu'elle n'intéressait en rien les principes.

de la droite AB (103); il doit être pareillement sur DO', puisque cette ligne est perpendiculaire sur le milieu de la droite AC, qui, joignant deux points A et C du cercle demandé, en est une corde (105) : donc il est au point O', où ces deux perpendiculaires se rencontrent.

PROBLÈME.

125. *Décrire un cercle qui touche en un point donné* A, *un autre cercle donné* AE, *et qui passe par un second point donné* C.

Solution. On joindra, comme dans le problème précédent, les points A et C, et la perpendiculaire DO', élevée sur le milieu de la corde AC, passera par le centre du cercle demandé; on tirera ensuite par le centre O du cercle donné et par le point A, une droite qui devra contenir aussi le centre du cercle demandé (122) : le point O', où cette droite prolongée, s'il est nécessaire, rencontrera la droite DO', sera donc, dans ce cas, le centre du cercle demandé.

La construction ne changerait pas si le point donné C passait en C' dans l'intérieur du cercle donné AE; seulement le cercle demandé serait enveloppé par celui-ci.

PROBLÈME.

126. *Décrire sur une ligne donnée* EF, fig. 64, *un cercle tel, que tous les angles ayant leur sommet à sa circonférence, placés du même côté de cette droite, et s'appuyant sur ses extrémités, soient égaux à un angle donné.* Fig. 64.

Solution. On mènera par le point E la droite KM, faisant avec EF un angle KEF égal à l'angle donné, et dont l'ouverture soit tournée du même côté que celle des angles demandés; il ne s'agira plus que de construire, par le problème du n° 124, un cercle qui passe par le point F, et qui touche en E la droite KM.

Il est évident, par le n° 114, que tous les angles EGF,

EHF, *EIF*; ayant même mesure que l'angle *KEF*, seront égaux à l'angle donné.

N. B. On énonce aussi ce problème comme il suit : *Décrire sur une ligne droite* EF *un* segment (ou une portion) *de cercle* EHFE, capable *d'un angle donné*.

THÉORÈME.

127. *Deux sécantes qui partent d'un même point* E *pris hors d'un cercle*, fig. 71, *étant prolongées jusqu'à la partie de la circonférence la plus éloignée de ce point, sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures; c'est-à-dire que l'on a la proportion* Fig. 71.

$$AE : DE :: CE : BE,$$

dans laquelle une des sécantes et sa partie extérieure forment les moyens, tandis que l'autre sécante et sa partie extérieure forment les extrêmes.

Démonstration. En tirant les cordes *AC* et *DB*, on forme les triangles *AEC* et *BED*, qui sont semblables comme ayant, chacun à chacun, deux angles égaux (65), savoir : l'angle *ACD* et l'angle *ABD*, dont le sommet est à la circonférence, et qui s'appuient sur le même arc *AD* (114), puis, l'angle *AED* qui leur est commun. Comparant leurs côtés homologues, on obtiendra la proportion

$$AE : DE :: CE : BE,$$

qui fait le sujet de la proposition.

128. *Remarque.* Si l'on conçoit que la sécante *EC* tourne autour du point *E* en s'avançant vers *F*, pour se dégager du cercle, les points *C* et *D* se rapprocheront sans cesse, et la différence entre la sécante et sa partie extérieure deviendra de plus en plus petite; la proportion ci-dessus ne cessant point pour cela d'être vraie, il est naturel d'en conclure qu'elle aura encore lieu lorsque cette différence sera nulle, c'est-à-dire lorsque

la ligne *CE* étant devenue la tangente *EF*, la partie extérieure sera devenue égale à la ligne entière. On aura, dans ce cas,

$$AE : EF :: EF : BE,$$

ce qui nous apprend que la tangente *EF* est moyenne proportionnelle entre la sécante *BE* et sa partie extérieure *AE*.

Cette proposition peut aussi se démontrer *à priori*, comme il suit. Ayant tiré les cordes *AF* et *BF*, *fig.* 72, Fig. 72.
on a les triangles *AEF* et *BEF*, dans lesquels l'angle *E* est commun, et les angles *EBF* et *EFA* sont égaux, comme ayant leur sommet sur la circonférence et s'appuyant sur le même arc *AF*; la comparaison de leurs côtés homologues donnera

$$AE : EF :: EF : BE.$$

THÉORÈME.

129. *Deux cordes* AB *et* CD, fig. 73, *qui se rencon-* Fig. 73.
trent dans un cercle, se coupent en parties réciproquement proportionnelles; c'est-à-dire que l'on a

$$AE : DE :: CE : BE,$$

proportion dans laquelle les parties d'une corde forment les extrêmes, tandis que celles de l'autre forment les moyens.

Démonstration. En tirant les cordes *AC* et *DB*, on forme les triangles *AEC* et *BED*, qui sont semblables comme ayant deux angles égaux chacun à chacun (65), savoir : l'angle *ACD* et l'angle *ABD*, dont le sommet est placé à la circonférence, et qui s'appuient sur le même arc *AD* (114), puis l'angle *AEC* et l'angle *BED*, opposés par le sommet. Comparant leurs côtés homologues, on aura la proportion

$$AE : DE :: CE : BE,$$

qui fait le sujet de la proposition.

N. B. Il est facile de reconnaître que ce théorème et celui du n° 127 ne sont que deux cas particuliers d'une même proposition que l'on peut énoncer ainsi :

Lorsque deux droites qui se coupent, rencontrent en même temps une circonférence de cercle, chacune en deux points, les distances de leur point d'intersection, à chacun de ceux où elles rencontrent cette circonférence, sont réciproquement proportionnelles.

130. *Corollaire.* Si la corde AB passait par le centre, ou devenait un diamètre, et que la corde CD lui fût perpendiculaire, *fig.* 74, cette dernière serait coupée en deux parties égales (106), et la proportion

Fig. 74.

$$AE : DE :: CE : BE$$

deviendrait

$$AE : CE :: CE : BE,$$

puisque $DE = CE$: la droite CE serait donc moyenne proportionnelle entre les parties AE et BE du diamètre AB.

Il suit de là que pour trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites données M et N, il faut les porter à la suite l'une de l'autre, de A en E, et de E en B, puis décrire sur leur somme AB, comme diamètre, un cercle, et élever au point E, où elles se joignent, la perpendiculaire EC, qui sera la moyenne proportionnelle demandée.

131. *Remarque.* La proposition qui fait le sujet du corollaire précédent résulte immédiatement de la propriété du triangle rectangle démontrée dans le n° 74; car si l'on mène les cordes AC et CB, l'angle ACB étant droit (114), on aura, par le numéro cité,

$$AE : CE :: CE : BE.$$

Le même numéro donne encore cette proportion :

$$AE : AC :: AC : AB.$$

de laquelle il résulte que la corde menée par l'extrémité d'un diamètre, est moyenne proportionnelle entre le diamètre et le segment formé par la perpendiculaire abaissée de l'autre extrémité de cette corde.

Par là on peut aussi trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites données, en prenant la plus grande pour le diamètre AB, portant la seconde de A en E, élevant la perpendiculaire EC, et tirant la corde AC, qui sera, d'après ce qui précède, la moyenne proportionnelle demandée.

PROBLÈME.

132. *Partager une ligne* AB, fig. 75, *en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire de manière qu'on ait la proportion* Fig. 75.

$$AC : BC :: BC : AB,$$

dans laquelle BC, *la plus grande des deux parties de la ligne* AB, *est moyenne proportionnelle entre cette ligne et l'autre partie* AC.

Solution. Il faut élever à l'une des extrémités de la droite AB, la perpendiculaire AE, égale à la moitié de cette droite, tirer BE, du point E, comme centre, avec le rayon AE, décrire un cercle ADF, et du point B, comme centre, avec un rayon égal à BD, décrire l'arc DC: cet arc, coupant la ligne AB au point C, la partagera en moyenne et extrême raison.

Pour le prouver, on prolongera BE jusqu'en F, et l'on aura, par le n° 128,

$$BD : AB :: AB : BF;$$

d'où l'on tire

$$AB - BD : BF - AB :: BD : AB;$$

mais $AB - BD = AB - BC = AC$;

et puisque, par construction, AE est la moitié de AB, il s'ensuit que

$$AB = 2AE = FD,$$

d'où

$$BF - AB = BF - FD = BD = BC,$$

et par conséquent

$$AC : BC :: BC : AB,$$

proportion conforme à l'énoncé du problème.

PROBLÈME.

133. *Décrire un cercle qui passe par deux points* Fig. 76. *donnés* C *et* D, fig. 76, *et qui touche une ligne droite indéfinie* AB, *donnée de position.*

Solution. On joindra les points D et C par une droite que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre AB, en A; on prendra ensuite une moyenne proportionnelle entre AC et AD, par le procédé indiqué n° 131, et AE étant cette moyenne proportionnelle, on la rapportera sur AB, en décrivant du point A, comme centre, avec un rayon égal à AE, l'arc EF; le point F sera celui où doit se faire le contact de la droite AB et du cercle demandé : on pourra donc décrire ce cercle suivant le procédé du n° 119, ou par celui du n° 124.

Cette solution se prouve en observant que la ligne AC est une sécante, et que la question se réduit à trouver sur AB, la position du point de contact, pour lequel on doit avoir, d'après le n° 128,

$$AD : AF :: AF : AC,$$

d'où il suit que la distance AF s'obtiendra en prenant une moyenne proportionnelle entre AD et AC (*).

(*) Le problème du n° précédent et celui-ci sont susceptibles de deux solutions. Dans le premier, non-seulement la ligne BD, *fig.* 75, remplit les conditions de l'énoncé, mais encore la ligne BF, en tant que AB est moyenne proportionnelle entre BF et BD. (Voyez l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie.*)

Dans le problème ci-dessus, on peut porter la ligne AE, *fig.* 76,

THÉORÈME.

134. *Lorsque des cordes* AC, AF, fig. 74, *partent de* Fig. 74.
la même extrémité d'un diamètre AB, *les secondes puissances de leurs longueurs sont proportionnelles aux segmens* AE *et* AG *compris sur ce diamètre, entre l'extrémité commune à toutes ces cordes et le pied de la perpendiculaire abaissée de l'autre extrémité.*

Démonstration. Puisque les cordes AC et AF sont respectivement moyennes proportionnelles entre le diamètre AB et chacun des segmens AE et AG (131), on aura

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \times \overline{AE}, \quad \overline{AF}^2 = \overline{AB} \times \overline{AG},$$

d'où l'on conclura

$$\overline{AC}^2 : \overline{AF}^2 :: \overline{AB} \times \overline{AE} : \overline{AB} \times \overline{AG},$$

ce qui se réduit à

$$\overline{AC}^2 : \overline{AF}^2 :: AE : AG,$$

en omettant le facteur AB, commun aux deux termes du second rapport.

DES POLYGONES INSCRITS ET CIRCONSCRITS AU CERCLE.

135. *Remarque.* Il est évident que puisqu'on peut toujours faire passer un cercle par trois points donnés (119), on pourra aussi faire passer un cercle par les

---

non-seulement de A en F, mais du côté opposé, en F'; on aura un second cercle qui touchera la droite AB en F', et qui passera par les points D et C.

Si la ligne DC devenait parallèle à AB, la construction indiquée ne ferait plus connaître le point F; mais il est visible que, dans ce cas, la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde DC, et qui passe par le centre du cercle demandé, devenant perpendiculaire à la tangente AB, déterminerait le point de contact F (103).

sommets des angles d'un triangle quelconque ABC,
Fig. 77. *fig.* 77. Dans ce cas, le triangle ABC est *inscrit* cercle, et le cercle est *circonscrit* au triangle.

Cette propriété du triangle met en évidence celles qui ont été démontrées dans les nos 36, 37 et 51. 1°. On voit que la somme des trois angles du triangle est égale à deux droits ; car chacun d'eux a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, et la réunion de ces trois moitiés, composant la demi-circonférence, est la mesure de deux angles droits (110).

2°. L'égalité de deux angles, A et B, entraîne celle des arcs opposés, CB et AC, respectivement doubles de ceux qui mesurent ces angles (112) : les cordes des arcs CB et AC, qui ne sont autre chose que les côtés opposés aux angles A et B, seront donc égales (99). La réciproque de cette proposition se prouverait aussi facilement.

2°. Enfin, le plus grand arc, lorsqu'il est moindre qu'une demi-circonférence, étant toujours soutendu par la plus grande corde, il s'ensuit évidemment qu'au plus grand des angles du triangle est opposé le plus grand de ses côtés.

PROBLEME.

136. *Inscrire un cercle dans un triangle donné* ABC,
Fig. 78. fig. 78, *c'est-à-dire, décrire dans l'intérieur de ce triangle, un cercle qui ne fasse qu'en toucher les trois côtés.*

Solution. On divisera en deux parties égales deux quelconques des angles de ce triangle (111), [illegible] B, par exemple; le point de rencontre O, des droites AO et BO qui feront cette division, sera le centre du cercle demandé.

En effet, si l'on abaisse du point O, une perpendiculaire sur chacun des côtés AB, AC, BC, les triangles AEO, ADO, seront égaux (34), ainsi que les triangles DOB

et BOF, parce que les deux premiers étant rectangles, l'un en D, l'autre en E, auront de plus les angles EAO, DAO égaux comme moitiés du même angle DAE, et le côté AO commun ; il en sera de même des deux derniers qui sont rectangles, l'un en D, l'autre en F, dans lesquels les angles DBO, FBO sont égaux comme moitiés d'un même angle DBC, et le côté BO est commun ; les deux perpendiculaires EO et FO sont donc égales à DO, et par conséquent le cercle décrit du point O comme centre, avec un rayon égal à DO, ne fera que toucher chacun des côtés du triangle ABC.

* Comme on n'a fait usage que des angles A et B, il faut encore prouver qu'en combinant, avec l'un de ceux-ci, l'angle C, on trouverait toujours le même point O. Pour cela, on joint le point O et le troisième angle C, par la droite OC; l'égalité des triangles CEO, CFO, rectangles, l'un en E, l'autre en F, ayant les côtés EO et FO égaux entre eux, et le côté CO commun (34), prouve que la droite CO divise aussi l'angle C en deux parties égales.

137. *Remarque.* Puisque par trois points on ne peut faire passer qu'une circonférence de cercle, il est évident que si l'on prenait au hasard un quatrième point D, *fig.* 77, ce point pourrait tomber hors du cercle ABC; et alors il serait impossible d'inscrire dans un cercle le quadrilatère $ACDB$; à plus forte raison doit-il y avoir des exceptions pour les polygones dont le nombre des côtés surpasse 4 (*). Fig. 77.

THÉORÈME.

138. *Tout polygone d'un nombre quelconque de côtés, lorsqu'il est régulier, c'est-à-dire lorsqu'il a tous ses*

(*) Il est visible, par la seule inspection de la figure, que tous les quadrilatères, tels que $ACEB$, dans lesquels la somme des angles opposés, E et A, est égale à deux droits (112), peuvent être inscrits au cercle ; tandis que dans $ACDB$, cette somme surpasse deux droits pour les angles C et B, et se trouve moindre pour A et D (116).

angles égaux et tous ses côtés égaux, peut être inscrit et circonscrit au cercle.

Fig. 79. *Démonstration.* Soit le polygone *ABCDEF, fig.* 79, dont on suppose tous les angles *ABC, BCD, CDE*, etc. égaux entre eux, ainsi que tous les côtés *AB, BC, CD*, etc. 1°. Le cercle qui passera par les sommets *A, B, C* de trois quelconques des angles de ce polygone, passera par tous les autres; car si l'on mène, du centre *O* du cercle *ABC*, les droites *AO, BO, CO, DO*, etc., les trois premières seront, par construction, rayons de ce cercle, et par conséquent égales: les triangles isoscèles *AOB* et *BOC* seront aussi égaux, comme ayant leurs côtés égaux chacun à chacun; puisque, par hypothèse, $BC = AB$; les angles *ABO* et *CBO* étant égaux, chacun d'eux sera la moitié de l'angle *ABC* du polygone: l'angle *BCO*, qui leur est égal, sera donc aussi la moitié de l'angle *BCD* égal à *ABC*, par hypothèse; *OCD* sera l'autre moitié, et sera par conséquent égal à *BCO*. Cela posé, *CD* étant, par l'hypothèse, égal à *CB*, les triangles *BCO* et *OCD* auront, chacun à chacun, un angle égal compris entre deux côtés égaux, seront égaux (16), et donneront $OD = OC$; ainsi le point *D* sera sur la circonférence du cercle *ABC*. On démontrerait de la même manière que le point *E* et tous ceux qui le suivent, s'y trouvent aussi.

2°. Si l'on abaisse du point *O*, centre du cercle circonscrit et aussi du polygone inscrit *ABCDEF*, une perpendiculaire *OG* sur l'un quelconque *AB* des côtés de ce polygone, le cercle *GH* décrit du point *O* comme centre avec le rayon *OG*, et touchant, en vertu de sa construction, le côté *AB* au point *G*, touchera aussi chacun des autres dans leur milieu; car si du point *O* on abaisse sur le côté *BC*, consécutif à *AB*, la perpendiculaire *OH*, les triangles *OBG* et *OBH*, rectangles l'un en *G*, l'autre en *H*, ayant de plus l'angle *G*

égal à *OBH*, et l'hypoténuse *OB* commune, seront égaux (34) ; ils donneront par conséquent $OG = OH$: le cercle *GH* touchera donc *BC* en *H*, point qui est le milieu de *BC*, puisque les obliques *OB* et *OC* sont égales. Le même raisonnement fera voir que ce cercle touche pareillement chacun des autres côtés.

139. *Remarque.* Les angles *AOB*, *BOC*, *COD*, etc., formés par les rayons menés du centre *O* du polygone à chacun de ses angles, se nomment *angles au centre*, pour les distinguer des *angles à la circonférence*, *ABC*, *BCD*, *CDE*, etc. Tous les angles au centre d'un même polygone régulier sont égaux, et leur somme étant équivalente à quatre droits (13), chacun d'eux est égal à cette somme, divisée par le nombre des angles ou des côtés du polygone proposé.

THÉORÈME.

140. *Les polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables, et leurs contours sont entre eux comme les rayons des cercles auxquels ils sont inscrits ou circonscrits.*

Démonstration. 1°. Ces polygones ont leurs angles égaux chacun à chacun ; les côtés du premier étant égaux entre eux et ceux du second étant aussi égaux entre eux, les uns et les autres sont tous dans le même rapport, et par conséquent proportionnels entre eux : les polygones sont donc semblables (87).

2°. Les angles *AOB* et *aob* étant égaux, et les triangles *AOB* et *aob* étant d'ailleurs isoscèles, seront semblables (66) ; ils donneront

$$AB : ab :: AO : ao;$$

et les contours des polygones *ABCDEF*, *abcdef*, étant entre eux comme leurs côtés homologues *AB* et *ab* (93), seront donc, d'après cette proportion, dans le rapport

des rayons AO et ao, des cercles dans lesquels ces polygones sont inscrits.

La similitude des triangles AGO et ago, rectangles l'un en G et l'autre en g, est évidente à cause de l'égalité des angles BAO et bao, et donne

$$AO : ao :: OG : og,$$

d'où l'on conclut

$$AB : ab :: OG : og.$$

Il en résulte par conséquent que les contours des deux polygones proposés, étant proportionnels à leurs côtés homologues AB et ab, le seront aussi aux rayons OG et og des cercles auxquels ils sont circonscrits.

PROBLÈME.

141. *Un polygone d'un nombre quelconque de côtés étant inscrit au cercle, inscrire dans le même cercle un second polygone d'un nombre de côtés double de celui des côtés du premier, et trouver la valeur de l'un des côtés du second.*

Fig. 80. *Solution.* Soit AB, *fig.* 80, l'un des côtés du premier polygone, et AOB l'angle au centre de ce polygone; on divisera cet angle, ou l'arc $AB'B$ qui le mesure, en deux parties égales (111), au point B'; et les droites AB' et $B'B$, égales entre elles, seront évidemment deux côtés contigus du nouveau polygone.

Pour trouver la valeur de AB', il faut prolonger le rayon $B'O$ jusqu'en D; on aura alors (131)

$$\overline{AB'}^2 = \overline{B'D} \times \overline{B'E};$$

mais comme $B'E = B'O - EO$, que dans le triangle AEO, rectangle en E, le côté

$$EO = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AE}^2},$$

et que $AE = \frac{1}{2} AB$, $B'O = AO$, $B'D = 2AO$, on en conclura

$$B'E = AO - \sqrt{\overline{AO}^2 - (\tfrac{1}{2}AB)^2},$$

$$\overline{AB'}^2 = 2AO\left\{AO - \sqrt{\overline{AO}^2 - (\tfrac{1}{2}AB)^2}\right\}$$

Si l'on prend pour mesure commune, ou pour unité, le rayon AO du cercle dans lequel sont inscrits les polygones proposés, on aura $AO = 1$; et il viendra

$$\overline{AB'}^2 = 2\left\{1 - \sqrt{1 - (\tfrac{1}{2}AB)^2}\right\}.$$

Si l'on partageait au point B'', l'arc AB' en deux parties égales, on aurait de même

$$\overline{AB''}^2 = 2\left\{1 - \sqrt{1 - (\tfrac{1}{2}AB')^2}\right\},$$

pour le côté du polygone qui en contient le double de celui qui le précède, et ainsi de suite.

142. Le plus simple des polygones réguliers, après le triangle équilatéral, est le quadrilatère dont les angles et les côtés sont égaux. Ce polygone se nomme *quarré*.

La somme des quatre angles intérieurs de ce polygone valant, d'après le n° 82, quatre angles droits, et tous étant égaux, chacun d'eux sera droit; ainsi le quarré $ABCD$, *fig.* 81, a ses quatre côtés AB, BC, CD, AD égaux, et ses quatre angles A, B, C, D droits. Fig. 81.

143. *Remarques.* Le quarré est évidemment un parallélogramme (79) qui a ses quatre angles égaux, et ses quatre côtés égaux; il ne faut pas le confondre avec le parallélogramme qui n'a que ses côtés égaux, et dont les angles sont inégaux: ce dernier, dont la figure 82 représente un cas, se nomme *rhombe* ou *losange*. Fig. 82.

Quand les côtés contigus sont inégaux, mais que les angles demeurent droits, le parallélogramme étant rectangle, se nomme simplement *rectangle*; $ABCD$, *fig.* 83, est un rectangle. Fig. 83.

Il est visible que tout rectangle peut s'inscrire dans un cercle; car les diagonales AC et BD, étant égales dans ce cas, se couperont en un point O également éloigné des points A, B, C, D, puisqu'en général $AO = OC$, $DO = OB$ (80); et par conséquent ces points se trouveront sur la circonférence du cercle décrit du point O comme centre, avec un rayon égal à AO.

PROBLÈME.

144. *Construire un quarré sur une ligne donnée* AB, fig. 81.

Fig. 81.

Solution. Il faut élever sur les extrémités A et B de cette droite, deux perpendiculaires AD et BC, que l'on fera égales à AB; joignant leurs extrémités C et D par une droite, on aura le quarré demandé $ABCD$.

En effet, les côtés AD et BC étant parellèles et égaux, il en sera de même des côtés DC et AB (54): les angles ADC et BAD, internes d'un même côté, valant ensemble deux droits (47), et le second étant lui-même droit par construction, le premier sera droit aussi; on prouvera la même chose pour BCD, en le comparant avec ABC.

PROBLÈME.

145. *Inscrire dans un cercle les polygones de* 4, 8, 16, 32, 64, *etc. côtés.*

Solution. La question se réduit à inscrire d'abord celui de quatre côtés, puisque les autres se formeront par son moyen, d'après le n° 141.

Fig. 84. Pour inscrire dans le cercle $ABCD$, *fig.* 84, un quarré, il faut, perpendiculairement à un diamètre quelconque AC, en élever un autre BD, ce qui déterminera sur la circonférence quatre points, A, B, C, D, lesquels, étant joints par des droites, formeront le quarré demandé.

En effet, les angles ABC, BCD, etc. sont tous

droits (114), et les côtés AB, BC, CD, AD sont égaux, comme étant les hypoténuses des triangles rectangles AOB, BOC, COD, DOA, visiblement égaux entre eux (16).

Le triangle rectangle AOB donnant

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 = 2\overline{AO}^2,$$

puisque $AO = BO$, on en conclura

$$AB = AO\sqrt{2};$$

et en prenant le rayon AO pour unité, il viendra seulement

$$AB = \sqrt{2}\ (*).$$

Si l'on substitue cette valeur dans celle de AB', n° 141, puis cette dernière dans celle de AB'', et ainsi de suite, on aura successivement la longueur des côtés des polygones de 8, 16, etc. côtés, rapportée à celle du rayon du cercle.

PROBLÈME.

146. *Inscrire dans un cercle les polygones de* 3, 6, 12, 24, 48, *etc. côtés.*

Solution. Le côté de l'hexagone régulier s'offre le premier ; il est égal au rayon du cercle circonscrit. En effet, dans ce polygone, l'angle au centre AOB, *fig.* 85, étant la sixième partie de quatre droits, est égal à $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$ d'un seul ; retranchant cette quantité de deux droits, il reste $2 - \frac{2}{3}$ ou les $\frac{4}{3}$ d'un droit pour les deux autres

Fig. 85.

(*) Le procédé pour obtenir AB étant rigoureux, il s'ensuit que la Géométrie donne exactement la grandeur de l'incommensurable $\sqrt{2}$, que l'on ne peut obtenir que par approximation, avec le secours des nombres ; mais il faut observer qu'alors le nombre cherché n'est que l'expression du rapport de AB avec AO ; et s'il était possible d'effectuer avec une exactitude rigoureuse, sur ces lignes, l'opération indiquée dans le n° 5, elle ne finirait jamais ; car aucune droite, quelque petite qu'elle soit, ne peut les mesurer en même temps l'une et l'autre. (*Voyez* l'ADDITION *à cette note*, p. 215.)

angles BAO, ABO, égaux d'ailleurs entre eux, ce qui fait encore $\frac{2}{3}$ d'angle droit pour chacun : le triangle ABO ayant ses trois angles égaux, sera nécessairement équilatéral (37), et donnera par conséquent $AB = AO$.

On inscrira donc un hexagone dans un cercle, en portant le rayon du cercle six fois sur sa circonférence, et en joignant par des droites, les points de division consécutifs. En prenant $AO = 1$, on aura $AB = 1$, et on s'élèvera, par le moyen de cette valeur et des formules du n° 141, aux valeurs des côtés des polygones inscrits, de 12, 24, 48, etc. côtés.

Pour parvenir à la valeur du côté du triangle équilatéral inscrit ACE, il suffit d'observer que ce triangle se forme en joignant par des droites les angles de l'hexagone, pris de deux en deux, et que le triangle ACD, rectangle en C (114), donne

$$AC = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{(2AO)^2 - \overline{AO}^2} = AO\sqrt{3};$$

et en faisant $AO = 1$, il viendra $AC = \sqrt{3}$.

PROBLÈME.

147. *Inscrire dans un cercle les polygones de* 5, 10, 20, 40, *etc. côtés.*

Solution. On trouve premièrement le côté du polygone qui en a dix, ou du décagone, en prenant le plus grand des deux segmens du rayon partagé en moyenne et extrême raison (132).

En effet, dans ce polygone, l'angle au centre, AOB, Fig. 86. fig. 86, est la dixième partie de quatre droits, ou les $\frac{2}{5}$ d'un seul ; il reste, pour les angles ABO et BAO, $2 - \frac{2}{5}$ d'angle droit, ou $\frac{8}{5}$, ce qui donne $\frac{4}{5}$ pour chacun : l'angle BAO est donc double de l'angle AOB. Si l'on mène AG, qui fasse avec AB, l'angle BAG égal à AOB, les deux triangles ABG et ABO, ayant encore un angle commun B, seront semblables (65), et donneront

$$BG : AB :: AG : AO,$$

or, le triangle ABO étant isoscèle, le triangle ABG le sera pareillement : on aura donc

$$AG = AB.$$

De plus, l'angle BAG, étant égal à AOB, sera la moitié de BAO ; l'autre moitié GAO sera par conséquent égale à AOB, ce qui donnera (37)

$$GO = AG = AB ;$$

et la proportion précédente, devenant alors

$$BG : GO :: GO : BO,$$

montre que le rayon BO est en effet partagé, au point G, en moyenne et extrême raison, et que AB est égal au plus grand des deux segmens.

Si l'on joint par des droites les angles du décagone, pris de deux en deux, on aura le pentagone. Je ne m'arrêterai pas à calculer le côté du décagone, parce que cette recherche est plus curieuse qu'utile.

148. *Remarque.* On a dû s'apercevoir facilement que l'inscription des polygones dans le cercle, revenait à la division de la circonférence en un certain nombre de parties égales. Les procédés indiqués pour inscrire les polygones de 4, 8, 16, 32, etc. côtés, ceux de 3, 6, 12, 24, etc., ceux de 5, 10, 20, 40, etc., serviront à diviser la circonférence d'un cercle, suivant les nombres de ces diverses progressions.

Il est à propos de remarquer que l'on peut aussi la diviser suivant la progression 15, 30, 60, etc., parce que le polygone de six côtés donnant la sixième partie de la circonférence, et celui de dix en donnant la dixième partie, la différence des arcs soutendus par les côtés de ces polygones, sera égale à $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$ de la circonférence, ce qui revient à $\frac{1}{15}$. En portant donc de A en H, le rayon du cercle, l'arc BH sera cette 15e partie, et sa corde sera le côté du polygone de 15 côtés,

ou du *pentédécagone*. Au moyen de la division continuelle des arcs en deux parties égales, ou de leur *bissection*, on obtiendra les polygones de 30, 60, etc. côtés (*).

PROBLÈME.

149. *Un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés étant inscrit dans un cercle, circonscrire à ce cercle un polygone régulier du même nombre de côtés; et réciproquement, le polygone circonscrit étant donné, construire le polygone inscrit.*

Fig. 87. *Solution.* Soit *abcde*, *fig.* 87, le polygone proposé; on tirera les rayons *Oa*, *Ob*, *Oc*, etc., à l'extrémité desquels on élèvera les perpendiculaires *AE*, *BA*, *CB*, etc.: l'ensemble de ces perpendiculaires, qui toucheront la circonférence du cercle *abcde*, sera le polygone demandé.

En effet, les triangles *aAb*, *bBc*, *cCd*, etc. sont tous égaux et isoscèles, parce que les côtés *ab*, *bc*, *cd*, etc. sont égaux, et que les angles *Aab*, *Aba*, *Bbc*, *Bcb*, *Ccd*, *Cdc*, etc., formés sur ces côtés, comprenant des arcs égaux, *ab*, *bc*, *cd*, etc., sont aussi égaux (114): on aura donc

$$1^{\circ}.\ aAb = bBc = cCd = \text{etc.},$$

$$2^{\circ}.\ aA = Ab = bB = Bc = cC = Cd = \text{etc.},$$

d'où l'on conclura

$$AB = 2Ab,\ BC = 2Bc,\ CD = 2Cd = \text{etc.}$$

(*) Ces divisions de la circonférence du cercle ne sont plus les seules que l'on puisse effectuer géométriquement. M. F. Gauss, dans un ouvrage intitulé *Disquisitiones arithmeticæ* (publié en 1801 à Leipsig, et traduit en français par M. Delisle), trouve que l'on peut opérer de même la division en $2^n + 1$ parties, lorsque ce nombre est premier (*voyez* aussi le *Complément des Élémens d'Algèbre*). De là résulte d'abord la division en 17 parties, dont il y a aussi une démonstration particulière, mais qui n'est pas de nature à trouver place ici

et par conséquent

$$AB = BC = CD = \text{etc.}$$

Le polygone $ABCDE$ ayant donc ses angles égaux ainsi que ses côtés, sera tel qu'on le demande.

On déduira le polygone inscrit du polygone circonscrit, en joignant les points a, b, c, d, etc., qui sont les milieux des côtés de ce dernier, et dans lesquels il touche la circonférence.

Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que les triangles aAb, bBc, cCd, etc. sont maintenant égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, puisque les angles A, B, C, etc. sont ceux d'un polygone régulier, et que aA, Ab, bB, etc. sont les moitiés des côtés AE, AB, BC, etc., égaux entre eux. Il résulte de là que les côtés ab, bc, cd, etc. sont égaux, que les arcs qu'ils soutendent le sont aussi, et que par conséquent les angles abc, bcd, etc., dont le sommet est à la circonférence, et qui comprennent entre leurs côtés un même nombre de ces arcs, sont égaux entre eux (114). Le polygone $abcde$ ayant ses angles et ses côtés égaux, est donc le polygone inscrit demandé.

On pourrait aussi former le polygone inscrit $a'b'c'd'e'$, qui ne diffère de $abcde$ que par sa position, en tirant les droites AO, BO, CO, etc., des angles du polygone circonscrit $ABCDE$ au centre du cercle inscrit, et joignant les points a', b', c', etc., où ces lignes rencontrent la circonférence de ce même cercle. En effet, puisque $AO = BO$, $a'O = b'O$, on aura

$$AO : a'O :: BO : b'O ;$$

par conséquent la droite $a'b'$ sera parallèle à AB (60), et les triangles AOB, $a'Ob'$ seront semblables ; il en sera de même de BOC et de $b'Oc'$, et ainsi de suite : les côtés $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, etc., étant homologues à AB, BC, CD, etc., seront donc nécessairement égaux entre

eux ; et l'on prouvera, comme ci-dessus, qu'ils comprennent des angles égaux.

150. *Corollaire.* On peut trouver, d'après ce qui précède, la valeur du côté AB du polygone circonscrit. En effet, les droites Aa et Ab étant égales (149), ainsi que Oa et Ob, la ligne AO est perpendiculaire sur le milieu de ab (29), et les triangles OGa et OAa sont semblables, comme ayant chacun un angle droit, l'un en G, l'autre en a, et un angle commun en O. On tire de là

$$OG : Oa :: aG : aA,$$

ou

$$OG : Oa :: \tfrac{1}{2}ab : \tfrac{1}{2}AE,$$

d'où il résulte

$$AE \text{ ou } AB = \frac{\overline{ab} \times \overline{Oa}}{\sqrt{\overline{Oa}^2 - (\tfrac{1}{2}ab)^2}},$$

en observant que le triangle rectangle OGa donne

$$OG = \sqrt{\overline{Oa}^2 - \overline{aG}^2} = \sqrt{\overline{Oa}^2 - (\tfrac{1}{2}ab)^2}.$$

151. *Remarque.* Il est important d'observer qu'à mesure qu'on multiplie les côtés du polygone inscrit, son contour augmente, tandis que celui du polygone circonscrit diminue dans la même circonstance. En effet, si du milieu de l'arc $aa'b$, *fig.* 88, on tire les cordes aa' et $a'b$, on aura deux côtés consécutifs du polygone inscrit, d'un nombre de côtés double de celui des côtés du polygone auquel appartient ab. Tirant ensuite $A'B'$ perpendiculairement à $a'O$, les droites aA', $A'a'$, $a'B'$, $B'b$ seront des demi-côtés du polygone circonscrit correspondant à celui dont aa' fait partie (149). Maintenant il est visible que les portions aAb, $aA'B'b$, ab, $aa'b$ seront contenues dans les polygones dont elles font partie, autant de fois que l'arc $aa'b$ l'est dans la circonférence entière, et seront par conséquent des parties semblables de chaque poly-

Fig. 88.

gone ; et puisque

$$aa' + a'b > ab,$$

le contour du second polygone inscrit surpassera celui du premier. Ensuite, de ce que

$$A'B' < AA' + AB',$$

il résulte

$$aA'B'b < aA + bA \quad (15)$$

et que par conséquent le contour du second polygone circonscrit est moindre que celui du premier.

Cela posé, puisque le polygone inscrit, toujours moindre que le polygone circonscrit correspondant, augmente de contour quand on multiplie ses côtés, tandis que celui-ci diminue, il en résulte que la différence entre les deux polygones décroît aussi dans la même circonstance. On peut même, quelque petite que soit la quantité donnée δ, trouver deux polygones, l'un inscrit, l'autre circonscrit, tels que la différence de leurs contours soit moindre que cette grandeur. Pour s'en convaincre, il faut se rappeler que les contours de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, sont entre eux comme les rayons des cercles auxquels ils sont circonscrits (140); car si l'on désigne par P le contour du polygone $ABCDE$, *fig.* 87, et par p celui du polygone $abcde$, on aura Fig. 87.

$$P : p :: Oa : OG;$$

d'où l'on conclura

$$P - p : P :: Oa - OG : Oa, \text{ et } P - p = \frac{a'G \times P}{Oa}.$$

Mais rien ne s'oppose à ce que l'on rende $a'G$ plus petit que telle grandeur donnée qu'on voudra; car, ayant porté sur le rayon Oa' une partie $a'G$ de la petitesse demandée, et tiré la corde ab, si l'arc $aa'b$ n'est pas aliquote de la circonférence, il n'y aura qu'à prendre

une partie aliquote moindre que cet arc, et la ligne analogue à $a'G$ sera encore plus petite.

On peut donc, en multipliant autant qu'il sera nécessaire les côtés du polygone inscrit, rendre la quantité $P - p$ aussi petite qu'on voudra.

152. *Corollaire.* Puisque, d'après ce qui précède, les contours des polygones circonscrits diminuent sans cesse à mesure qu'ils approchent de la circonférence du cercle, tandis que ceux des polygones inscrits augmentent toujours dans la même circonstance, il est visible que la circonférence du cercle est moindre que le contour du polygone circonscrit, et plus grande que celui du polygone inscrit. Cette circonférence différera donc moins de l'un quelconque de ces contours, qu'ils ne diffèrent entre eux; et l'on pourra par conséquent trouver un polygone, soit inscrit, soit circonscrit, tel que la différence entre son contour et la circonférence du cercle soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite qu'elle soit.

C'est sur cette propriété que repose le procédé qu'Archimède employa pour parvenir à déterminer, d'une manière approchée, le rapport de la circonférence au diamètre; et j'en ferai un usage semblable, lorsque j'aurai montré que ce rapport est le même dans tous les cercles : pour cela j'établirai un théorème qui pourra s'appliquer à toutes les propositions du genre de celles que j'ai à démontrer.

THÉORÈME.

153. *Si deux grandeurs invariables* A *et* B *sont telles qu'on puisse prouver que leur différence* $A - B$ *est moindre qu'une troisième grandeur* δ, *quelque petite que puisse être cette dernière, ces deux grandeurs sont égales entre elles.*

Démonstration. En effet, si elles étaient inégales, on

aurait nécessairement $A - B = D$, D marquant leur différence : il ne serait donc pas possible de prendre δ au-dessous de D, et par conséquent aussi petit qu'on voudrait.

Observation. Il faut bien faire attention, dans la proposition ci-dessus, au mot *invariable* ; car on peut bien trouver, par exemple, une expression de $\sqrt{2}$ qui diffère de la vraie, d'une quantité moindre que telle autre qu'on voudra, sans cependant arriver jamais à la valeur exacte de $\sqrt{2}$; mais les résultats changent à chaque nouvelle approximation, tandis que les grandeurs A et B ne sont susceptibles l'une et l'autre que d'une seule détermination.

THÉORÈME.

154. *Les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs rayons ou leurs diamètres.*

Démonstration. Quel que soit le nombre de leurs côtés, pourvu qu'il soit le même dans l'un et dans l'autre, les contours de deux polygones réguliers étant entre eux comme les rayons des cercles dans lesquels ils sont inscrits, si l'on désigne par p et p' ces contours, et par R et R' les rayons des cercles correspondans, on aura $\frac{p'}{p} = \frac{R'}{R}$; et, de plus, on peut concevoir que le nombre des côtés des polygones soit tel que les différences entre leurs contours et la circonférence du cercle dans lequel chacun d'eux est inscrit, soient au-dessous de telle grandeur qu'on voudra. Si donc $\frac{C'}{C}$ est le rapport des circonférences, la différence entre les rapports $\frac{C'}{C}$ et $\frac{p'}{p}$, s'il en existe une, pourra être réduite à tel degré de petitesse qu'on voudra. Cette différence étant aussi celle des rapports invariables $\frac{C'}{C}$ et $\frac{R'}{R}$, puisque $\frac{p'}{p} = \frac{R'}{R}$,

on peut prouver que la différence entre les quantités invariables $\frac{C'}{C}$ et $\frac{R'}{R}$ est au-dessous de toute grandeur donnée : on aura donc, par la proposition précédente,

$$\frac{C'}{C} = \frac{R'}{R}, \quad \text{ou} \quad C : C' :: R : R',$$

ce qui donne aussi

$$C : C' :: 2R : 2R', \text{ ou } :: D : D',$$

en appelant D et D' les diamètres des cercles proposés (*).

(*) Ceci peut se prouver immédiatement de plusieurs manières, par des raisonnemens analogues à ceux du n° 58, en observant que, quelque peu différens que soient l'un de l'autre deux cercles, on peut toujours concevoir un polygone régulier plus grand que l'un et plus petit que l'autre. Cette proposition, qui résulte évidemment de celle du n° 152, a été présentée par Euclide (*liv. XII, propos. 16*), sous une forme très élégante. Cet auteur suppose qu'on ait décrit les deux cercles d'un centre commun O', *fig.* 89. Il est Fig. 89.
visible alors que si l'on mène la tangente MN au cercle intérieur, et qu'on prenne sur le cercle extérieur une partie aliquote moindre que l'arc MQN, le polygone $D'E'F'G'H'$ construit sur cette partie, n'atteindra point la circonférence du petit cercle.

Voici comme Maurolycus, auteur d'un Commentaire très estimé sur Archimède, imprimé à Panorme en Sicile, sous la date de 1685, s'est servi de cette remarque (*pagé 5 et suiv.*) pour démontrer la proposition ci-dessus.

Si l'on n'avait pas $C : C' :: DO : d'O'$, mais $C : C' :: DO : D'O'$, $D'O'$ étant $> d'O'$, on décrirait sur $D'O'$ un cercle concentrique au cercle C', et l'on inscrirait dans le premier un polygone $D'E'F'G'H'$ qui n'atteignît pas le second : comparant ce polygone à son correspondant $DEFGH$ dans le cercle C, et désignant les contours respectifs de ces polygones par p' et p, on aurait

$$DO : D'O' :: p : p',$$

d'où il suivrait

$$C : C' :: p : p',$$

proportion absurde, puisque $C > p$, $C' < p'$.

On ne peut pas supposer non plus que $C : C' :: DO : X$, X étant

155. *Corollaire.* La proposition précédente fait voir que le rapport de la circonférence au diamètre est le même dans tous les cercles, et qu'on peut, au moyen de ce rapport, calculer la longueur d'une circonférence dont on connaît le rayon. En effet, si π désigne ce rapport, ou, ce qui revient au même, la circonférence du cercle dont le diamètre est pris pour unité, on aura cette proportion :

$$1 : \pi :: 2R : C,$$

de laquelle on tirera

$$C = 2\pi R, \text{ et } R = \frac{C}{2\pi},$$

formules avec lesquelles on calculera la circonférence C, lorsque le rayon R sera donné, ou le rayon quand on connaîtra la circonférence.

PROBLÈME.

156. *Trouver le rapport approché de la circonférence au diamètre.*

Solution. Il est évident, par le n° 152, qu'on résoudra cette question, en calculant, dans une des suites de polygones qu'on sait inscrire, le contour d'un certain nombre des premiers, et le contour des polygones circonscrits correspondans. On aura, par ce moyen, deux suites de

---

$< d'O'$; car le renversement de cette proportion, donnerait

$$C' : C :: X : DO,$$

et posant

$$X : DO :: d'O' : Z,$$

il en résulterait

$$C' : C :: d'O' : Z ;$$

mais par l'avant-dernière proportion, on aurait $Z > DO$, à cause de $X < d'O'$: ainsi, dans la dernière, le quatrième terme surpasserait le rayon de la circonférence qui forme le second terme, ce qui a été prouvé absurde dans le premier cas de la démonstration.

L'avantage qu'on peut trouver à ce tour de démonstration, qui est, comme on le voit, très ancien, c'est qu'il met en quelque sorte sous les yeux le polygone qu'il faut considérer.

nombres, les uns plus petits que la circonférence, les autres plus grands; et l'on s'arrêtera lorsque la différence des nombres correspondans des deux suites sera devenue moindre que le degré d'approximation qu'on veut obtenir dans la valeur de la circonférence. Je vais appliquer à cette recherche les polygones de 6, 12, 24, etc. côtés, inscrits et circonscrits au cercle dont le rayon = 1.

Soient d'abord a le côté d'un polygone inscrit quelconque, A celui du polygone circonscrit correspondant, a', enfin celui du polygone inscrit comprenant le double de côtés du premier; on aura (150)

$$A = \frac{a}{\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2}} = \frac{a}{\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}}$$

et (141)

$$a' = \sqrt{2\left(1-\sqrt{1-\tfrac{1}{4}a^2}\right)} = \sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}.$$

En commençant par l'hexagone inscrit, on aura $a = 1$, on trouvera $A = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Le contour de l'hexagone inscrit sera par conséquent 6, celui de l'hexagone circonscrit $\frac{12}{\sqrt{3}}$; et la circonférence se trouvera comprise entre ces deux nombres: on obtiendra des limites plus resserrées en passant aux polygones réguliers de 12 côtés et aux suivans.

Soient donc a', a'', a''', etc. les côtés des polygones inscrits de 12, de 24, de 48, etc., côtés, A', A'', A''', etc. les côtés des polygones circonscrits correspondans; le rayon du cercle étant 1, sa circonférence sera 2π (155), et si, pour abréger, on pose

$$r' = \tfrac{1}{2}\sqrt{4-a'^2},\quad r'' = \tfrac{1}{2}\sqrt{4-a''^2},\quad r''' = \tfrac{1}{2}\sqrt{4-a'''^2},\text{ etc.,}$$

on aura, par les formules précédentes,

$$a' = \sqrt{2-\sqrt{3}}, \qquad A' = \frac{a'}{r'}, \qquad 2\pi \begin{cases} > 12a' \\ < 12A' \end{cases}$$

$$a'' = \sqrt{2-2r'}, \qquad A'' = \frac{a''}{r''}, \qquad 2\pi \begin{cases} > 24a'' \\ < 24A'' \end{cases}$$

$$a''' = \sqrt{2-2r''}, \qquad A''' = \frac{a'''}{r'''}, \qquad 2\pi \begin{cases} > 48a''' \\ < 48A''' \end{cases}$$

etc.

On trouvera successivement $\sqrt{3} = 1,732050807568877$ (*),

a'	$=0,5176380902o5$	$12\,a'$	$=6,2116571$
r'	$=0,9659258262\,89$	$12\,A'$	$=6,4307806$
a''	$=0,2610523844\,4o$	$24\,a''$	$=6,2652572$
r''	$=0,9914448613\,74$	$24\,A''$	$=6,3193199$
a'''	$=0,1308062584\,6o$	$48\,a'''$	$=6,2787004$
r'''	$=0,9978589232\,38$	$48\,A'''$	$=6,2921724$
a^{IV}	$=0,0654381656\,43$	$96\,a^{IV}$	$=6,2820639$
r^{IV}	$=0,9994645874\,76$	$96\,A^{IV}$	$=6,2854292$
a^{V}	$=0,0327234632\,53$	$192\,a^{V}$	$=6,2829049$
r^{V}	$=0,9998661379\,09$	$192\,A^{V}$	$=6,2837461$
a^{VI}	$=0,0163622792\,08$	$384\,a^{VI}$	$=6,2831152$
r^{VI}	$=0,9999665339\,17$	$384\,A^{VI}$	$=6,2833260$
a^{VII}	$=0,0081812080\,52$	$768\,a^{VII}$	$=6,2831678$
r^{VII}	$=0,9999916334\,44$	$768\,A^{VII}$	$=6,2832203$
a^{VIII}	$=0,0040906125\,82$	$1536\,a^{VIII}$	$=6,2831809$
r^{VIII}	$=0,9999979083\,59$	$1536\,A^{VIII}$	$=6,2831941$
a^{IX}	$=0,0020453073\,61$	$3072\,a^{IX}$	$=6,2831842$
r^{IX}	$=0,9999994770\,89$	$3072\,A^{IX}$	$=6,2831875$
a^{X}	$=0,0010226538\,14$	$6144\,a^{X}$	$=6,2831850$
r^{X}	$=0,9999998692\,72$	$6144\,A^{X}$	$=6,2831858$
a^{XI}	$=0,0005113269\,24$	$12288\,a^{XI}$	$=6,2831852$
r^{XI}	$=0,9999999673\,18$	$12288\,A^{XI}$	$=6,2831854$

On voit, par ce tableau, comment les contours des polygones inscrits et circonscrits correspondans, se

(*) *Voyez* Mémoires de l'Académie des Sciences, 1747, page 445.

rapprochent de plus en plus ; ceux des polygones de 12288 côtés ne diffèrent que de deux unités décimales du septième ordre. Les sept premiers chiffres, communs à l'un et à l'autre, appartiendront nécessairement à la circonférence du cercle, dont la longueur sera par conséquent 6,283185, à moins d'un millionième près.

Si l'on prend, pour la circonférence du cercle, le milieu entre le contour du polygone inscrit et celui du polygone circonscrit de 12288 côtés, on aura 6,2831853, valeur qui est exacte jusqu'au dernier chiffre inclusivement; le rapport du diamètre à la circonférence sera donc $2 : 6,2831853$, ou $1 : 3,1415926$, en divisant ses deux termes par 2. Ainsi, 3,1415926 est une valeur approchée du rapport désigné par π, dans le n° 155; et en faisant $C=1$, on trouvera $2R=0,3183099$, nombre qui représente le diamètre, lorsque la circonférence est 1.

Archimède s'arrêta au polygone inscrit et circonscrit de 96 côtés, et trouva que la circonférence du cercle était $< 3\frac{10}{70}$ et $> 3\frac{10}{71}$; ce qui donne le rapport si connu de $1 : 3\frac{1}{7}$ ou $7 : 22$. Depuis, on a poussé l'exactitude beaucoup plus loin ; mais, parmi les divers rapports obtenus, celui de 113 à 355 mérite une attention particulière par sa simplicité et son exactitude, puisque, étant évalué en décimales, il donne 3,1415929, résultat vrai jusqu'au sixième chiffre décimal inclusivement. Adrien Métius, en rapportant dans sa *Geometriæ practica* le rapport ci-dessus, l'attribue à son père Pierre Métius, comme l'ayant publié dans une Réfutation de la quadrature du cercle, proposée par Simon Duchesne (*).

(*) Les recherches des savans anglais dans l'Inde, nous ont fait connaître un rapport de la circonférence au diamètre plus approché que celui d'Archimède : c'est celui de 3927 à 1250, consigné dans l'*Ayeen Akbery*, ouvrage persan contenant un extrait de la doctrine des Brames. Il revient à 3,1416 : il est exact jusqu'aux dix-millièmes, et dépend par conséquent du polygone de 768 côtés.

Il est bon de savoir que les rapports $7 : 22$ et $113 : 355$ se pré-

157. *Remarque.* La formation du tableau précédent n'est pas le moyen le plus expéditif pour parvenir à la valeur du côté du dernier polygone inscrit qu'il renferme; on réduit à la moitié le nombre des extractions de racines, en calculant, au lieu des côtés des polygones intermédiaires, les cordes BC, $B'C$, *fig.* 80, des arcs qu'il faut ajouter aux arcs AB et AB', pour compléter la demi-circonférence $AB'BC$. En effet, Fig. 80.

$$BC=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AB}^2},\quad B'C=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AB'}^2},$$

puisque les triangles ABC, $AB'C$, formés sur le diamètre AC et ayant un de leurs angles à la circonférence, sont nécessairement rectangles (114). Si l'on prend le rayon AO pour unité, que l'on désigne AB et AB' par a et a', BC et $B'C$ par b et b', à cause de $AC=2$, on trouvera

$$b=\sqrt{4-a^2},\quad b'=\sqrt{4-a'^2};$$

et comme on a, par le n° précéd., $a'=\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}$, il viendra

$$a'=\sqrt{2-b}\text{ ou }a'^2=2-b;$$

mettant cette valeur dans celle de b', il en résultera

$$b'=\sqrt{2+b}:$$

---

sentent d'eux-mêmes dans la suite des fractions approchées que l'on obtient lorsque l'on convertit en fraction continue (*Arithm.* 163) la fraction ordinaire qui correspond au rapport exprimé ci-dessus en décimales (*Arithm.* 85). Mais comme ce rapport n'est pas rigoureusement exact, on ne doit pas pousser le calcul jusqu'à la fin; il faut opérer en même temps sur les fractions

$$\frac{31415926}{10000000},\quad \frac{31415927}{10000000},$$

l'une plus grande, l'autre plus petite que le rapport exact, et se borner aux quotiens qui sont communs aux deux opérations. (Pour plus de détails, voyez *le Compl. des Élémens d'Algèbre.*)

on passera donc de b à b' en prenant la racine quarrée de la première quantité augmentée de 2. Il est évident qu'on aura de même $b'' = \sqrt{2+b'}$, b'' représentant la corde $B''C$ de l'arc correspondant à AB'' moitié de AB', et ainsi de suite.

En partant de $a = 1$, on trouvera

$$b = \sqrt{3} = 1,732050807 6$$
$$b' = \sqrt{2+1,732050807 6} = 1,931851652 6$$
$$b'' = \sqrt{2+1,931851652 6} = 1,982889722 7$$
$$b''' = \sqrt{2+1,982889722 7} = 1,995717846 5$$
$$b^{iv} = \sqrt{2+1,995717846 5} = 1,998929174 9$$
$$b^{v} = \sqrt{2+1,998929174 9} = 1,999732275 8$$
$$b^{vi} = \sqrt{2+1,999732275 8} = 1,999933067 8$$
$$b^{vii} = \sqrt{2+1,999933067 8} = \sqrt{3,999933067 8};$$

et comme b répond au polygone de 6 côtés, b' répondra à celui de 12, b'' à celui de 24, b''' à celui de 48, b^{iv} à celui de 96, b^{v} à celui de 192, b^{vi} à celui de 384, et b^{vii} à celui de 768. En nommant a^{vii} le côté de ce dernier, on aura

$$a^{vii} = \sqrt{4-b^{vii}{}^2} = \sqrt{4-3,999933067 8}$$
$$= \sqrt{0,000066932 2} = 0,008181210;$$

et multipliant ce nombre par 768, on obtiendra le contour du polygone inscrit de 768 côtés, comme dans le tableau du n° précédent : on calculera ensuite le polygone circonscrit correspondant

PREMIÈRE PARTIE.

SECTION II.

De l'aire des polygones et de celle du cercle.

158. Par la surface d'une figure quelconque, on entend la portion d'étendue renfermée entre les lignes qui terminent cette figure. On appelle aussi cette étendue l'*aire* de la figure.

Il serait convenable d'affecter spécialement le mot *aire* à l'étendue superficielle, lorsqu'on l'envisage par rapport à sa grandeur ; car le mot *surface* s'emploie le plus souvent pour désigner la forme, abstraction faite de toutes limites (*) : c'est ce que je ferai dans le cours de cet ouvrage.

159. Il est évident, et d'ailleurs la suite en fournira beaucoup d'exemples, que deux figures de formes très différentes peuvent renfermer des aires égales. J'exprimerai cette circonstance en disant, avec M. Legendre, que les deux figures sont *équivalentes*, et réservant la dénomination d'*égales* pour les figures semblables qui peuvent être superposées.

160. Dans les triangles et dans les parallélogrammes,

(*) On dit en effet une *surface courbe*, par opposition au plan ou à la surface plane ; et pour en déterminer l'étendue, il faudrait dire, *la surface d'une surface courbe*, locution vicieuse à tous égards, tandis que l'*aire d'une surface courbe* est une expression à la fois claire et correcte. En l'adoptant, on conserve l'analogie entre les lignes et les surfaces, puisque ces derniers mots s'appliquent aux formes seulement ; et le mot *aire* devient, pour le second cas, l'analogue du mot *longueur* dans le premier.

on choisit arbitrairement un des côtés, auquel on donne le nom de *base*, et l'on appelle *hauteur* la perpendiculaire abaissée de l'angle opposé à ce côté dans le triangle, ou d'un point quelconque du côté opposé dans le parallélogramme.

Fig. 90. BD et $B'D'$, *fig.* 90, sont les hauteurs des triangles ABC, $A'B'C'$, en prenant les côtés AC, $A'C'$ pour bases. Il faut remarquer que la perpendiculaire $B'D'$, tombant en dehors du triangle $A'B'C'$, est, à proprement parler, perpendiculaire sur le prolongement de la base.

Le sommet de l'angle opposé à la base s'appelle le *sommet* du triangle.

La droite IK est la hauteur du parallélogramme $EFGH$. Il est évident qu'elle demeurera la même, de quelque point du côté HG qu'on l'abaisse (55).

Il n'est pas moins évident que les triangles dont les bases sont sur la même droite, et dont les sommets sont sur une ligne parallèle à cette base, ont même hauteur; c'est-à-dire que les triangles compris entre les mêmes parallèles ont même hauteur. Les triangles ABC, $A'B'C$ et le parallélogramme $EFGH$ ont tous les trois même hauteur, puisque, entre les parallèles AF et BG, les droites BD, $B'D'$ et IK sont égales (55).

THÉORÈME.

161. *Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur, sont équivalens.*

Démonstration. Ces parallélogrammes ayant même base, on pourra poser celle de l'un sur celle de l'autre, et comme ils ont en outre même hauteur, le côté parallèle à la base du premier tombera sur le côté opposé à la base du second, ou sur le prolongement de ce
Fig. 91. côté, ainsi que le montrent les deux figures 91, pour des parallélogrammes $ABCD$, $ABEF$.

Cela posé, les triangles ADF et BCE sont égaux, parce que les côtés AD et BC, AF et BE sont respectivement égaux, comme côtés opposés d'un même parallélogramme, et que les angles DAF, CBE, dont les côtés sont parallèles, et les ouvertures tournées dans le même sens, sont égaux. Si, du quadrilatère $ABED$, on retranche d'une part le triangle ADF, et de l'autre le triangle BCE, on aura nécessairement deux grandeurs égales, dont l'une sera le parallélogramme $ABEF$, et l'autre le parallélogramme $ABCD$.

THÉORÈME.

162. *Un triangle quelconque est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur.*

Démonstration. Si, par les angles B et C du triangle ABC, *fig.* 92, on mène les droites BD et CD, respectivement parallèles aux côtés AC et AB, la figure $ABCD$ sera un parallélogramme (79) ayant même base et même hauteur que le triangle proposé (160). Les triangles ABC et BCD, ayant leurs côtés AB et CD, AC et BD égaux (54), et en outre le côté CB commun, seront égaux : le triangle ABC sera donc la moitié du parallélogramme $ABCD$. Fig. 92.

163. *Corollaire.* Il suit de là que deux triangles qui ont même base et même hauteur, sont équivalens. En effet, ces triangles seront, d'après ce qui précède, les moitiés de parallélogrammes de même base et de même hauteur, ou de parallélogrammes équivalens (161).

PROBLÈME.

164. *Transformer un polygone d'un certain nombre de côtés en un autre qui ait un côté de moins, et qui soit équivalent.*

Solution. Soit, pour exemple, le pentagone $ABCDE$, *fig.* 93; on joindra les deux angles E et C par une Fig. 93.

droite; et, par le sommet de l'angle D, placé entre les premiers, on mènera, parallèlement à EC, la droite DF, qui déterminera sur le côté AE prolongé, un point F, lequel, étant joint au point C, formera le quadrilatère $ABCF$, équivalent au pentagone $ABCDE$.

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que les triangles CDE, CFE, reposant sur la même base EC, et étant compris entre les parallèles CE et DF, sont équivalens (n° précédent), et que l'on obtient le pentagone $ABCDE$ et le quadrilatère $ABCF$, en ajoutant successivement chacun de ces triangles au même quadrilatère $ABCE$.

Le procédé ne changerait pas, quand même le pentagone $ABCDE$ aurait un angle rentrant, comme dans la figure 94; seulement il faudrait observer, pour la démonstration, que le pentagone $ABCDE$ et le quadrilatère $ABCF$ se forment en retranchant du quadrilatère $ABCE$, les triangles équivalens CDE et CFE.

Fig. 94.

Il est évident que la construction et les raisonnemens qui précèdent peuvent s'appliquer à quelque polygone que ce soit.

165. *Corollaire.* En effectuant sur le quadrilatère $ABCF$ une construction semblable à la précédente, on le transformera en un triangle équivalent, et par une suite d'opérations semblables, on transformera un polygone quelconque en un triangle équivalent. Si l'on avait, par exemple, un hexagone, on le transformerait d'abord en un pentagone, puis on ferait de celui-ci un quadrilatère, puis enfin de ce dernier un triangle.

THÉORÈME.

166. *Deux rectangles de même base*, ABCD *et* EFGH, *sont entre eux comme leurs hauteurs* (*).

Fig. 95.

(*) J'ai changé l'énoncé qu'on donne ordinairement à cette pro-

Démonstration. Ici, comme dans le n° 58, les hauteurs AD et EH des deux parallélogrammes peuvent être commensurables entre elles, ou bien incommensurables.

Dans la première hypothèse, si l'on divise ces hauteurs AD et EH en parties, telles que Ad et Eh, égales à leur commune mesure, et que, par les points de division, on mène des parallèles à la base, on formera dans chacun des rectangles proposés autant de rectangles égaux qu'il y a de divisions dans sa hauteur; car la base de tous ces petits rectangles sera égale à AB, et leurs hauteurs seront toutes égales entre elles. Le rapport des rectangles $ABCD$ et $EFGH$, sera évidemment égal à celui des nombres qui expriment combien il y a de petits rectangles dans l'un et dans l'autre, nombres qui sont précisément ceux des parties égales contenues dans leurs hauteurs AD et EH: on aura donc

$$ABCD : EFGH :: AD : EH.$$

Dans la figure, le rectangle $ABCD$ se trouvant partagé en cinq parties égales à $ABcd$, et le rectangle $EFGH$ en trois, on a

$$ABCD : EFGH :: 5 : 3.$$

Lorsque les hauteurs AD et EH sont incommensurables, *fig.* 96, on prouve que le rapport des rectangles $ABCD$ et $EFGH$ ne peut être ni plus grand, ni moindre que celui de ces hauteurs. Fig. 96.

En effet, si l'on avait

$$ABCD : EFGH :: AD : EI,$$

EI surpassant EH, que l'on conçût AD divisé en parties égales moindres que HI, et que l'on portât ces parties sur EH, de E vers H, il tomberait nécessairement un point de division h, entre H et I. En menant,

position, afin de le rendre semblable à celui de la proposition du n° 255, qui est analogue à celle-ci.

par ce point, hg parallèle à EF, on formerait le rectangle $EFgh$, pour lequel on aurait

$$ABCD : EFgh :: AD : Eh,$$

puisque les hauteurs AD et Eh seraient commensurables entre elles par construction ; et comparant cette proportion à la précédente, on en tirerait

$$EFGH : EFgh :: EI : Eh ;$$

ce qui ne peut être, puisque $EFGH < EFgh$ et $EI > Eh$.

En portant le point I de l'autre côté de GH, en I', on ne pourrait pas non plus avoir

$$ABCD : EFGH :: AD : EI',$$

parce qu'en prenant en h' le point de division correspondant à h, on aurait premièrement pour les hauteurs AD et Eh', commensurables entre elles,

$$ABCD : EFgʹhʹ :: AD : Eh',$$

ce qui conduirait encore à la proportion

$$EFGH : EFgʹhʹ :: EI' : Eh',$$

absurde à cause que $EFGH > EFgʹhʹ$ et $EI' < Eh'$.

Le rapport de $ABCD$ à $EFGH$ ne pouvant donc être ni plus grand ni plus petit que celui de AD à EH, on aura nécessairement

$$ABCD : EFGH :: AD : EH.$$

THÉORÈME.

167. *Deux rectangles quelconques sont entre eux comme les produits de leur base par leur hauteur, ou comme les produits de deux côtés contigus.*

Démonstration. En prenant sur la base du paral-
Fig. 97. lélogramme $ABCD$, *fig.* 97, une partie Ab égale à la base du parallélogramme $EFGH$, et tirant la droite bc parallèle à BC, on aura, par le théorème précédent,

$$AbcD : EFGH :: AD : EH ;$$

prenant ensuite AD pour base des parallélogrammes $ABCD$ et $AbcD$, qui auront alors pour hauteur AB et Ab, on en conclura

$$ABCD : AbcD :: AB : Ab.$$

En multipliant ces proportions par ordre, avec l'attention d'omettre le facteur $AbcD$, commun aux deux termes du premier rapport composé, et de substituer à Ab son égale EF, il viendra

$$ABCD : EFGH :: \overline{AB} \times \overline{AD} : \overline{EF} \times \overline{EH},$$

résultat qui renferme l'énoncé de la proposition (*).

168. *Remarque.* Mesurer des grandeurs n'étant autre chose que comparer entre elles celles de même espèce, il est évident que la mesure des aires doit avoir pour

---

(*) Je me suis servi ci-dessus de la multiplication par ordre, comme du moyen le plus simple pour parvenir au résultat cherché; mais il pourrait arriver que l'on éprouvât quelque difficulté à concevoir ce changement, dans lequel il semble qu'il faut multiplier des aires entre elles. Cette difficulté cessera si l'on imagine que ces aires, pour être comparées entre elles, sont rapportées à une certaine aire prise pour mesure commune ou pour unité. On mettra encore plus de netteté dans ce passage, en le rendant ainsi qu'il suit :

Les proportions

$AbcD : EFGH :: AD : EH$, $\quad ABCD : AbcD :: AB : ab$

donnent

$$\frac{EFGH}{AbcD} = \frac{EH}{AD}, \qquad \frac{AbcD}{ABCD} = \frac{ab}{AB},$$

ce qui ne présente aucune obscurité, puisqu'il s'agit de rapports de grandeurs homogènes. Cela posé, $\frac{EH}{AD}$ désignant combien l'aire $EFGH$ contient l'aire $AbcD$, et $\frac{Ab}{AB}$ combien l'aire $AbcD$ contient l'aire $ABCD$, le nombre de fois que la première contient la dernière sera donc exprimé par

$$\frac{EH}{AD} \times \frac{Ab}{AB} = \frac{\overline{EF} \times \overline{EH}}{\overline{AB} \times \overline{AD}},$$

en concevant les droites rapportées à une commune mesure.

but de savoir combien une aire quelconque en contient une autre, prise arbitrairement pour servir de terme de comparaison. Mesurer, par exemple, le rectangle
Fig 98. *ABCD*, *fig.* 98, c'est chercher combien ce rectangle contient de fois un quarré *abcd* dont on suppose que le côté soit égal à la droite prise pour mesure commune des longueurs des droites; et, d'après ce qui précède, on aura, en concevant la base et la hauteur, *AB* et *BC*, du parallélogramme *ABCD* rapportées à cette mesure,

$$abcd : ABCD :: \overline{ab} \times \overline{bc} : \overline{AB} \times \overline{BC}, \text{ ou } :: 1 : \frac{AB}{ab} \times \frac{BC}{bc};$$

ce qui montre que *le rectangle* ABCD *contient le rectangle* abcd, *ou l'aire prise pour unité, comme le produit du nombre d'unités linéaires contenues dans sa base* AB, *multiplié par le nombre d'unités linéaires contenues dans sa hauteur* BC, *contient l'unité numérique*, expression dont l'exactitude est évidente, puisque les rapports y sont réduits à des nombres. Ce n'est que pour abréger qu'on la remplace par celle-ci : *L'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur;* et il faut toujours être en état de restituer, d'après la première, ce qu'on a sous-entendu dans la seconde.

La vérité de la proposition précédente résulte de l'inspection seule de la figure, lorsque le côté du quarré *abcd*, pris pour mesure commune, est contenu exactement dans la base et dans la hauteur du rectangle *ABCD*. En menant alors par tous les points de division de la hauteur *BC*, des droites *ef* parallèles à *AB*, on partage le rectangle *ABCD* en autant de rectangles égaux, ou bandes, que sa hauteur contient de fois *ab*; et chacune de ces bandes peut, comme *ABef*, être partagée en autant de quarrés *Begh*, égaux à *abcd*, que la base *AB* contient de fois *ab* : le nombre total des quarrés égaux à *Begh*, contenus dans le rectangle *ABCD*, est donc

égal à celui des quarrés contenus dans une bande $ABef$, multiplié par le nombre des bandes, ce qui fait le produit du nombre d'unités linéaires de la base par le nombre d'unités linéaires de la hauteur.

169. 1er *Corollaire*. Si les deux côtés du rectangle AB et BC devenaient égaux, auquel cas il se changerait en quarré, son aire serait mesurée par la seconde puissance de son côté AB, c'est-à-dire qu'il contiendrait le quarré $abcd$, pris pour unité, autant de fois que la seconde puissance du nombre d'unités linéaires contenues dans son côté, contiendrait l'unité numérique; et de là vient qu'on appelle aussi *quarré* d'un nombre la seconde puissance de ce nombre.

170. 2e *Corollaire*. L'aire d'un parallélogramme se mesure par le produit de sa base par sa hauteur. En effet, les parallélogrammes de même base et de même hauteur étant équivalens (161), un parallélogramme quelconque est nécessairement équivalent au rectangle de même base et de même hauteur. On conclut encore de là que deux parallélogrammes quelconques étant entre eux comme leurs mesures respectives, sont par conséquent dans le rapport des produits de leur base par leur hauteur, et simplement comme leurs bases, si leurs hauteurs sont égales, ou comme leurs hauteurs, lorsqu'ils ont même base.

171. 3e *Corollaire*. L'aire d'un triangle est mesurée par la moitié du produit de sa base par sa hauteur, puisque tout triangle est la moitié d'un rectangle de même base et de même hauteur. Les moitiés étant entre elles comme les touts, les triangles quelconques seront entre eux comme les parallélogrammes dont ils font partie, et par conséquent comme les produits de leur base par leur hauteur (n° précédent), ou comme leurs bases quand leurs hauteurs sont égales, ou comme leurs hauteurs quand ils ont même base.

PROBLÈME.

172. *Transformer en un quarré, un parallélogramme ou un triangle donné.*

Fig. 99. *Solution.* 1°. On trouvera le côté FG, *fig.* 99, du quarré $FGHI$ équivalent au parallélogramme donné, $ABCD$, en prenant une moyenne proportionnelle entre la base AB et la hauteur DE de ce parallélogramme.

En effet, on a, par cette construction,

$$AB : FG :: FG : DE,$$

d'où l'on tire

$$\overline{AB} \times \overline{DE} = \overline{FG}^2;$$

et comme $\overline{AB} \times \overline{DE}$ est la mesure de l'aire du parallélogramme proposé, et $\overline{FG}^2$ celle du quarré $FGHI$, construit sur FG, cette dernière figure est équivalente à l'autre.

2°. A l'égard du triangle $A'B'D'$, c'est entre la base $A'B'$ et la moitié de la hauteur $D'E'$ que doit être prise la moyenne proportionnelle FG, parce qu'on a alors

$$A'B' : FG :: FG : \tfrac{1}{2} D'E',$$

d'où il suit

$$\tfrac{1}{2}\overline{A'B'} \times \overline{D'E'} = \overline{FG}^2;$$

le premier de ces produits exprime en effet l'aire du triangle, et le second celle du quarré.

173. *Corollaire.* On peut, par le moyen du problème précédent, transformer un polygone quelconque en un quarré équivalent; il faudra d'abord le transformer en un triangle par le procédé du n° 164, et l'on changera ensuite ce triangle en un quarré.

174. *Remarque.* Tout polygone pouvant être partagé en triangles (81), on évaluera son aire en calculant séparément celle de chacun des triangles qui le composent, et en prenant la somme des résultats.

THÉORÈME.

175. *L'aire d'un quadrilatère* ABCD, fig. 100, *dans* Fig. 100. *lequel deux côtés sont parallèles, et qu'on nomme* trapèze, *se mesure par le produit de la demi-somme des deux côtés parallèles,* AB *et* CD, *multipliée par la hauteur* EF, *prise entre ces côtés.*

Démonstration. En tirant la diagonale *CB*, on partagera le trapèze en deux triangles *ABC* et *BCD*, dont *EF* sera la hauteur commune; et parce que

$$ABCD = ABC + BCD,$$

$$ABC = \tfrac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{EF}, \qquad BCD = \tfrac{1}{2}\overline{CD} \times \overline{EF},$$

on aura

$$ABCD = \tfrac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{EF} + \tfrac{1}{2}\overline{CD} \times \overline{EF} = \tfrac{1}{2}(AB + CD)\,EF,$$

ce qui est l'énoncé du théorème.

Il est bon de remarquer que la droite *GH*, menée parallèlement à *AB*, par le milieu *G* de l'un des côtés non parallèles du trapèze, sera égale à $\frac{1}{2}(AB + CD)$. En effet, le point *H* étant aussi le milieu de *BD* (58), la similitude des triangles *BCD* et *BIH* fait voir évidemment que $IH = \frac{1}{2}CD$, et celle des triangles *ACB* et *GCI* prouve de même que $GI = \frac{1}{2}AB$, d'où il résulte

$$GH = GI + IH = \tfrac{1}{2}(AB + CD).$$

La droite *GH* partageant aussi *EF* en deux parties égales (58), se trouve à égale distance des côtés parallèles du trapèze; et l'on peut dire par conséquent, que *l'aire du trapèze se mesure par le produit de sa hauteur, multipliée par une ligne menée à égale distance des deux bases parallèles.*

THÉORÈME.

176. *Les aires des polygones semblables sont entre elles comme les quarrés des côtés homologues de ces polygones.*

Démonstration. 1°. Si les polygones proposés sont des triangles quelconques ABC et abc, *fig.* 101, les triangles rectangles BDC et bdc, formés par les hauteurs des premiers, seront semblables comme ayant, outre les angles droits D et d, les angles égaux B et b : on aura donc

Fig. 101.

$$CD : cd :: BC : bc;$$

mais, par la similitude des triangles ABC et abc, on a aussi

$$AB : ab :: BC : bc;$$

multipliant ces proportions par ordre, et divisant par 2 les termes du premier rapport de la proportion composée, il viendra

$$\tfrac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{CD} : \tfrac{1}{2}\overline{ab} \times \overline{cd} :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2;$$

résultat dont les deux premiers termes expriment les aires respectives des triangles ABC et abc (171) : donc

$$ABC : abc :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$$

2°. Deux polygones semblables $ABCDE$ et $abcde$, *fig.* 51, étant partagés en un même nombre de triangles semblables (89) et semblablement disposés, chaque triangle du premier polygone sera à son correspondant dans le second, comme le quarré de l'un des côtés du premier polygone est au quarré du côté homologue du second ; on aura

Fig. 51.

$$ABC : abc :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2,$$
$$AEC : aec :: \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2,$$
$$EDC : edc :: \overline{ED}^2 : \overline{ed}^2.$$

Mais la similitude des polygones donne cette suite de rapports égaux :

$$AB : ab :: AE : ae :: ED : ed,$$

de laquelle on tire

$$\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2 :: \overline{ED}^2 : \overline{ed}^2,$$

ce qui prouve l'égalité des rapports de chaque triangle de l'un des polygones à son correspondant dans l'autre, et d'où il résulte

$$ABC : abc :: AEC : aec :: EDC : edc,$$

On déduira, de cette dernière suite de rapports égaux,

$$ABC + AEC + EDC : abc + aec + edc :: ABC : abc,$$

ou $$ABCD : abcde :: ABC : abc :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2.$$

Le même raisonnement aurait évidemment lieu quel que fût le nombre des côtés des polygones proposés.

THÉORÈME.

177. *Les aires de deux triangles qui ont un angle commun, sont dans le rapport des produits des côtés qui comprennent cet angle.*

Démonstration. En abaissant les hauteurs CD et FG, *fig.* 101, des triangles ABC et AEF, on forme les triangles semblables ACD et AFG, qui donnent Fig. 101

$$CD : FG :: AC : AF;$$

et, par le n° 171, il vient

$$ABC : AEF :: \overline{AB} \times \overline{CD} : \overline{AE} \times \overline{FG} :$$

si l'on multiplie ces deux proportions par ordre en supprimant le facteur CD, commun aux antécédens, et le facteur FG, commun aux conséquens, il en résulte, conformément à l'énoncé, que

$$ABC : AEF :: \overline{AB} \times \overline{AC} : \overline{AE} \times \overline{AF}.$$

THÉORÈME.

178. *Le quarré* AEHL, fig. 102, *construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle* ABE, *est équivalent à la somme des quarrés* ABCD *et* BEFG, *construits sur les deux autres côtés de ce triangle.* Fig. 102.

Démonstration. On serait en droit de conclure cette

proposition de celle du n° 75, puisqu'il a été prouvé dans ce numéro, que $\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2$, et que, d'après le n° 169, $\overline{AB}^2$, $\overline{BE}^2$, $\overline{AE}^2$ sont les mesures respectives des quarrés $ABCD$, $BEFG$, $AEHL$; mais ces considérations supposant les lignes et les aires rapportées à des nombres, j'ai jugé convenable de démontrer la proposition immédiatement sur les aires, ainsi qu'Euclide l'a fait, et sans employer des rapports de lignes.

Pour cela, il faut, de l'angle droit B du triangle ABE, abaisser, sur l'hypoténuse AE, la perpendiculaire BK et la prolonger jusqu'en I, puis mener les droites DE et BL. Le triangle DAE ayant même base AD que le quarré $ABCD$, et étant compris entre les mêmes parallèles AD et CE, sera équivalent à la moitié de ce quarré (162); de même, le triangle BAL sera équivalent à la moitié du rectangle $AKIL$, construit sur sa base AL et compris entre les mêmes parallèles AL et BI. Or, les triangles DAE et BAL sont égaux (16), parce que l'angle DAE, composé de l'angle droit DAB et de l'angle BAE, est nécessairement égal à l'angle BAL, composé aussi d'un angle droit EAL et de l'angle BAE, et que les côtés AD et AB, AL et AE sont respectivement égaux comme côtés d'un même quarré : donc la moitié du quarré $ABCD$ est équivalente à celle du rectangle $AKIL$; donc le quarré $ABCD$ sera lui-même équivalent au rectangle $AKIL$. On prouvera de même que le quarré $BEFG$ est équivalent au rectangle $EHIK$; et il résultera de là que le quarré $AEHL$, composé des deux rectangles $AKIL$ et $EHIK$, est équivalent à la somme des quarrés $ABCD$ et $BEFG$.

179. 1er *Corollaire.* Les rectangles $AKIL$, $EHIK$ et le quarré $AEHL$, ayant même hauteur AL, sont entre eux comme leurs bases (170), en sorte qu'on a,

$$ABCD : BEFG : AEHL :: AK : KE : AE;$$

c'est-à-dire que les quarrés construits sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont au quarré construit sur l'hypoténuse, comme les segmens adjacens AK et KE sont à l'hypoténuse entière AE.

180. 2e *Corollaire.* Puisque les aires des polygones semblables sont entre elles comme les quarrés des côtés homologues de ces polygones (176), si l'on construit sur les côtés de l'angle droit du triangle rectangle ABE, *fig.* 103, et sur son hypoténuse AE, trois polygones semblables, X, Y, Z, on aura Fig. 103.

$$X : \overline{AB}^2 :: Y : \overline{BE}^2 :: Z : \overline{AE}^2;$$

d'où l'on tirera

$$X + Y : \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 :: Z : \overline{AE}^2;$$

et du théorème précédent, qui donne $\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2$, on conclura $X + Y = Z$; c'est-à-dire que le polygone construit sur l'hypoténuse est équivalent à la somme des deux autres.

PROBLÈME.

181. *Construire un polygone semblable à un autre, et dont l'aire soit dans un rapport donné avec celle du premier, ou soit équivalente à un quarré donné.*

Solution. Dans le premier cas, si bc, *fig.* 104, désigne Fig. 104.
l'un des côtés du polygone donné, et que l'aire de ce polygone soit à celle du polygone cherché, dans le rapport de deux droites quelconques M et N, on prendra, sur une droite indéfinie AE, deux parties AK et KE qui soient dans le même rapport; sur leur somme AE, comme diamètre, on décrira une demi-circonférence; on élèvera la perpendiculaire BK; on tirera les cordes AB et BE; enfin, on portera sur AB, de B en C, le côté bc de la première figure, et ayant mené CD parallèle à AE, on aura en BD le côté qui, dans le polygone cherché, est homologue à bc. La question

sera donc ramenée à construire sur BD, un polygone semblable au polygone X, ce qui s'effectuera par le procédé du n° 90.

Pour prouver la construction précédente, on déduit d'abord, des triangles ABE et CBD, semblables entre eux, les proportions

$$AB : BE :: BC : BD \text{ et } \overline{AB}^2 : \overline{BE}^2 :: \overline{BC}^2 : \overline{BD}^2;$$

mais, par le n° 179,

$$\overline{AB}^2 : \overline{BE}^2 :: AK : KE \text{ ou } :: M : N;$$

donc

$$\overline{BC}^2 : \overline{BD}^2 :: M : N;$$

donc (176) le polygone construit sur BC sera au polygone construit sur BD, dans le rapport de M à N, comme le demande l'énoncé de la question.

Si le côté bc de la figure X excédait AB, on prolongerait cette ligne en C'; mais la construction et la démonstration ne changeraient pas pour cela.

Dans le cas où l'aire du polygone demandé devrait être équivalente à un quarré donné N^2, on transformerait aussi en un quarré le polygone donné, et M^2 représentant ce quarré, il faudrait qu'on eût

$$\overline{BC}^2 : \overline{BD}^2 :: M^2 : N^2,$$

d'où il suit

$$M : N :: BC : BD;$$

ainsi BD s'obtiendrait alors par les lignes proportionnelles (62), ou bien on pourrait prendre AK et KE dans le rapport des quarrés M^2 et N^2.

THÉORÈME.

182. *L'aire d'un polygone régulier a pour mesure la moitié du produit de son contour par le rayon du cercle inscrit.*

Démonstration. Ce polygone peut être partagé en autant de triangles égaux qu'il a de côtés (139); l'un de

ces triangles, ABO, *fig.* 79, est mesuré par $\frac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{OG}$; Fig. 79.
en répétant ce produit autant de fois que le polygone a de côtés, on aura, si N en désigne le nombre,

$$\frac{1}{2} N \times \overline{AB} \times \overline{OG};$$

mais $N \times \overline{AB}$ sera le contour ou le *périmètre* du polygone : en le représentant par P, il viendra donc

$$\frac{1}{2} P \times \overline{OG},$$

comme le porte l'énoncé de la proposition.

Le rayon du cercle inscrit se nomme aussi *apothème;* et l'on dit, en conséquence, que *l'aire d'un polygone régulier a pour mesure la moitié du produit de son périmètre par son apothème.*

183. *Corollaire.* Il suit du théorème précédent et du n° 140, que les aires des polygones réguliers d'un même nombre de côtés, étant entre elles comme les quarrés de leurs côtés, sont aussi entre elles comme les quarrés des rayons des cercles dans lesquels ils sont inscrits ou auxquels ils sont circonscrits. En effet, on a successivement

$$ABCDEF : abcdef :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2,$$

$$AB : ab :: AO : ao \ (140),$$

$$\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{AO}^2 : \overline{ao}^2,$$

d'où il résulte

$$ABCDEF : abcdef :: \overline{AO}^2 : \overline{ao}^2.$$

On trouve de même

$$ABCDEF : abcdef :: \overline{OG}^2 : \overline{og}^2,$$

en observant que $AO : ao :: OG : og$ (140).

184. *Remarque.* En appliquant la proposition du numéro précédent aux polygones réguliers inscrits et circonscrits au même cercle, on reconnaît qu'il est toujours possible de trouver deux polygones du même

nombre de côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit, tels que la différence de leurs aires soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur.

Fig. 87. En effet, on a évidemment, dans la figure 87,

$$ABCDE : abcde :: \overline{Oa}^2 : \overline{OG}^2;$$

désignant par P l'aire du polygone circonscrit, et par p celle du polygone inscrit, on aura

$$P : p :: \overline{Oa}^2 : \overline{OG}^2,$$

$$P - p : P :: \overline{Oa}^2 - \overline{OG}^2 : \overline{Oa}^2,$$

d'où

$$P - p = \frac{P(\overline{Oa}^2 - \overline{OG}^2)}{\overline{Oa}^2},$$

valeur dans laquelle on peut rendre le facteur $\frac{\overline{Oa}^2 - \overline{OG}^2}{\overline{Oa}^2}$ aussi petit qu'on voudra, en multipliant les côtés des polygones.

185. *Corollaire.* Le polygone circonscrit étant visiblement plus grand que le cercle, tandis que le polygone inscrit est moindre, il suit de ce qui précède, que l'on peut toujours assigner un polygone régulier, soit inscrit, soit circonscrit, dont l'aire diffère aussi peu qu'on voudra de celle d'un cercle donné. Il suffit, pour cela, de prendre le polygone d'un assez grand nombre de côtés, pour que la différence entre le polygone inscrit et le polygone circonscrit ne surpasse pas la quantité assignée.

THÉORÈME.

186. *Si trois grandeurs* A, B, X *sont telles, que la première* A, *que l'on suppose variable, mais néanmoins surpassant toujours chacune des deux autres* B, X, *qui ne changent point, puisse approcher de toutes deux en même temps, aussi près qu'on voudra, on aura nécessairement* B = X.

Démonstration. Soit, 1°. $X > B$; on aura, d'après cette hypothèse et en vertu de l'énoncé,

$$A > X\ ,\ X > B,$$

d'où il résulte que si l'on prend A de manière que la différence $A - B$ soit moindre qu'une quantité quelconque δ, ce qu'on regarde comme toujours possible, la différence $X - B$ sera, à plus forte raison, moindre que δ.

2°. Soit $X < B$, on aura alors

$$A > B,\ B > X;$$

et prenant A de manière que $A - X$ soit moindre que δ, à plus forte raison la différence $B - X$ sera-t-elle moindre que δ.

Le raisonnement ci-dessus conduisant à prouver que la différence des deux grandeurs invariables X et B est nécessairement moindre que toute grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur, il s'ensuit que $B = X$ (153).

THÉORÈME.

187. *L'aire d'un cercle a pour mesure la moitié du produit de la circonférence par le rayon, ou* $\frac{1}{2}$ CR, *en nommant* C *la circonférence, et* R *le rayon.*

Démonstration. En effet, plus le nombre des côtés du polygone circonscrit augmente, plus aussi son périmètre P approche de la circonférence (152), et plus le produit $\frac{1}{2}PR$ approche de $\frac{1}{2}CR$, qu'il surpassera toujours, mais d'aussi peu qu'on voudra ; d'un autre côté, l'aire du même polygone, toujours plus grande que celle du cercle, peut approcher de cette dernière d'aussi près qu'on voudra (185) : les produits $\frac{1}{2}PR$, $\frac{1}{2}CR$ et la vraie mesure de l'aire du cercle sont donc trois quantités placées dans les mêmes circonstances que les quantités

A, B et X, du numéro précédent : donc le produit $\frac{1}{2}\,CR$ est égal à la vraie mesure de l'aire du cercle (*).

188 *Corollaire.* Il suit de là que les aires des cercles sont entre elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres. En effet, puisque l'on a cette proportion :

$$C : C' :: R : R' \quad (154)$$

si on la multiplie par la proportion

$$\tfrac{1}{2}R : \tfrac{1}{2}R' :: R : R',$$

qui est évidente, il viendra

$$\tfrac{1}{2}CR : \tfrac{1}{2}C'R' :: R^2 : R'^2,$$

proportion dans laquelle les deux termes du premier rapport sont, d'après ce qui précède, les mesures des aires des cercles dont les rayons sont R et R' ; de plus, il est visible qu'on a

$$R^2 : R'^2 :: D^2 : D'^2,$$

en désignant par D et D' les diamètres, puisque $D=2R$, $D'=2R'$: donc $\frac{1}{2}CR : \frac{1}{2}C'R' :: D^2 : D'^2$, ce qui complète l'énoncé de la proposition.

Si l'on représente par π la circonférence dont le diamètre est 1, la surface de ce cercle sera $\frac{1}{4}\times\pi=\frac{1}{4}\pi$; on aura donc

$$\tfrac{1}{4}\pi : \tfrac{1}{2}C'R' :: 1 : D'^2, \text{ d'où } \tfrac{1}{2}C'R'=\tfrac{1}{4}\pi D'^2,$$

(*) On prouve immédiatement que la mesure de l'aire du cercle ne peut être ni plus grande ni plus petite que $\frac{1}{2}\,CR$; car si le premier cas avait lieu, $\frac{1}{2}\,CR$ serait alors la mesure d'un cercle plus petit que celui dont le rayon $=R$, tandis qu'en inscrivant dans ce dernier un polygone plus grand que l'autre cercle (*voyez* la note page 102), ce polygone aurait néanmoins pour mesure un produit moindre que $\frac{1}{2}\,CR$, puisque son contour et son apothème sont respectivement moindres que C et R.

On ne peut pas supposer non plus que le produit $\frac{1}{2}\,CR$ soit la mesure d'un cercle plus grand que le proposé ; car, en inscrivant dans le plus grand cercle un polygone qui surpasse le cercle proposé, ce polygone aurait une mesure plus grande que celle qu'on assigne au cercle dans lequel il est inscrit.

ce qui montre que l'*aire d'un cercle est égale au quarré du diamètre multiplié par le* $\frac{1}{4}$ *du rapport de la circonférence au diamètre.* En mettant pour D'^2 sa valeur $4R'^2$, on aura $\pi R'^2$, ou le *quarré du rayon multiplié par le rapport de la circonférence au diamètre.*

THÉORÈME.

189. *L'aire de la figure* AFBO, fig. 105, *terminée par les deux rayons* AO, BO, *faisant entre eux un angle quelconque, et par l'arc de cercle* AFB, *figure que l'on nomme* secteur de cercle, *a pour mesure la moitié du produit de l'arc* AFB, *par le rayon* AO. Fig. 105

Démonstration. Si, par le centre *O*, on élève *DO* perpendiculaire sur le diamètre *AE*, les côtés de l'angle droit *AOD* et l'arc *ABD* comprendront évidemment entre eux le quart de l'aire du cercle ; et le raisonnement du n° 109 prouve que l'aire du secteur *AFBO* est à celle du secteur *AOD*, dans le rapport de l'arc *AFB* à l'arc *AD*. Mais puisque l'aire du secteur *AOD* est le quart de celle du cercle, on aura

$$AOD = \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{2} C \times \overline{AO} = \tfrac{1}{8} C \times \overline{AO},$$

et la proportion énoncée ci-dessus,

$$AFBO : AOD :: AFB : AD \text{ ou } \tfrac{1}{4} C,$$

deviendra

$$AFBO : \tfrac{1}{8} C \times \overline{AO} :: AFB : \tfrac{1}{4} C,$$

ce qui donnera

$$AFBO = \tfrac{1}{2} \overline{AFB} \times \overline{AO}.$$

comme le porte l'énoncé de la proposition.

190. *Remarque.* On obtiendra l'espace *AFBA*, compris entre l'arc *AFB* et la corde *AB*, en retranchant de l'aire du secteur *AFBO* celle du triangle *ABO*.

Cette dernière sera exprimée par $\frac{1}{2}\overline{BG}\times\overline{AO}$, si BG est perpendiculaire sur AO (171); et en retranchant sa valeur de celle du secteur $AFBO$ (189), on aura

$$AFBA = \tfrac{1}{2}\overline{AFB}\times\overline{AO} - \tfrac{1}{2}\overline{BG}\times\overline{AO}$$
$$= \tfrac{1}{2}(AFB - BG)\,AO,$$

c'est-à-dire *la moitié du produit de la différence entre l'arc* AFB *et la perpendiculaire* BG, *par le rayon* AO (*).

N. B. L'espace $AFBA$ se nomme le *segment*, et la portion FH du rayon OF perpendiculaire sur la corde AB, est la *flèche*.

(*) La perpendiculaire BG est employée dans la *Trigonométrie* : c'est le sinus de l'arc AFB.

DEUXIÈME PARTIE.

SECTION PREMIÈRE.

Des Plans, et des corps terminés par des surfaces planes.

N. B. Dans tout ce qui va suivre, les figures embrassent l'espace avec ses trois dimensions. Les lignes ponctuées sont celles qui passent derrière des plans.

DES PLANS ET DES LIGNES DROITES.

191. Puisque la ligne droite s'applique exactement au plan dans tous les *sens* (2), il est évident que dès qu'une ligne droite a deux de ses points dans un plan, elle y est tout entière, sans quoi on pourrait mener par deux points plusieurs lignes droites, l'une qui serait tirée, dans le plan même, par les deux points donnés, et les autres qui auraient des prolongemens hors du plan, ce qui ne saurait s'accorder avec l'idée qu'on a de la ligne droite.

192. L'intersection de deux plans est une ligne droite, elle est premièrement une ligne d'après les définitions du n° 1; et si l'on conçoit que, par deux points de cette intersection, on tire une droite, elle sera en même temps dans l'un et dans l'autre plan (n° précédent): elle ne pourra donc être que leur intersection.

193. Par une même ligne droite *AB*, *fig.* 106, on peut faire passer une infinité de plans différens, *CD*, *EF*, *GH*, etc. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer qu'un plan peut toujours tourner autour d'une droite Fig. 106.

tirée par deux de ses points, et prendre ainsi un nombre infini de positions différentes, sans que les points de la droite changent de place; mais on conçoit que le plan s'arrêtera, si l'on fixe, hors de cette ligne, un point par lequel il doive passer. Il résulte de là qu'un plan est donné lorsqu'on connaît trois points par lesquels il doit passer, comme une ligne droite l'est par deux.

On peut aussi le prouver en montrant que deux plans qui ont trois points communs, A, B, C, fig. 107, se confondent dans toute leur étendue; et, pour cela, il suffit d'observer que si, par un point quelconque E, pris sur un de ces plans, on mène une droite EF, rencontrant deux des trois lignes AB, AC et BC, qui joignent deux à deux les points communs, et qui, par cette raison, sont à la fois sur les deux plans (191), cette droite sera aussi commune aux mêmes plans, puisqu'elle y aura les deux points e et f, où elle coupe AB et BC.

Fig. 107.

194. Deux lignes qui se coupent sont par conséquent dans un même plan; car, en faisant passer un plan par l'une d'elles, AB, par exemple, et par un point C pris sur BC, cette dernière ayant deux de ses points, B et C, dans le plan, y sera tout entière (191).

Il est évident par là qu'en joignant deux à deux, par des droites, trois points pris d'une manière quelconque dans l'espace, le triangle résultant, ABC, sera tout entier dans un même plan.

Il n'en est pas ainsi de quatre points pris au hasard : le plan qui passe par trois d'entre eux, ne passe pas toujours par le quatrième; et, dans ce cas, le quadrilatère qui en résulte n'étant pas dans un plan, se nomme *quadrilatère gauche*.

195. Les parallèles sont toujours dans un même plan d'après leur définition; mais il faut bien observer que, dans l'espace, deux lignes droites peuvent être perpendiculaires à une troisième, sans être parallèles et sans

se rencontrer; car on peut alors mener par un seul point autant de perpendiculaires à une même droite que l'on peut faire passer de plans par cette droite, c'est-à-dire une infinité. Les droites AC, AE, AG, *fig.* 106, peuvent toutes être perpendiculaires sur AB, la première dans le plan CD, la seconde dans le plan EF, la troisième dans le plan GH. S'il en arrive autant aux lignes BD, BF et BH, BD et AC seront parallèles, comme étant perpendiculaires à la même droite AB dans le plan CD; mais ces droites ne seront parallèles à aucune des autres. Fig. 106.

THÉORÈME.

196. *Une droite* CD, fig. 108, *élevée hors d'un plan* AB, *perpendiculairement à deux autres*, DE, DF, *menées par son pied* D *dans ce plan, est perpendiculaire à toutes celles qu'on pourrait mener par ce point dans le même plan.* Fig. 108.

Démonstration. Soit DG une droite menée par le point D, d'une manière quelconque, dans le plan AB; il faut tirer une droite EF qui coupe DG, prolonger, au-dessous du plan AB, la droite CD d'une quantité $C'D = CD$, tirer enfin les droites CE, CG, $C'F$, $C'E$, $C'G$ et $C'F$. Cela fait, puisque CD est perpendiculaire sur DE et sur DF, celles-ci le seront sur CC' (13); les obliques CE et $C'E$, CF et $C'F$ seront égales comme s'écartant également du pied de la perpendiculaire (27); et, de plus, le côté EF étant commun aux triangles CEF et $C'EF$, ils auront tous leurs côtés égaux, chacun à chacun, et seront par conséquent égaux (29) : leurs angles CEF et $C'EF$ seront donc égaux. Il en sera de même des triangles CEG et $C'EG$, dans lesquels ces angles sont compris entre un côté commun EG et deux côtés égaux CE et $C'E$ (16). Il suit de là que les côtés CG et $C'G$ sont égaux; et comme ils s'écartent également du point D, il en résulte

que la droite DG est perpendiculaire sur CD (27), réciproquement, CD sur DG (*).

197. *Remarque.* La ligne CD tombant à angle droit sur toutes celles que l'on peut mener par son pied dans ce plan, et n'inclinant par conséquent d'aucun côté vers le plan, lui est *perpendiculaire.*

THÉOREME.

Fig. 109. 198. *Si trois droites*, ED, FD, CD, fig. 109, *sont perpendiculaires à une même droite* CD, *par un même point* D, *elles sont toutes les trois dans un même plan perpendiculaire à cette dernière.*

Démonstration. Si cela n'était pas, on pourrait, par les deux droites ED et FD, mener un plan AB auquel CD serait perpendiculaire, et qui couperait le plan GDC mené par GD et CD, dans une droite $G'D$ qui serait aussi perpendiculaire sur CD (196) : on aurait donc alors, sur la même droite CD, par le même point D, et dans le même plan, deux perpendiculaires, GD, $G'D$, ce qui est impossible (32).

THÉORÈME.

199. *Par un point pris, soit hors d'un plan, soit sur ce plan, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à ce plan ; et, par le même point d'une droite, il ne peut passer qu'un seul plan perpendiculaire à cette droite.*

Démonstration. Le premier cas de la proposition est presque évident par lui-même ; car si, par le point C,
Fig. 108. *fig.* 108, on pouvait abaisser sur le plan AB une autre perpendiculaire que CD, CG, par exemple, cette droite serait aussi perpendiculaire sur GD, et le triangle

(*) Cette démonstration, du même genre que celle d'Euclide, mais plus simple, m'a été communiquée par M. Cauchy, alors fort jeune et déjà très distingué.

GD aurait deux angles droits, conséquence absurde).

Dans le deuxième cas, si, par la seconde perpendiculaire *C'D*, *fig.* 109, et par la première *CD*, on faisait passer un plan, il faudrait que les deux droites *CD* et *C'D* fussent en même temps perpendiculaires à la droite *DE*, dans laquelle il rencontrerait le plan *AB*, conséquence encore absurde. L'énoncé de la proposition est donc vrai dans ses deux premières parties. Fig. 109.

A l'égard de la troisième, si, par le point *D*, on pouvait mener, perpendiculairement à *CD*, un autre plan que *AB*, qu'on tirât par ce point, dans le premier, une droite quelconque *GD*, alors le plan *GDC*, mené par cette droite et par la perpendiculaire *CD*, rencontrant le plan *AB* dans une droite *G'D* différente de *GD*, il s'ensuivrait que deux droites *G'D* et *GD*, comprises dans le même plan que *CD*, seraient perpendiculaires au même point de cette droite, ce qui est absurde (32).

THÉORÈME.

200. *Les obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire à un plan, sont égales ; celles qui s'en écartent le plus sont les plus longues, et la perpendiculaire est la plus courte de toutes les droites que l'on peut mener d'un point donné à un plan.*

Démonstration. La perpendiculaire étant *CD*, *fig.* 110, Fig. 110.
1°. tous les points situés sur la circonférence du cercle *EF*, décrit du point *D* comme centre, sont également éloignés du point *C*, puisque, les angles en *D* étant droits, les triangles *CDE* et *CDF* seront égaux comme ayant le côté *CD* commun et les côtés *DE*, *DF* égaux: donc $CE = CF$.

2°. Si l'on joint le point *G*, extérieur au cercle, avec le centre *D*, la droite *GC*, située dans le même plan que les droites *CF* et *CD*, sera plus longue que *CF* (27).

3°. La ligne *CD*, évidemment plus courte que *CF*,

sera nécessairement plus courte que toutes celles qu'on peut mener du point *C* sur le plan *AB*.

201. *Remarques.* Chaque point de la droite *CD* étant également éloigné de tous ceux de la circonférence *EF*, peut être employé à la description de cette circonférence, comme le centre *D*.

C'est par ce moyen qu'on abaisserait une perpendiculaire sur un plan, par un point extérieur d'abord du point *C*, on décrirait sur le plan *AB* un cercle dont on chercherait le centre *D*; et en le joignant avec le point *C*, on aurait la droite *CD* perpendiculaire sur le plan *AB*.

La perpendiculaire *CD*, étant la plus courte ligne que l'on puisse mener du point *C* sur le plan *AB*, offre la mesure naturelle de la distance du point *C* à ce plan.

THÉORÈME.

202. *Si, d'un point* C *de la droite* CG, *oblique au plan* AB, fig. 111, *on abaisse sur ce plan la perpendiculaire* CD, *et que l'on joigne les points* G *et* D *par une droite, la droite* EF, *menée dans le plan* AB, *perpendiculairement à* GD, *sera aussi perpendiculaire sur* CG. Fig. 111

Démonstration. Ayant pris $GE = GF$, et tiré les droites *ED*, *FD*, dans le plan *AB*, on aura $ED = FD$ (27). Menant ensuite les obliques *CE* et *CF*, elles seront égales, puisqu'elles s'écarteront également de la perpendiculaire (200); mais en les considérant, par rapport à *CG*, dans le plan *ECF*, elles s'écarteront également du pied *G* de la droite *CG*, qui sera par conséquent perpendiculaire sur *EF* (30).

THÉORÈME.

203. *Une droite* DE, fig. 112, *située hors d'un plan* AB, *mais parallèle à une ligne quelconque* AC *menée dans ce plan, ne le rencontre point, quelque prolongée qu'on la suppose, et est en même temps parallèle à* Fig. 112.

toute droite BF menée dans le plan AB, *parallèlement à* [illegible]C.

Démonstration. 1°. La droite *DE*, se trouvant avec la droite *AC* dans un même plan *AD*, ne pourrait rencontrer le plan *AB* que dans son intersection avec le précédent, c'est-à-dire sur *AC*; mais, par l'hypothèse, *DE* ne pouvant rencontrer *AC*, ne rencontrera pas non plus le plan *AB*.

2°. Si, par la droite *DE* et par l'un des points *B* de la droite *BF*, supposée parallèle à *AC*, dans le plan *AB*, on mène le plan *Df*, la droite *Bf* sera nécessairement parallèle à *DE*, puisqu'il vient d'être prouvé que *DE* ne saurait rencontrer le plan *AB* dans lequel *Bf* est aussi contenue; et, d'après ce qui précède, la ligne *AC*, parallèle à *DE*, ne pouvant pas non plus rencontrer le plan *Df* qui contient cette dernière, ne saurait par conséquent rencontrer la droite *Bf* qui s'y trouve aussi. Les droites *AC* et *Bf* contenues dans le même plan *AB*, ne se rencontrant point, seront donc parallèles; et comme on ne peut mener par le point *B* qu'une seule parallèle à *AC* (40), il s'ensuit que *Bf* se confond avec *BF*, ou que *DE* est parallèle à *BF*, deuxième partie de la proposition.

204. *Corollaire.* Il est évident par là que deux droites *DE* et *BF*, parallèles à une troisième *AC*, sont parallèles entre elles; car, en imaginant un plan *AB* qui passe par les droites *BF* et *AC*, la droite *DE* remplira les conditions de l'énoncé du théorème ci-dessus.

THÉORÈME.

205. *Les angles* BCD *et* EÂF *qui ont les côtés parallèles et l'ouverture tournée dans le même sens, sont égaux, quoique situés dans des plans différens.*

Démonstration. Si, par les côtés parallèles *CD* et *AE*, *CB* et *AF*, on fait passer deux plans *AD* et *AB*, qu'on prenne $CD = AE$, $CB = AF$, et qu'on mène *DE*,

BF, *DB*, *EF*, les figures *ACDE*, *ACBF*, seront des parallélogrammes (79); les côtés *ED* et *BF* seront conséquent égaux à *AC*, parallèles entre eux (n° précédent), et formeront un parallélogramme dans lequel on aura $DB = EF$. Les triangles *DCB* et *AEF*, auront donc leurs côtés égaux chacun à chacun, seront égaux et donneront $BCD = EAF$.

THÉORÈME.

206. *Si, dans chacun des plans* AB *et* AD, *on mène, par un point quelconque* H *de leur commune section* AC, *des droites* IH *et* HG, *respectivement perpendiculaires à cette commune section, et que l'angle* IHG *qu'elles forment entre elles soit égal à l'angle* ihg *que forment les droites* ih *et* hg, *menées de la même manière dans les plans* ab *et* ad, *par rapport à la commune section* ac *de ceux-ci, on pourra faire coïncider les deux premiers plans avec les deux derniers.*

Démonstration. Si l'on applique le plan *ab* sur *AB*, de manière que *ac* tombe sur *AC*, et que le point *h* soit sur le point *H*, la droite *hg* coïncidera nécessairement avec *HG*; puisque les angles *ahg* et *AHG* sont tous deux droits. De plus, les droites *IH* et *HG*, perpendiculaires à *AH*, déterminent un plan *GHI* perpendiculaire à cette droite (198); les droites *ih* et *hg* en déterminent pareillement un autre *ghi*, perpendiculaire à *ah*. Mais lorsque *ah* est confondue avec *AH*, les plans *GHI* et *ghi* doivent se confondre aussi, sans quoi il serait possible de mener par le même point *H* deux plans perpendiculaires à la même droite (199); et comme les angles *GHI* et *ghi* sont égaux par l'hypothèse, il s'ensuit que, *hg* coïncidant avec *HG*, *ih* doit aussi coïncider avec *IH*; d'où il est évident que les plans *ad* et *AD* coïncident aussi, puisque les deux droites *ah* et *ih*, placées dans le premier, se confondent avec les deux droites *AH* et *IH*, placées dans le second (194).

207. 1er *Corollaire.* Il suit de là que l'espace compris entre deux plans *AB* et *AD* qui se coupent, considéré entre ces limites, peut, quoique indéfini dans les autres sens, être comparé à tout autre espace terminé de la même manière. Cet espace, qui est à l'égard des plans ce que l'angle est à l'égard des droites (7), constitue *l'angle de ces plans*, et en mesure *l'inclinaison*.

Je le nommerai désormais *angle dièdre*, c'est-à-dire *angle à deux faces*; et je le désignerai par quatre lettres, dont les deux du milieu marqueront la commune section des plans, ou *l'arête* de l'angle dièdre (*). L'angle formé par les plans *AB* et *AE*, *fig.* 113, qui se rencontrent suivant la ligne *AG*, sera l'angle dièdre *BGAE* ou *DHGC*. Fig. 113.

Il suit encore du n° précédent, que l'angle *CHD*, formé par les droites *HD* et *HC*, menées perpendiculairement à la commune section *AG*, des plans *AB* et *AE*, est la mesure naturelle de l'angle dièdre qu'ils comprennent entre eux; car il est visible que si l'on fait tourner le plan *AC* autour de la droite *AG*, commune section des deux plans proposés, ou arête de l'angle dièdre, la droite *HC*, qui coïncidera avec *HD* lorsque le plan *AC* sera couché sur *AB*, décrira dans ce mouvement un plan perpendiculaire à *AG* (198), et viendra se placer en *HF* dans le prolongement de *HD*, lorsque le plan *AC* se trouvera dans celui de *AB*; en sorte que l'angle *CHD* commence, augmente et finit avec celui des plans. De plus, si l'on compare l'angle de deux plans *ab* et *ae* avec celui de deux autres plans *AB* et *AE*, on trouvera que le rapport de ces angles dièdres est le même que le rapport des angles *chd* et

(*) On le nomme ordinairement *angle plan*; mais cette expression est très vicieuse, car elle n'offre que l'idée d'un angle contenu dans un plan, et par conséquent celle de l'angle formé par deux droites. Le mot *dièdre* est composé de deux mots grecs, dont le premier signifie *deux*, et le second *face* ou *base*.

CHD. En effet, lorsque ces angles sont commensurables entre eux, qu'on les divise en parties qui soient aliquotes de l'un et de l'autre, par des droites *hd'*, *HD'*, *HD''*, et que l'on mène, par la commune section *cd* et par *hd'*, le plan *ad'*, par la commune section *AD* et par *HD'*, *HD''*, les plans *AD'*, *AD''*, on formera d'une part les angles dièdres *dhgd'*, *d'hgc*, et de l'autre les angles dièdres *DHGD'*, *D'HGD''*, *D''HGC*, qui seront tous égaux (206) ; et l'angle dièdre *dhgc* sera à l'angle dièdre *DHGC*, comme le nombre des parties contenues dans l'angle *chd* est au nombre des parties contenues dans l'angle *CHD*.

Si les angles *chd* et *CHD* n'étaient pas commensurables entre eux, un raisonnement absolument semblable à celui du n° 109, prouverait que leur rapport ne saurait être ni plus petit ni plus grand que le rapport des angles dièdres *bgac* et *BGAC*. Il résulte donc de là que *l'angle dièdre a pour mesure l'angle plan formé par deux droites menées dans chacune de ses faces, perpendiculairement à leur commune section et par un même point de cette droite.*

Il est évident que les angles dièdres jouissent des mêmes propriétés que les angles plans qui les mesurent ; les angles dièdres *LGHI* et *BGHC*, par exemple, opposés par l'arête *GH*, sont égaux, puisqu'ils ont pour mesures les angles plans *IHF* et *CHD*, opposés par le sommet.

208. 2e *Corollaire*. Un plan *CD* mené par la ligne *FG* perpendiculaire au plan *AB*, *fig.* 114, ne penche d'aucun côté de ce dernier, auquel il est par conséquent *perpendiculaire* ; car si l'on mène dans le plan *AB*, perpendiculairement à *CE*, la droite *FK*, et qu'on la prolonge en *K'*, les angles *GFK* et *GFK'* étant droits (196), il résulte, du numéro précédent, que les angles dièdres *ACED* et *BECD*, formés par le plan *CD* sur les deux parties *AE* et *CB* du plan *AB*, sont égaux comme droits.

Fig. 114.

Il est visible que, par la droite *CE*, prise dans le plan *AB*, on ne peut élever perpendiculairement sur celui-ci que le seul plan *CD*.

THÉORÈME.

209. *Si, par un point quelconque de la commune section* CE *des deux plans* AB, CD *qui se rencontrent à angle droit, on élève, perpendiculairement au premier, une droite* FG, *cette droite sera comprise dans le second.*

Démonstration. En effet, si elle n'y était pas, on pourrait encore, par cette ligne et par la ligne *CE*, mener un second plan perpendiculaire à *AB*, ce qui est absurde (n° précédent).

La droite *FG* est d'ailleurs perpendiculaire sur la commune section *CE* (196).

210. *Corollaire.* Il suit de là que l'intersection *GH*, *fig.* 115, de deux plans *CD* et *EF* perpendiculaires à un troisième *AB*, est perpendiculaire à ce dernier; car la perpendiculaire élevée par le point *G* du plan *AB*, devant, par le n° précédent, se trouver en même temps dans le plan *CD* et dans le plan *EF*, ne peut être que leur commune section *GH*. Fig. 115.

THÉORÈME.

211. *La droite* FG, fig. 114, *menée perpendiculairement à* CE, *dans le plan* CD *qui rencontre le plan* AB *à angle droit, est perpendiculaire à ce dernier.* Fig. 114.

Démonstration. Si, par le point *F*, on mène dans le plan *AB*, la droite *FK* perpendiculaire à *CE*, l'angle *GFK* sera nécessairement droit, puisque le plan *CD* est, par l'hypothèse, perpendiculaire sur *AB* (208). La ligne *GF* se trouvant donc en même temps perpendiculaire aux deux droites *CE* et *FK*, menées dans le plan *AB*, sera aussi perpendiculaire à ce plan (196).

THÉORÈME.

212. *Deux droites* FG *et* HI, *perpendiculaires à un même plan, sont parallèles entre elles; et réciproquement, si la droite* FG *est perpendiculaire au plan* AB, *et que* HI *soit parallèle à* FG, HI *sera aussi perpendiculaire au plan* AB.

Démonstration. Si l'on joint les points F et I par la droite CE, et que l'on mène par cette ligne et par la ligne FG, le plan CD, qui sera perpendiculaire à AB, il comprendra la ligne HI, puisqu'elle est aussi perpendiculaire à AB (209); et cette dernière se trouvant alors dans le même plan que FG et perpendiculaire à la même droite CE, sera parallèle à FG (39).

Réciproquement, si les lignes FG et HI sont parallèles, le plan CD qui les contiendra sera perpendiculaire sur AB, lorsque l'une d'elles, FG, par exemple, sera perpendiculaire sur ce dernier; et comme, en vertu du parallélisme, l'autre droite HI se trouvera perpendiculaire sur CE aussi bien que FG, elle sera perpendiculaire au plan AB, d'après le n° précédent.

THÉORÈME.

213. *Deux plans perpendiculaires à une même droite* GH, fig. 116, *ne sauraient se rencontrer.* Fig. 116.

Démonstration. S'ils se rencontraient en effet, et que l'on joignît l'un des points de leur commune section qu'on suppose être EF, avec les points G et H, où la perpendiculaire GH les rencontre, les droites HF et GF, qui, partant d'un même point, formeraient un triangle avec GH, seraient nécessairement dans le même plan avec cette dernière; et comme elles devraient la rencontrer à angles droits (196), il s'ensuivrait que, d'un même point, on pourrait abaisser dans le même plan deux perpendiculaires sur une droite, ce qui est absurde (32).

214. Deux plans perpendiculaires à une même droite, ne se rencontrant point, sont *parallèles* entre eux.

THÉORÈME.

215. *Lorsque deux plans parallèles* AB *et* CD, fig. 117, *sont coupés par un troisième* FH, *les intersections* EF *et* GH *sont parallèles entre elles.* Fig. 117.

Démonstration. Il est visible que les droites *EF* et *GH*, comprises dans le même plan *FH*, ne peuvent se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge, sans que les plans *AB* et *CD*, qui les contiennent respectivement, ne se rencontrent aussi, ce qui ne saurait arriver puisqu'ils sont parallèles.

216. *Corollaire.* Il suit de là, 1°. que deux plans parallèles ont leurs perpendiculaires communes;

2°. Que ces perpendiculaires sont égales, d'où il résulte que la distance des plans parallèles est la même dans tous leurs points.

En effet, si l'on élève sur le plan *AB*, *fig.* 118, la perpendiculaire *GH*, et qu'on tire par son pied les droites *GL* et *GI*, les plans *LGH* et *IGH* couperont les plans *AB* et *CD*, suivant des droites *HM* et *HK*, parallèles aux droites *GL* et *GI*, et par conséquent perpendiculaires comme ces dernières à *GH*: donc (296) *GH* est perpendiculaire au plan *CD* en même temps qu'au plan *AB*. Fig. 118.

En second lieu, si l'on élève encore sur le plan *AB* la perpendiculaire *RS*, et que l'on conçoive le plan *GRS*, la figure *GHSR* sera un parallélogramme rectangle (215), et donnera par conséquent $GH = RS$.

THÉORÈME.

217. *Si deux droites qui se coupent sont parallèles à deux autres droites qui se coupent, le plan déterminé par les deux premières sera parallèle à celui que déterminent les deux autres.*

Démonstration. En effet, si les droites *HM* et *HK* sont parallèles aux droites *AP* et *AN*, et que l'on abaisse

du point H, perpendiculairement au plan AB, la droite GH, elle sera perpendiculaire sur chacune des droites GL et GI, menées dans ce plan parallèlement aux droites AP et AN, et qui seront parallèles aux droites HM et HK (204); la ligne GH sera donc aussi perpendiculaire sur ces dernières, et par conséquent sur le plan CD qu'elles déterminent (196): les plans AB et CD étant alors perpendiculaires à la même droite GH, seront donc parallèles (214).

218. *Corollaire.* Il suit de là que, par deux droites HQ et GI, *fig.* 119, qui, ne se coupant point et n'étant point parallèles, ne sauraient être comprises dans un même plan, on peut toujours faire passer deux plans parallèles, dont la plus courte distance donne celle des deux droites proposées. Fig. 119.

En effet; si l'on mène par un point quelconque T de la droite HQ, une ligne TD parallèle à GI, et par un point quelconque R de la droite GI, une ligne RO parallèle à HQ, les droites HQ et TD, respectivement parallèles aux droites RO et GI, détermineront un plan parallèle à celui qui passera par ces dernières.

Il est visible que les droites HQ et GI ne peuvent s'approcher de plus près que ces plans.

219. *Remarque.* Si, par un point quelconque R de la droite GI, on mène une perpendiculaire RS sur le plan CD, le plan GS, passant par RS et par GI, sera en même temps perpendiculaire sur CD et sur AB (216), et rencontrera le premier, suivant une droite HK parallèle à GI (215), et qui coupera la droite HQ au point H, où celle-ci s'approche le plus de GI; car, si du point H on abaisse sur GI la perpendiculaire HG, elle sera perpendiculaire au plan AB (211) et par conséquent aussi au plan CD (216): elle mesurera donc la plus courte distance des plans et des droites.

Il faut bien observer qu'elle est perpendiculaire en même temps aux deux droites proposées HQ et GI (196).

THÉORÈME.

220. *Deux droites* GH *et* IK, *comprises entre deux plans parallèles* AB *et* EF, fig. 120, *sont toujours coupées en parties proportionnelles, par un troisième plan CD parallèle aux deux premiers.* Fig. 120.

Démonstration. Pour le prouver, on joindra d'abord le point *H* et le point *I* par une droite *HI*, puis on tirera dans le plan *CD*, par les points *L*, *M*, *N* où les droites *GH*, *HI*, *IK* le rencontrent, les droites *LM* et *MN* que l'on pourra considérer comme les intersections du plan *CD* avec les plans triangulaires *GHI*, *HIK*, et qui seront par conséquent parallèles aux droites *GI* et *HK*, dans lesquelles *GHI* rencontre *AB*, et *HIK* rencontre *EF* (215). Le triangle *GHI*, ayant donc ses côtés *GH* et *HI* coupés par la ligne *LM* parallèle à *GI*, donnera

$$HL : LG :: HM : MI, \quad HL : HG :: HM : HI;$$

MN étant parallèle à *HK*, le triangle *HIK* donnera

$$HM : MI :: KN : NI, \quad HM : HI :: KN : KI,$$

d'où l'on conclura, conformément à l'énoncé,

$$HL : LG :: KN : NI, \quad HL : HG :: KN : KI.$$

221. Lorsque plusieurs plans *ASB*, *BSC*, *CSD*, *DSE*, *ESF*, *FSG*, *GSA*, *fig.* 121, qui passent par le même point *S*, se rencontrent deux à deux, l'espace qu'ils comprennent entre eux, indéfini dans le sens opposé au point S, se nomme ordinairement *angle solide*; mais je crois devoir l'appeler *angle polyèdre*, ou angle à plusieurs faces, par la raison que j'ai déjà donné le nom d'*angle dièdre*, ou angle à deux faces, à celui que deux plans forment entre eux (*). Cette nomenclature offre Fig. 121.

(*) On verra plus bas des raisons assez fortes pour bannir de la Géométrie le mot *solide*, dont la signification la plus connue dans notre langue, répond à une idée très différente de celle qu'on y attache en Géométrie.

d'ailleurs l'avantage de distinguer les angles de ce genre par le nombre de leurs faces. L'angle à trois faces $SABC$, Fig. 122. *fig.* 122, sera nommé *angle trièdre;* un angle qui aurait quatre faces serait un *angle tétraèdre;* l'angle Fig. 121. $SABCDEFG$, *fig.* 121, est un *angle polyèdre.*

Le point S où se rencontrent toutes les faces de l'angle, en est le *sommet;* leurs intersections successives SA, SB, SC, SD, SE, etc. sont les *arêtes* de l'angle. Ce qui constitue l'angle polyèdre $SABCDEFG$, et le distingue de tout autre angle composé du même nombre de faces, ce sont les angles plans ASB, BSC, CSD, etc. formés par ses arêtes consécutives, et les inclinaisons respectives de ces faces, ou les angles dièdres qu'elles forment entre elles.

Il y a donc dans l'angle trièdre six choses à considérer, savoir : trois angles plans et trois angles dièdres.

THÉORÈME.

222. *La somme de deux quelconques des angles plans qui composent un angle trièdre est toujours plus grande que le troisième.*

Démonstration. Si les angles plans ASB, ASC, BSC, Fig. 122. *fig.* 122, étaient égaux entre eux, la proposition serait évidente par elle-même. Dans le cas contraire, soit ASB le plus grand des trois; on y mènera la droite SD, de manière que l'angle ASD soit égal à ASC; on prendra $SD = SC$, et l'on tirera les droites ADB, AC, BC. Les deux triangles ASC et ASD seront égaux, puisque les angles ASC et ASD, égaux par construction, se trouveront compris entre des côtés respectivement égaux; on aura donc $AC = AD$; mais $AC + BC > AB$ (15), ou $AC + BC > AD + BD$: retranchant de part et d'autre les lignes égales AC et AD, il en résultera $BC > BD$. Or, les triangles BSC et BSD ayant les côtés SC et SD égaux entre eux et le côté SB commun, l'angle BSC, opposé au côté BC plus grand que BD, surpassera

nécessairement l'angle *BSD* opposé à ce dernier (19); d'où il est évident que $ASC + BSC = ASD + BSC$ surpasse $AS\,D + BSD$ ou ASB.

THÉORÈME.

223. *Si deux angles trièdres* SABC, S'A'B'C', fig. 123, *sont formés de trois angles plans égaux chacun à chacun, les angles dièdres compris entre les angles plans égaux seront égaux, c'est-à-dire que les faces semblables seront également inclinées entre elles dans chacun des angles trièdres proposés.* Fig. 123.

Démonstration. Soit $ASB = A'S'B'$, $ASC = A'S'C'$, $BSC = B'S'C'$; si, sur les arêtes *BS* et *B'S'* par lesquelles se joignent des angles plans égaux, on prend $BS = B'S'$, et que, par les points *B* et *B'*, on conçoive des plans *ABC*, *A'B'C'* perpendiculaires à ces arêtes, les triangles *BSC*, *ASB* étant rectangles en *B*, comme les triangles *B'S'C'*, *A'S'B'* le sont en *B'*, seront égaux à ces derniers, à cause de l'égalité des côtés *BS* et *B'S'*, et de celle des angles *BSC* et *B'S'C'*, *ASB* et *A'S'B'* (18) : on aura donc

$$SC = S'C',\ SA = S'A',\ BC = B'C',\ AB = A'B'.$$

Mais comme $ASC = A'S'C'$, les triangles *ASC* et *A'S'C'* seront égaux (16), et donneront par conséquent $AC = A'C'$. Enfin, les trois côtés des triangles *ABC* et *A'B'C'* étant égaux, les angles *ABC* et *A'B'C'*, qui mesurent les angles dièdres formés par les plans *BSC* et *ASB*, *B'S'C'* et *A'S'B'* (206), seront égaux comme le porte l'énoncé de la proposition

La construction ci-dessus, supposant que le plan *ABC* rencontre en même temps les arêtes *SA* et *SC*, ne peut avoir lieu lorsque les angles *ASB* et *BSC* ne sont pas tous deux aigus; mais si un seul ou tous les deux étaient obtus, on prolongerait au-delà du point *S*, soit l'une des arêtes *SA*, *SB*, soit toutes les deux. Ces prolongemens donneraient un nouvel angle trièdre, dans lequel l'angle dièdre formé sur l'arête *SB* serait ou le supplé-

ment de $CSBA$, ou la continuation de cet angle (207). La même construction opérerait un changement analogue sur l'angle trièdre $S'A'B'C'$.

Quand les deux arêtes SA et SC sont perpendiculaires à SB, elles sont parallèles au plan ABC; mais alors leur angle ASC mesure l'inclinaison des plans SBA et SBC; il en est de même dans le second angle trièdre, et la proposition est évidente par elle-même.

Si un seul des angles ASB, BSC, est droit, le premier, par exemple, *fig.* 124, on prolongera les arêtes SA et SB s'il est nécessaire pour que les angles ASC et BSC soient aigus; on mènera, d'un point quelconque de l'arête SC, les plans CAD et CBD perpendiculaires, l'un sur SA, l'autre sur SB; ASB leur sera perpendiculaire (208), et ils se couperont par conséquent suivant une droite CD perpendiculaire à ce plan (210). Prenant $S'C' = SC$, et faisant la même construction sur l'angle trièdre $S'A'B'C'$, les triangles SAC et $S'A'C'$, SBC et $S'B'C'$ seront respectivement égaux; car ils ont deux angles et un côté égaux : donc

Fig. 124.

$$AC = A'C',\ BC = B'C',\ AS = A'S',\ BS = B'S'.$$

Les deux dernières égalités établissent celle des rectangles $ASBD$ et $A'S'B'D'$; donc $BD = B'D'$: alors les triangles CBD, $C'B'D'$, rectangles en D et D', ayant, chacun à chacun, deux côtés égaux, dont un est hypoténuse, seront égaux (34); ainsi $CD = C'D'$, et par conséquent les angles CBD et $C'B'D'$, qui mesurent les inclinaisons des plans ASB et BSC, $A'S'B'$ et $B'S'C'$, seront égaux aussi (*).

(*) M. Vecten, professeur au Lycée de Nîmes, m'a fait remarquer qu'en menant par le sommet S le plan perpendiculaire à l'arête SB, on pouvait former une construction applicable à tous les cas; mais la figure étant un peu plus difficile à concevoir que la figure 123, j'ai cru devoir conserver ici la démonstration de Robert Simson qui, le premier, a donné ce théorème et le suivant pour remplir une lacune que présentait le 11e livre des *Élémens d'Euclide*.

THÉORÈME.

224. *Deux angles trièdres* SABC *et* S″A″B″C″, fig. 123, *formés par trois angles plans égaux et semblablement disposés entre eux, sont égaux dans toutes leurs parties.* Fig. 123.

Démonstration. En effet, ayant fait coïncider les faces égales ASB, $A''S''B''$, par les arêtes AS et $A''S''$, les faces égales ASC et $A''S''C''$, qui sont également inclinées sur les précédentes (n° précédent), coïncideront aussi; et à cause de l'égalité des angles plans ASB, $A''S''B''$, ASC, $A''S''C''$, les arêtes SB et $S''B''$, SC et $S''C''$ coïncideront, et par conséquent aussi les faces BSC et $B''S''C''$, déterminées par ces arêtes.

225. *Remarque.* Il est bien important d'observer que la coïncidence des angles trièdres ne peut avoir lieu que dans le cas où les faces égales sont semblablement placées dans l'un ou dans l'autre; c'est-à-dire lorsque tous deux étant posés sur des faces égales, et ayant leur sommet tourné du même côté, les angles dièdres égaux sont ouverts dans le même sens, ainsi que cela arrive à l'égard des angles $SABC$ et $S''A''B''C''$, mais non pas à l'égard des angles $SABC$ et $S'A'B'C'$. Dans ce dernier, l'angle dièdre $C'B'S'A'$, compris entre les angles plans $A'S'B'$, $B'S'C'$, a son ouverture en sens contraire de celle de l'angle dièdre $CBSA$ qui lui est égal comme compris entre les angles plans ASB, BSC, respectivement égaux aux précédens; et l'on voit bien qu'il est impossible de faire coïncider ces deux angles trièdres.

L'égalité des triangles ABC et $A'B'C'$, sur laquelle repose celle des angles dièdres formés par des angles plans égaux, subsiste toujours, parce que si on les conçoit détachés de l'angle trièdre, on peut retourner le plan du second pour l'appliquer sur le premier, renversement qui ne saurait s'effectuer dans les angles polyèdres. On ne peut donc conclure l'égalité des angles trièdres $SABC$ et $S'A'B'C'$ que de celle de leurs parties constituantes, et parce qu'il n'y a pas de raison pour

qu'ils diffèrent l'un de l'autre, étant formés des mêmes angles plans et des mêmes angles dièdres.

Comme leur différence ne résulte que d'une simple transposition de parties, c'est-à-dire de ce que l'ordre des angles plans de l'un étant ASB, ASC, CSB, celui des angles correspondans de l'autre est $A'S'B'$, $C'S'B'$, $A'S'C'$, je crois qu'on pourrait les nommer angles trièdres *inverses* l'un de l'autre, et dire en conséquence que, par rapport à l'espace qu'ils renferment, *deux angles trièdres inverses l'un de l'autre sont égaux* (*).

Il y a encore plusieurs cas d'égalité dans les angles trièdres, mais le précédent suffit à mon objet.

THÉORÈME.

226. *La somme des angles plans qui composent un angle polyèdre* convexe, *c'est-à-dire dont toutes les arêtes sont saillantes ou extérieures, mais d'ailleurs quelconques, est toujours moindre que quatre droits.*

Démonstration. Si l'on ferme l'angle polyèdre $SABCDE$, *fig.* 125, par un plan quelconque, les côtés du polygone $ABCDE$, formé par les intersections de ce plan avec chacune des faces de l'angle polyèdre proposé, changeront ces faces en autant de triangles. En

Fig. 125.

(*) M. Legendre, à qui l'on doit la remarque et l'éclaircissement de la difficulté que présente l'égalité des angles trièdres inverses, les nomme *symétriques*, parce qu'il les considère comme construits de différens côtés d'un même plan. En effet, si l'on retournait l'angle trièdre $S'A'B'C'$ pour le placer au-dessous de $S''A''B''C''$, en $S''A''B''C'''$, en faisant coïncider l'angle plan $A'S'B'$ avec son égal $A''S''B''$, par les arêtes correspondantes $A'S'$ et $A''S''$, $B'S'$ et $B''S''$, les deux angles trièdres présenteraient de chaque côté du plan $A''S''B''$ des espaces symétriques. M. Legendre a donné à cette idée ingénieuse des développemens qui jettent un grand jour sur la théorie des polyèdres (ou corps à faces planes), et pour lesquels je renvoie à son ouvrage.

Il faut remarquer aussi que trois plans qui se coupent étant prolongés au-delà de leur point de rencontre, forment huit angles trièdres, et que ceux de ces angles qui sont opposés par le sommet, sont inverses l'un de l'autre.

considérant séparément l'angle trièdre $BACS$, on a

$$SBA + SBC > ABC \text{ (222)},$$

l'angle trièdre $CBDS$ donne de même

$$SCB + SCD > BCD,$$

et ainsi des autres : la somme des angles SAB, SBA, SBC, SCB, etc. formés sur les côtés AB, BC, etc. des triangles ASB, BSC, etc., surpassera donc celle des angles intérieurs du polygone $ABCDE$, et vaudra par conséquent plus de deux fois autant d'angles droits que ce polygone a de côtés moins deux, ou que l'angle polyèdre a de faces moins deux (82). Si l'on retranche cette somme de celle de tous les angles des triangles SAB, SBC, SCD, etc., composée d'autant de fois deux angles droits que l'angle polyèdre a de faces, il restera nécessairement moins de deux fois deux angles droits ou de quatre angles droits, pour la somme des angles plans ASB, BSC, etc. formés au sommet S de l'angle polyèdre $SABCDE$.

DES CORPS TERMINÉS PAR DES PLANS.

227. Les corps terminés par des plans se nomment *corps polyèdres*, ou simplement *polyèdres*.

On ne peut fermer de toutes parts un espace par un nombre de plans moindre que quatre. Le corps $SABC$, *fig.* 126, compris entre les quatre plans ASB, ASC, BSC, ABC, se nomme *tétraèdre*. Fig. 126.

Tout corps dont une des faces est un polygone quelconque et dont toutes les autres sont des triangles ayant leur sommet au même point, se nomme *pyramide*. Le corps $SABCDE$, *fig.* 127, est une pyramide *pentagonale*, parce que sa *base* $ABCDE$ est un pentagone ; le point S, sommet commun des triangles ASB, BSC, CSD, DSE, ESA, est aussi le *sommet* de la pyramide. Le tétraèdre $SABC$ de la figure 126 est lui-même une pyramide triangulaire. Tous ses angles polyèdres n'ont que trois faces, ce qui n'a lieu que pour les angles adjacens à la base dans les autres pyramides ; et l'on Fig. 127. Fig. 126.

peut prendre pour base celle de ses faces qu'on veut.

Les tétraèdres sont dans l'espace ce que les triangles sont sur un plan; car, de même qu'on fixe la position d'un point sur un plan, en le liant, par un triangle, à deux points donnés, on fixe celle d'un point dans l'espace, en le liant, par un tétraèdre, à trois points donnés. Voici les principales propriétés des tétraèdres, jointes à quelques-unes de celles des pyramides, qui ont la plus grande analogie avec les tétraèdres.

THÉORÈME.

228. *Si les angles trièdres* S *et* S′ *des tétraèdres* SABC, S′A′B′C′, fig. 126, *sont composés de triangles égaux et semblablement disposés, ces tétraèdres seront égaux; et ils le seront encore si les faces* SAB *et* SAC *de l'un sont égales aux faces* S′A′B′ *et* S′A′C′ *de l'autre, assemblées de la même manière, et forment entre elles le même angle dièdre que celles-ci.*

Fig. 126.

Démonstration. 1°. Il est évident qu'en faisant coïncider la face *SAB* avec la face *S′A′B′*, les autres faces égales, étant également inclinées sur celles-ci (223), coïncideront aussi.

2°. La face *SAB* coïncidant avec *S′A′B′*, la face *SAC* coïncidera avec *S′A′C′*, quand l'angle dièdre *CSAB* sera égal à *C′S′A′B′*; et les droites *SB* et *SC* se trouvant alors confondues avec *S′B′* et *S′C′*, les faces *SBC* et *S′B′C′* coïncideront nécessairement.

229. On donne le nom de *polyèdres semblables* à ceux dont les faces sont des polygones semblables et dont les plans sont en même nombre, semblablement disposés et également inclinés les uns à l'égard des autres, ou forment des angles dièdres égaux. On va voir que la dernière de ces conditions résulte des autres pour les tétraèdres et les pyramides (*).

(*) M. Cauchy, déjà cité (page 134), a démontré, dans le 16e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, qu'il en était de

THÉORÈME.

230. *Lorsque les triangles qui forment deux angles trièdres homologues de deux tétraèdres sont semblables chacun à chacun, et semblablement disposés, ces tétraèdres sont semblables ; et ils le seront encore si deux faces de l'un font entre elles le même angle que deux faces de l'autre, sont en outre semblables à celles-ci, et assemblées par des côtés homologues.*

Démonstration. 1°. Si les triangles SAB, SAC, SBC, *fig.* 126, sont respectivement semblables aux triangles Fig. 126.
$S'DE$, $S'DF$, $S'EF$, et disposés de la même manière, que l'on prenne sur l'arête SD, homologue dans le tétraèdre $S'DEF$, à l'arête SA du tétraèdre $SABC$, la partie $S'A' = SA$, et que, par le point A', on mène le plan $A'B'C'$ parallèle à DEF, on déterminera, dans le tétraèdre $S'DEF$, un tétraèdre $S'A'B'C'$ semblable à $S'DEF$ et égal à $SABC$.

En effet, il est évident qu'en vertu du parallélisme des droites $A'B'$ et DE, $A'C'$ et DF, $B'C'$ et EF (205), les faces $S'A'B'$ et $S'DE$, $S'A'C'$ et $S'DF$, $S'B'C'$ et $S'EF$, situées deux à deux dans le même plan, seront semblables. De plus, les triangles $A'B'C'$ et DEF, situés dans des plans différens, ayant aussi leurs côtés parallèles, et par conséquent leurs angles égaux (205), seront semblables. Les deux tétraèdres $S'A'B'C'$ et $S'DEF$ ayant donc leurs faces semblables et leurs angles trièdres homologues formés par des angles plans égaux, auront, chacun à chacun, tous leurs angles dièdres égaux (223), et seront nécessairement semblables.

Maintenant, les triangles $S'A'B'$ et $S'A'C'$, équiangles à $S'DE$ et à $S'DF$, par construction, et par conséquent à SAB et à SAC, d'après l'hypothèse, seront égaux à ces

même pour tous les polyèdres convexes, ce qui était supposé sans preuve, dans les *Élémens d'Euclide*, et étendu à tous les polyèdres, sans la restriction dont Robert Simson avait déjà reconnu le besoin. (Voyez aussi la *Géométrie* de M. Legendre, 9e édition.)

derniers, puisque les deux côtés homologues $S'A'$ et SA sont égaux (18) : on aura donc ainsi $S'B'=SB$, $S'C'=SC$, ce qui entraînera l'égalité des triangles équiangles $S'B'C'$ et SBC, et par suite celle des tétraèdres $S'A'B'C'$ et $SABC$ (228). Donc enfin les tétraèdres $SABC$ et $S'DEF$, l'un égal, l'autre semblable à $S'A'B'C'$, sont semblables entre eux.

2°. Si les triangles SAB et SAC sont semblables aux triangles $S'DE$ et $S'DF$, de plus, joints par des côtés homologues à ceux qui réunissent ces derniers, et que l'angle dièdre $CSAB$ soit égal à l'angle dièdre $FS'DE$, le tétraèdre $S'A'B'C'$, construit ci-dessus, sera égal à $SABC$ (228), comme ayant deux faces, $S'A'B'$ et $S'A'C'$, égales aux faces SAB et SAC, et formant entre elles le même angle dièdre que ces dernières : le tétraèdre $SABC$ sera donc encore semblable à $S'DEF$.

THÉORÈME.

231. *Deux pyramides quelconques sont semblables lorsque toutes leurs faces sont semblables et semblablement disposées.*

Fig. 127. *Démonstration.* Soient $SABCDE$, $S'FGHIK$, *fig.* 127, les deux pyramides proposées ; il est visible que tous leurs angles dièdres font partie des angles trièdres adjacens aux bases $ABCDE$, $FGHIK$; mais ceux-ci, lorsqu'ils sont homologues, comme B et G, C et H, etc., étant compris entre des faces semblables et semblablement disposées, sont formés d'angles plans égaux ; ils ont par conséquent leurs angles dièdres égaux : les pyramides réunissent donc tous les caractères de la similitude (229).

232. 1er. *Corollaire.* Si l'on coupe la pyramide $S'FGHIK$ par un plan $A'B'C'D'E'$ parallèle à $FGHIK$, on aura une pyramide $S'A'B'C'D'E'$ semblable à la pyramide entière ; car il est facile de reconnaître que toutes les faces de l'une seront semblables à celles de l'autre, et semblablement disposées, puisque les trian-

gles $A'B'C'$, $A'C'D'$, $A'D'E'$ sont respectivement semblables aux triangles FGH, FHI, FIK, d'où il résulte que les bases $A'B'C'D'E'$ et $FGHIK$ sont semblables entre elles.

Il est visible que les pyramides $S'A'B'C'D'E'$ et $SABCDE$ seront égales, si l'une des arêtes $S'A'$ de la première est égale à sa correspondante SA dans la seconde; car les faces de l'une et de l'autre étant semblables à celles de la pyramide $S'FGHIK$, sont semblables entre elles, et doivent par conséquent devenir égales lorsqu'elles ont un côté commun, puisqu'en vertu du n° 18, des triangles équiangles sont égaux quand ils ont, chacun à chacun, un côté égal : de plus, les angles trièdres de chacune de ces pyramides, étant formés d'angles plans égaux, auront leurs angles dièdres égaux (223). Par conséquent, lorsque les bases $A'B'C'D'E'$ et $ABCDE$ coïncideront, les pyramides $S'A'B'C'D'E'$ et $SABCDE$ coïncideront aussi.

En menant des plans par les sommets S et S' et par les diagonales AC, AD, FH et FI, on prouverait encore, avec un peu d'attention, que les pyramides $SABCDE$, $S'A'B'C'D'E'$ et $S'FGHIK$ sont composées d'un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés, et que les pyramides $S'A'B'C'D'E'$ et $SABCDE$, le sont de tétraèdres égaux, d'où l'on pourrait aussi conclure que ces dernières sont égales.

Il convient d'observer que l'égalité de ces pyramides emporte celle des perpendiculaires SP et $S'P'$, abaissées des sommets S et S', sur les bases respectives.

233. 2e *Corollaire.* Il suit de la similitude des faces des pyramides $SABCDE$, $S'FGHIK$, que les arêtes de ces pyramides sont proportionnelles entre elles et aux perpendiculaires SP et $S'Q$, abaissées des sommets sur les bases; car, en comparant les faces triangulaires homologues SAB et $S'FG$, SBC et $S'GH$, etc., on aura ces suites de rapports égaux :

$$SA : S'F :: AB : FG :: SB : S'G,$$
$$SB : S'G :: BC : GH :: SC : S'H,$$

desquelles on tirera celle-ci :

$$SA : S'F :: SB : S'G :: SC : S'H :: \text{etc.}$$
$$:: AB : FG :: BC : GH :: \text{etc.}$$

De plus, le parallélisme des plans $A'B'C'D'E'$ et $FGHIK$ donne (220),

$$S'A' : S'F :: S'P' : S'Q,$$

ou

$$SA : S'F :: SP : S'Q,$$

puisque $S'A' = SA$, $S'P' = SP$; et le rapport $SA : S'F$ lie cette dernière proportion aux précédentes.

234. *Remarque.* On peut, par le moyen de ce qui précède, trouver la hauteur d'une pyramide, quand on connaît les dimensions d'un *tronc* tel que $FGHIKA'B'C'D'E'$, qui reste lorsqu'on en a retranché la partie supérieure $S'A'B'C'D'E'$, au moyen d'un plan $A'B'C'D'E'$ parallèle à la base $FGHIK$. Pour cela, il suffit de considérer la proportion

$$A'B' : FG :: S'P' : S'Q,$$

de laquelle on conclut

$$FG - A'B' : FG :: S'Q - S'P' : S'Q,$$

ou

$$FG - A'B' : FG :: P'Q : S'Q;$$

les trois premiers termes de la dernière proportion sont donnés par le tronc même, dont $P'Q$ est la hauteur, et font connaître la hauteur $S'Q$ de la pyramide entière.

THÉORÈME.

235. *Les bases des pyramides semblables* S'A'B'C'D'E' *et* S'FGHIK *sont entre elles comme les quarrés de deux arêtes homologues quelconques* S'A', S'F, *et comme les quarrés des perpendiculaires* S'P' *et* S'Q, *abaissées du sommet sur leur plan.*

Démonstration. Les bases étant semblables, on d'abord

$$A'B'C'D'E' : FGHIK :: \overline{A'B'}^2 : \overline{FG}^2 \text{ (176)};$$

mais, par le n° 233,

$$A'B' : FG :: S'A' : S'F :: S'P' : S'Q,$$

et par conséquent

$$\overline{A'B'}^2 : \overline{FG}^2 :: \overline{S'A'}^2 : \overline{S'F}^2 :: \overline{S'P'}^2 : \overline{S'Q}^2,$$

d'où il résulte

$$A'B'C'D'E' : FGHIK :: \overline{S'A'}^2 : \overline{S'F}^2 :: \overline{S'P'}^2 : \overline{S'Q}^2,$$

ce qui contient les deux parties de la proposition.

Il est visible que, dans les proportions obtenues précédemment, on peut substituer, au lieu de la pyramide $S'A'B'C'D'E'$ et des lignes qui lui appartiennent, la pyramide égale $SABCDE$ et les lignes correspondantes.

236. *Corollaire.* Il suit de là que les sections faites à la même distance des sommets, dans deux pyramides quelconques, sont dans un rapport constant, quelles que soient d'ailleurs ces distances et les figures des bases. En effet, si, dans le tétraèdre de la figure 126, les distances $S'Q$ et $S'P'$ sont égales aux distances $S'Q$ et $S'P'$, dans la pyramide de la figure 127, le rapport des quarrés des deux premières étant égal à celui des quarrés des deux dernières, le rapport des triangles DEF et $A'B'C'$ sera par conséquent égal à celui des pentagones $FGHIK$ et $A'B'C'D'E'$; en sorte qu'on aura Fig. 126 et 127.

$$DEF : A'B'C' :: FGHIK : A'B'C'D'E',$$

ou $$DEF : FGHIK :: A'B'C' : A'B'C'D'E'.$$

237. On distingue encore parmi les polyèdres, sous le nom de *prismes*, ceux qui ont deux faces opposées, égales et parallèles, qu'on nomme *bases*, et dont toutes les autres sont des parallélogrammes. Le corps $ABCDEFGHIK$, *fig.* 128, est un prisme; sa base est le pentagone $ABCDE$, et voici sa construction. Par le sommet des angles de cette base et hors de son plan, on a mené des droites AF, BG, etc. parallèles entre Fig. 128.

elles, et terminées à un plan *FGHIK* parallèle au plan *ABCDE* : les arêtes *AF*, *BG*, *CH*, etc., prises deux à deux, déterminent les faces *AFGB*, *BGHC*, etc., qui sont des parallélogrammes, puisque les droites *AB* et *FG*, *BC* et *GH* sont parallèles deux à deux (215).

Il est visible que le polygone *FGHIK*, formant la *base supérieure* du prisme, est égal au polygone *ABCDE*, formant la base inférieure; car ils ont leurs côtés et leurs angles égaux chacun à chacun (205). Par la même raison, la section faite dans le prisme proposé, par tout plan parallèle à sa base, sera aussi égale à cette base.

On doit remarquer que chaque angle polyèdre d'un prisme n'est composé que de trois angles plans.

Un prisme dont les arêtes sont perpendiculaires sur sa base, est *droit*; les autres sont *obliques*.

Fig. 129. 238. Le prisme *ABCDEFGH*, *fig.* 129, qu'on désignerait aussi par *AG*, et dont la base *ABCD* est un parallélogramme, se nomme *parallélépipède*; ses faces opposées, *ABFE*, *CDHG*, par exemple, sont égales et parallèles. Leur égalité est évidente d'après la construction du prisme (237), et leur parallélisme résulte de celui des côtés des angles *EAB*, *HDC* égaux entre eux (217).

THÉORÈME.

239. *Un polyèdre compris entre six plans, parallèles deux à deux, est un parallélépipède.*

Démonstration. 1°. Le plan *ABFE*, coupant les deux plans parallèles *ABCD* et *EFGH*, suivant les droites *AB* et *EF* parallèles entre elles (215), et les plans parallèles *ADHE* et *BCGF*, suivant les droites *AE* et *BF* parallèles entre elles, la figure *ABFE* est nécessairement un parallélogramme. On montrerait de la même manière que chacune des autres faces du polyèdre *AG* est un parallélogramme. 2°. Les côtés *AB* et *DC*, étant opposés dans le parallélogramme *ABCD*, sont égaux; les côtés *HD* et *AE*, *CG* et *BF* le sont aussi comme opposés

dans les parallélogrammes *ADHE*, *BCGF*; enfin les angles *CDH* et *BAE*, *DCG* et *ABF* sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles et leur ouverture tournée dans le même sens (205): les parallélogrammes opposés, *ABFE* et *CDHG*, ayant ainsi, chacun à chacun, trois côtés et deux angles égaux, seront donc égaux (85).

THÉORÈME.

240. *Si les angles trièdres* B *et* B′ *des prismes* AI *et* A′I′, fig. 128, *sont composés de polygones égaux et semblablement disposés, ces prismes seront égaux.* Fig. 128.

Démonstration. Il est visible que lorsque la coïncidence des angles trièdres *B* et *B′* sera établie (224), les faces *ABCDE* et *A′B′C′D′E′*, *BCHG* et *B′C′H′G′*, se trouvant confondues, les droites *CD* et *C′D′*, *CH* et *C′H′* coïncideront nécessairement, à cause de l'égalité de ces faces. Mais les lignes *CD* et *CH* déterminant la face *CDIH*, et les lignes *C′D′* et *C′H′* la face correspondante *C′D′I′H′*, il s'ensuit que ces faces coïncideront aussi. On prouverait de même que tous les autres parallélogrammes du prisme *AI* doivent se confondre avec ceux du prisme *A′I′*, d'où il résulte que les polygones *FGHIK* et *F′G′H′I′K′* coïncideront aussi, puisque les côtés du premier se trouveront confondus avec ceux du second (*).

241. *Remarque.* Je passe maintenant aux polyèdres de figure quelconque. On peut toujours, en joignant par des droites le sommet d'un de leurs angles à tous les autres, et divisant toutes leurs faces en triangles, les partager en pyramides triangulaires qui ont pour faces des plans menés de ce point aux arêtes et aux diagonales des faces du corps proposé. L'inspection de la figure 130 rend la chose évidente. Le polyèdre Fig. 130.

(*) Il serait aisé de prouver que l'égalité des prismes se changerait en similitude, si les polygones assemblés au même angle trièdre étaient seulement semblables et semblablement disposés.

$ABCDEFG$, se trouve partagé dans les cinq pyramides

$GABC$, $GABF$, $GAEF$, $GAEC$, $GEDC$,

dont le sommet est au point G, et qui se forment en joignant d'abord ce point avec les sommets A, B, C, D, E des autres angles polyèdres, ce qui donne les pyramides $GABCDE$, $GABF$, $GAEF$, ayant pour bases les diverses faces qui ne font point partie de l'angle polyèdre G ; et partageant ensuite en triangles celles de ces faces qui ont plus de trois côtés, on a les bases des pyramides triangulaires désignées précédemment.

Je ne m'arrêterai pas à prouver que deux corps composés d'un même nombre de pyramides triangulaires égales et semblablement disposées sont égaux ; mais je ferai remarquer, par analogie avec ce qui a été dit sur les polygones, dans le n° 91, qu'un polyèdre quelconque est déterminé en donnant les sommets de trois de ses angles polyèdres, et leurs distances à tous les autres (227). Il suit de là que N désignant le nombre des angles du polyèdre, sa détermination absolue dépend des $3(N-3)$ lignes menées aux angles du triangle pris pour base, et des trois côtés de ce triangle, ce qui fait en tout $3N-6$ données (*).

THÉORÈME.

242. *Deux polyèdres qui sont composés d'un même nombre de pyramides semblables et semblablement disposées, sont semblables.*

Démonstration. Soient les deux polyèdres $ABCDEFG$, $abcdefg$, *fig.* 130, composés d'un même nombre de pyramides semblables, Fig. 130.

(*) Le nombre des angles d'un polyèdre, celui de ses faces et celui de ses arêtes, remplissent une condition remarquable découverte par Euler, et que voici : S désignant le nombre des angles polyèdres, H celui des faces, A celui des arêtes, on a toujours $S+H=A+2$. Pour le cube, par exemple, $S=8$, $H=6$, $A=12$. (*Voyez* le 16e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, dans lequel M. Cauchy a donné des théorèmes nouveaux et curieux à ce sujet, et les *Annales des Mathématiques*, par M. Gergonne, T. 19, p. 333.)

GABCDE et *gabcde*,
GAEF et *gaef*,
GABF et *gabf* (*),

dont les sommets sont aux points *G*, *g*, et semblablement disposées; il faut prouver que toutes les faces de l'un des corps sont semblables à celles de l'autre, semblablement disposées, et forment des angles dièdres égaux (229).

En jetant les yeux sur la figure, on voit d'abord que toutes les faces des deux polyèdres sont ou des faces semblables de pyramides homologues, ou composées d'un même nombre de ces faces, semblablement disposées entre elles.

Les faces telles que *ABCDE* et *abcde* sont dans le premier cas, puisqu'elles appartiennent aux pyramides *GABCDE* et *gabcde*, situées de la même manière dans l'un et dans l'autre polyèdre.

Il en est de même des faces *ABF*, *abf*, communes aux polyèdres et aux tétraèdres *GABF* et *gabf*.

La similitude des faces *DEFG* et *defg* se rapporte au second cas, parce qu'elles sont respectivement formées des triangles *DEG* et *EFG*, *deg* et *efg*, appartenant aux pyramides *GABCDE* et *GAEF*, *gabcde* et *gaef*, dont les deux premières sont semblables aux deux dernières. Il en sera de même des faces *BFGC* et *bfgc*, composées des triangles *BCG* et *BFG*, *beg* et *bfg*, appartenant aux pyramides *GABCDE* et *GABF*, *gabcde* et *gabf*.

Un semblable raisonnement prouverait la similitude de toutes les faces des polyèdres, en quelque nombre qu'elles fussent.

On s'y prendra de même pour reconnaître l'égalité

(*) Pour aider le lecteur à concevoir les pyramides comprises dans chacun des polyèdres, j'ai placé la première la lettre qui désigne le sommet; les autres font connaître la base.

des angles dièdres que ces faces comprennent. Les uns sont égaux parce qu'ils sont communs aux polyèdres et à deux pyramides semblables : tels sont les angles *GDEA* et *gdea*, faisant partie des polyèdres et des pyramides *GABCDE* et *gabcde* ; tels sont encore les angles *GEFA* et *gefa*, appartenant aux tétraèdres *GAEF* et *gaef*.

Les autres angles sont égaux parce qu'ils sont formés de la réunion d'un même nombre d'angles égaux comme appartenant à des pyramides semblables : tels sont les angles *BFAE* et *bfae*, composés respectivement des angles *BFAG* et *GFAE*, *bfag* et *gfae*, appartenant aux pyramides *GABF* et *GAEF*, *gabf* et *gaef*. Le même raisonnement aurait lieu quel que fût le nombre d'angles des polyèdres ; il pourrait arriver que ces angles fussent composés de plus de deux angles des pyramides, mais la démonstration ne changerait pas dans ce cas : on remarquera d'ailleurs son analogie avec celle du n° 86, qui se rapporte aux polygones.

THÉORÈME.

243. *Lorsque deux polyèdres sont semblables, ils peuvent être partagés en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés.*

Démonstration. Il est d'abord évident que si, dans les faces semblables des polyèdres proposés, on joint les angles homologues par des diagonales, on formera sur ces faces un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés. Choisissant ensuite sur les deux corps deux faces semblables, et prenant dans chacune un angle homologue, pour le joindre à tous les autres angles du corps dont il fait partie, les polyèdres proposés seront partagés en un même nombre de tétraèdres semblablement disposés, et dont toutes les bases seront semblables.

Ces tétraèdres pourront se diviser en deux classes :

les uns auront deux faces communes avec les polyèdres, et comprenant entre elles des angles dièdres égaux comme appartenant aux polyèdres : *ils* seront donc semblables. Dans cette classe sont les tétraèdres *GCDE* et *gcde*, dont les faces *GDC* et *GDE*, *gdc* et *gde* sont semblables comme triangles homologues des faces semblables *DEFG* et *defg* des polyèdres, et comprenant les angles dièdres *CGDE*, *cgde* qui appartiennent aux polyèdres.

Les tétraèdres de la seconde classe sont composés de faces homologues des tétraèdres de la première, et comprenant des angles formés par la différence d'angles égaux de ces tétraèdres, et d'angles égaux des polyèdres. De ce nombre sont les tétraèdres *GAEC*, *gaec*. En effet, la comparaison des tétraèdres *GCDE* et *gcde*, dont la similitude a déjà été démontrée, prouve que les triangles *GEC* et *gec* sont semblables, et que les angles dièdres *DCGE* et *dcge* sont égaux ; la comparaison des tétraèdres *GABC* et *gabc*, qui ont aussi deux faces communes avec les polyèdres, savoir, *BCG* et *ABC* pour le premier, *bcg* et *abc* pour le second, prouve la similitude des triangles *ACG* et *acg*, ainsi que l'égalité des angles dièdres *BCGA* et *bcga*. Maintenant, si, des angles dièdres *BCGD* et *bcgd*, égaux puisqu'ils sont formés par des faces homologues des polyèdres, on retranche respectivement les angles *DCGE* et *dcge*, *BCGA* et *bcga*, dont on a déjà montré l'égalité, les angles dièdres restans, *ACGE* et *acge*, seront égaux ; par conséquent les tétraèdres *GAEC* et *gaec* seront semblables. De pareilles considérations rendraient évidente la similitude de tous les tétraèdres qui n'ont pas deux faces communes avec les polyèdres.

Il est bon de remarquer la similitude des triangles *ACG* et *acg*, formés par les diagonales des polyèdres, parce qu'il en résulte que les sommets des angles polyèdres *A*, *G*, *C*, *a*, *g*, *c*, homologues dans des faces

semblables, sont semblablement placés; les uns par rapport aux autres, dans tous les plans qui les joignent, et qui sont eux-mêmes semblablement placés et également inclinés par rapport aux faces qu'ils rencontrent. On en conclut que les sommets de ces angles sont semblablement placés dans les deux corps, ainsi que par rapport aux faces homologues, et sont par conséquent homologues dans les corps. Cette démonstration est entièrement analogue à celle du n° 89, relative aux polygones.

THEOREME.

244. *Les arêtes homologues des polyèdres semblables sont proportionnelles, ainsi que les diagonales des faces homologues et les diagonales intérieures aux polyèdres.*

Démonstration. En effet, si l'on compare successivement les faces homologues $BCGF$ et $bcgf$, et les triangles AGC et agc, on aura ces deux suites de rapports égaux:

$$BC : bc :: BF : bf :: FG : fg :: BG : bg :: GC : gc,$$
$$GC : gc :: AC : ac :: AG : ag,$$

qui se lient entre elles par le rapport commun $GC : gc$, et que l'on combinerait de même avec les suites de rapports égaux déduits de la comparaison des autres faces homologues.

245. *Remarque.* Je n'entrerai dans aucun détail sur la mesure de l'aire des surfaces qui terminent les polyèdres, puisqu'elles se composent de figures planes, que l'on évaluera par les propositions de la IIe section de la Ire partie. J'observerai seulement que la somme des aires des parallélogrammes qui enveloppent un prisme, sans y comprendre les deux bases, est égale au produit de l'une des arêtes AF, BG, CH, etc. de ce prisme, g. 128. *fig.* 128, par le contour de la section $LMNOP$, faite par un plan qui leur est perpendiculaire. En effet, il

suit, du n° 196, que les côtés *LM*, *MN*, *NO*, etc. de cette section, sont les hauteurs des parallélogrammes *ABGF*, *BCHG*, *CDIH*, etc., en prenant pour bases les arêtes *AF*, *BG*, *CH*, etc. : on aura donc

$$ABGF = \overline{AF} \times \overline{LM}, \quad BCHG = \overline{BG} \times \overline{MN}, \text{ etc.};$$

et comme les arêtes *AF*, *BG*, etc. sont égales entre elles, la somme des aires des parallélogrammes qui enveloppent le prisme sera égale à l'une d'elles, multipliée par $LM + MN +$ etc.

THÉORÈME.

246. *Les aires des polyèdres semblables sont entre elles comme les quarrés des arêtes homologues.*

Démonstration. Chacune des faces du premier polyèdre est à sa correspondante dans le second, comme le quarré de l'un de ses côtés est au quarré du côté homologue de l'autre (176); mais ces côtés étant des arêtes homologues des polyèdres, sont, d'un polyèdre à l'autre, dans le même rapport (244): leurs quarrés formeront donc une suite de rapports égaux; et ces rapports étant aussi ceux des faces homologues, il en faut conclure que ces derniers sont égaux entre eux. Par conséquent, la somme des faces du premier polyèdre est à la somme des faces du second, comme une quelconque des faces de l'un est à la correspondante de l'autre, ou comme le quarré d'une arête du premier polyèdre est au quarré de l'arête homologue du second. Substituant dans cette proportion, à la place des sommes des faces, les aires totales des polyèdres qu'elles forment, il en résultera que ces aires seront entre elles dans le rapport des quarrés des arêtes homologues.

DE LA MESURE DES VOLUMES.

247. L'espace renfermé par la surface d'un polyèdre, ou occupé par ce corps, est généralement désigné sous

le nom de *volume* (*). Quand on considère un vase ou un corps creux, on désigne encore le volume par le mot *capacité*. Parmi des corps de formes très différentes, il s'en trouve d'équivalens en volume ou en capacité; comme il y a des figures planes de formes différentes et d'aires équivalentes (159).

THÉORÈME.

248. *Deux parallélépipèdes construits sur la même base, et terminés supérieurement par le même plan parallèle à leur base, sont équivalens en volume.*

Démonstration. Il y a deux cas à considérer. Dans l'un, que représentent les deux figures 131, et dont je m'occuperai d'abord, les parallélépipèdes proposés, *AG* et *AL*, sont renfermés latéralement entre les mêmes plans parallèles, *AK* et *DL*. Par cet état de choses, il est visible que les prismes triangulaires *AEIDHM* et *BFKCGL* sont égaux (240); car les triangles *AEI* et *BFK*, qui leur servent de bases, sont égaux (16), à cause des parallèles *AE* et *BF*, *AI* et *BK*, et les parallélogrammes *AEHD* et *BFGC*, *AIMD* et *BKLC* sont aussi égaux (238). Si donc on retranche du polyèdre *AL*, d'une part le prisme *BFKCGL*, et de l'autre le prisme *AEIDHM*, les parallélépipèdes restans, *ABCDEFGH* et *ABCDIKLM*, ou *AG* et *AL*, seront équivalens.

Fig. 131.

(*) Ce mot, compris par tous ceux qui entendent la langue française, m'a paru préférable au mot *solidité*, qui, dans l'usage ordinaire, est employé dans une autre acception. Ce n'est que lorsque la langue n'offre pas de mots propres à rendre une idée, qu'il peut être permis d'en créer de nouveaux, ou de détourner de sa signification quelque mot connu. La multitude des termes techniques étant un des plus grands obstacles qui s'opposent à la propagation des sciences, on ne saurait trop en diminuer le nombre. Puisque tout le monde comprend ce que c'est que le volume d'un corps, pourquoi le désigner par le mot *solidité*, qui rappelle plutôt l'idée de la résistance aux diverses causes de destruction?

Le second cas se trouve représenté dans la figure 132, où les deux parallélépipèdes *ABCDIKLM* et *ABCDNOPQ* n'ont de commun que leur base inférieure *ABCD* et le plan qui contient leurs bases supérieures *IKLM* et *NOPQ*. On ramène ce cas au précédent en prolongeant les plans *ABIK* et *DCLM*, en même temps que les plans *ADQN* et *BCPO*, pour former le parallélépipède *ABCDEFGH* (239), qui se trouve premièrement équivalent au parallélépipède *ABCDIKLM*, comme étant renfermé latéralement entre les plans parallèles *AK* et *DL*. Le même parallélépipède *ABCDEFGH*, considéré comme compris entre les plans parallèles *BP* et *AQ*, est aussi équivalent au parallélépipède *ABCDNOPQ* : les parallélépipèdes *ABCDIKLM* et *ABCDNOPQ*, ou *AL* et *AP*, sont donc équivalens entre eux. Fig. 132.

249. *Corollaire.* Par le moyen du théorème précédent, on prouve que tout parallélépipède *AL* dont les arêtes *AI*, *BK*, *CL*, *DM* sont inclinées sur sa base, est équivalent à un autre, *AP*, construit sur la même base, mais dont les arêtes *AN*, *BO*, *CP*, *DQ* sont perpendiculaires sur cette base.

On peut ensuite transformer ce dernier, *fig.* 133, en un autre, *ABRSNOTU*, ou *AT*, ayant pour base le rectangle *ABRS*, équivalent au parallélogramme *ABCD*, et dont les arêtes soient encore perpendiculaires sur sa base; car si l'on considère les parallélépipèdes *AP* et *AT* comme ayant pour base commune le parallélogramme *ABON*, ils rentreront dans le premier cas du numéro précédent. Fig. 133.

Il est évident que toutes les faces du parallélépipède *AT* sont des rectangles : on le nomme, à cause de cela, *parallélépipède rectangle*, et l'on conclut, de ce qui vient d'être dit, qu'*un parallélépipède quelconque peut être transformé en un parallélépipède rectangle, ayant une base équivalente à celle du premier, et même hauteur.*

La *hauteur* d'un prisme ou d'un parallélépipède est la perpendiculaire menée entre les deux bases.

N. B. Il faut observer ci-dessus que les bases *ABCD* et *ABRS* ont nécessairement un côté commun.

THÉORÈME.

250. *Si l'on forme sur la base d'un prisme triangulaire, un parallélogramme, et que l'on élève sur ce parallélogramme, pris pour base, un parallélépipède de même hauteur que le prisme triangulaire, celui-ci sera la moitié de l'autre.*

Démonstration. Soit le prisme triangulaire *ABCEFG*, Fig. 129. *fig.* 129 ; si l'on achève sur sa base le parallélogramme *ABCD*, qu'on élève par le point *D* la droite *DH* parallèle aux droites *AE*, *BF*, *CG*, et terminée au plan de la base supérieure *EFG* du prisme proposé, les plans *AEHD* et *DHGC*, respectivement parallèles aux plans *BFGC* et *AEFB* (217), compléteront le parallélépipède, et formeront, avec le plan *AEGC*, un second prisme triangulaire *ADCEHG*, dont les parties constituantes seront les mêmes que celles du prisme *ABCEFG*. En effet, les bases triangulaires sont les mêmes, la face *ACGE* est commune, et les autres faces parallélogrammes sont égales, comme opposées dans le parallélépipède. On ne peut cependant pas conclure du n° 240, l'égalité de ces prismes, parce que leurs faces ne sont pas semblablement disposées. Il n'y a que les angles trièdres tels que *H* et *B*, diagonalement opposés dans le parallélépipède, qui soient entièrement formés d'angles plans égaux. En comparant la position de ceux-ci (223), on reconnaît que les angles dièdres *AEHG* et *GCBA*, *DHGE* et *FBAC*, *AEGH* et *EACB*, sont égaux. On voit par là que le prisme triangulaire *ADCEHG* est construit au-dessous du plan *EHG*, avec les mêmes parties qui constituent le prisme *ABCEFD*, au-dessus de *ABC*, et que, par conséquent, ces deux

polyèdres, compris dans la classe de ceux qui ne peuvent coïncider (225), doivent renfermer le même espace : le volume de chacun d'eux sera donc la moitié de celui du parallélépipède qu'ils composent (*).

251. *Corollaire.* Il suit de là que deux prismes triangulaires de même base et de même hauteur sont équivalens, comme moitiés de parallélépipèdes équivalens.

THÉORÈME.

252. *Si l'on coupe un tétraèdre par des plans parallèles à sa base et équidistans, on pourra former, à chaque tranche, un prisme extérieur et un prisme intérieur, de manière que la somme des premiers approche autant qu'on voudra de celle des seconds, et par conséquent aussi du tétraèdre.*

Démonstration. Soient *ABC*, *fig.* 135, la base du tétraèdre proposé, et *FGH*, *LMN*, *QRT* les plans Fig. 135.

(*) Si l'on ne regarde pas cette égalité comme évidente, on la prouvera ainsi qu'il suit. Par les extrémités *A*, *E*, d'une arête du parallélépipède *BH*, *fig.* 134, on mènera des plans perpendiculaires à cette arête, et on formera ainsi le parallélépipède *NE*, dont les arêtes sont perpendiculaires sur la base *AMNO*, et de plus équivalent au parallélépipède *BH*, puisqu'ils ont même hauteur, que leurs bases *AOLE* et *ADHE* sont équivalentes, et qu'elles ont un côté commun (249). Mais le plan *DBHF* partage le parallélépipède *NE* en deux prismes triangulaires droits *AOMELI*, *MNOIKL*, évidemment égaux; car leurs faces sont égales, semblablement disposées, et leurs angles dièdres correspondans sont égaux; chacun de ces prismes est donc la moitié du parallélépipède *NE*, et par conséquent celle du parallélépipède *BH*. Cela posé, il est facile de voir que les pyramides quadrangulaires *AMBDO* et *EIFHL* sont égales comme ayant, chacune à chacune, toutes leurs faces égales, semblablement disposées et leurs angles dièdres correspondans égaux, et que si on les retranche alternativement du corps *AMOEFH*, les restes seront les deux prismes triangulaires *AOMELI*, *ABDEFH* : ces deux prismes sont donc équivalens; or le premier étant la moitié du parallélépipède *BH*, il en sera de même du second. Fig. 134.

Cette démonstration m'a été communiquée en 1803, par M. Fournier jeune; mais M. Ampère, alors professeur à l'Ecole centrale de Lyon, en avait déjà trouvé, de son côté, le principe.

coupans; on mènera par les points A et B, F et G, L et M, Q et R, les droites AD et BE, Ia et Kb, Of et Pg, Ul et Vm, parallèles à l'arête CS, et terminées aux plans coupans supérieurs. A la première tranche $ABCFGH$, le prisme extérieur sera $ABCDEH$, et le prisme intérieur $abCFGH$. Pour abréger, je désignerai l'un par AH et l'autre par aH. A la seconde tranche $FGHLMN$, le prisme extérieur sera FN et l'intérieur fN, et ainsi de suite jusqu'à la dernière tranche $SQRT$, qui n'aura point de prisme intérieur, mais un prisme extérieur QS.

Tous ces prismes ont pour hauteur commune l'épaisseur des tranches; et le prisme intérieur de chaque tranche étant compris entre les mêmes parallèles que le prisme extérieur de la tranche au-dessus, est égal à ce dernier (240); en sorte que

$$aH = FN, \quad fN = LT, \quad lT = QS$$

et par conséquent

$$aH + fN + lT = FN + LT + QS,$$

somme qui comprend tous les prismes extérieurs, excepté le premier, AH: celui-ci est donc l'excès de la somme des prismes extérieurs sur celle des prismes intérieurs.

Je n'ai considéré que quatre tranches, mais on en peut faire autant qu'on voudra; et plus le nombre en sera grand, plus leur épaisseur ou celle du prisme AH, diminuera. Il pourra par conséquent être rendu moindre qu'un prisme donné, quelque petit que soit celui-ci: il en sera donc ainsi de la différence entre la somme des prismes extérieurs et celle des prismes intérieurs. Mais le tétraèdre $SABC$ étant plus petit que la première somme et plus grand que la seconde, sa différence avec l'une quelconque des deux, sera encore moindre que leur différence propre: on pourra donc faire en sorte que l'une et l'autre somme approchent autant que l'on voudra du volume de ce tétraèdre.

THÉORÈME.

253. *Deux tétraèdres de même base et de même hauteur sont équivalens.*

Démonstration. Si l'on conçoit que sur chaque tétraèdre $SABC$, $S'A'B'C'$, on ait construit une suite de prismes extérieurs correspondans, ces prismes, compris entre des plans parallèles, ont nécessairement même hauteur; les sections qui leur servent de base étant respectivement à même distance du sommet, ainsi que les triangles égaux ABC, $A'B'C'$, bases des tétraèdres, sont égales chacune à chacune (236) : les prismes extérieurs correspondans sont donc équivalens; par conséquent la somme des prismes extérieurs d'un tétraèdre est égale à celle des prismes extérieurs de l'autre. Si donc f et f' désignent ces deux sommes, on aura

$$f = f' \text{ ou } \frac{f}{f'} = 1;$$

mais comme on peut rendre aussi petite qu'on le voudra la différence entre chacune de ces sommes et le tétraèdre auquel elle appartient, on parviendrait à prouver que la différence entre les rapports $\frac{f}{f'}$ et $\frac{SABC}{S'A'B'C'}$, est moindre qu'aucune grandeur donnée; et, par là, celle du rapport invariable $\frac{SABC}{S'A'B'C'}$ et de l'unité l'étant aussi, il en résulte que $\frac{SABC}{S'A'B'C'} = 1$ (153), ou que $SABC = S'A'B'C'$ (*).

(*) On démontrerait immédiatement qu'il y aurait absurdité à supposer un des tétraèdres plus grand que l'autre : il suffirait pour cela de considérer des prismes extérieurs tels, que la différence entre ceux qui seraient formés sur le tétraèdre supposé le plus petit et ce tétraèdre, fût moindre que la différence des deux tétraèdres; car il en résulterait que la somme des prismes extérieurs correspondans, formés sur le tétraèdre qu'on regarde comme le plus grand, serait moindre que ce tétraèdre.

THÉORÈME.

254. *Un tétraèdre est équivalent au tiers du prisme triangulaire de même base et de même hauteur.*

Démonstration. Si, par les points A et C de la base ABC du tétraèdre $EABC$, *fig.* 136, on mène les droites AD, CF, parallèles à l'arête BE, et par le point E un plan parallèle à ABC, on formera un prisme triangulaire $ABCDEF$ (237). Si maintenant on fait passer par les sommets A, E, C des angles trièdres de ce prisme, un plan, il en séparera d'abord le tétraèdre proposé $EABC$, dont la hauteur et la base seront les mêmes que celles du prisme; il restera ensuite une pyramide quadrangulaire $EACFD$, représentée à part en $E'A'C'F'D'$, dont le sommet sera en E, et qui aura pour base la face postérieure $ACFD$ du prisme. Si, par les points D, E, C, on fait passer un nouveau plan, il partagera cette pyramide en deux tétraèdres $EACD$, $ECFD$, représentés à part en $E''A''C''D''$, $E'''C'''F'''D'''$; leurs hauteurs seront égales, puisqu'ils ont leur sommet au même point E et leurs bases sur un même plan. Ces bases seront aussi égales, comme étant les moitiés du parallélogramme $ACFD$: les tétraèdres $EACD$, $ECFD$ seront donc équivalens (n° précédent); mais le second pouvant être considéré comme ayant pour base le triangle DEF, égal au triangle ABC, et son sommet au point C, il aura même base et même hauteur que le prisme, et sera en conséquence équivalent au premier tétraèdre $EABC$: donc les tétraèdres $EABC$, $EACD$, $ECFD$ seront équivalens; donc chacun sera équivalent au tiers du prisme triangulaire qu'ils composent.

[Fig. 136.]

THÉORÈME.

255. *Les parallélépipèdes rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

Démonstration. Soient les parallélépipèdes rectangles AG et IP, *fig.* 137, dont les bases AC et IL sont des rectangles égaux. 1°. Si les hauteurs AE et IN sont commensurables, qu'on les divise en parties Aa et Ii, égales à leur commune mesure, et que, par les points a etc., on mène des plans parallèles à AC et IL, on formera des parallélépipèdes Ao et Il, égaux entre eux (240); mais le nombre de ces parallélépipèdes étant dans AG le même que celui des parties égales contenues dans AE, et dans IP le même que celui des parties égales contenues dans IN, on aura évidemment Fig. 137.

$$AG : IP :: AE : IN,$$

conformément à l'énoncé.

2°. Lorsque les hauteurs AE et IN ne sont pas commensurables, le tour de démonstration employé dans le numéro 166 prouve de même que le rapport du parallélépipède AG au parallélépipède IP ne peut être ni plus grand ni plus petit que celui de AE à IN. En effet, si l'on suppose la proportion

$$AG : IP :: AE : IR, \text{ et } IR > IN,$$

on portera sur IN des parties aliquotes de AE plus petites que NR; et, par le point de division n, tombant entre N et R, on mènera un plan parallèle à IL pour former le parallélépipède Ip, à l'égard duquel on aura

$$AG : Ip :: AE : In :$$

de cette proportion et de la précédente, on tirera

$$IP : Ip :: IR : In,$$

résultat absurde, puisque $IP < Ip$ et $IR > In$.

On ne saurait faire non plus

$$AG : IP :: AE : IR' \text{ et } IR' < In;$$

car, pour un point de division n', placé entre R' et N, on aurait

$$AG : Ip' :: AE : In',$$

d'où l'on conclurait

$$IP : Ip' :: IR' : In',$$

ce qui est encore absurde, puisque $IP > Ip'$ et $IR' < In'$.

THÉORÈME.

256. *Deux parallélépipèdes rectangles quelconques,* Fig. 138. AG *et* IP, fig. 138, *sont entre eux comme les produits des arêtes qui forment un même angle trièdre.*

Démonstration. Si l'on prend sur l'arête IN du parallélépipède IP, une partie $II' = AE$, et sur l'arête BC du parallélépipède AG, une partie $BC' = IM$, puis, qu'on mène le plan $I'L'$ parallèle à IB, et le plan $C'H'$ parallèle à AF, on construira les parallélépipèdes IL' et AG', qui auront pour bases les rectangles IM' et AH', formés sur des bases et des hauteurs égales : on aura donc, par le numéro précédent,

$$AG' : IL' :: AB : IK;$$

et en comparant les parallélépipèdes AG et AG', considérés comme ayant pour base le rectangle AF, il viendra

$$AG : AG' :: AD : AD'.$$

Multipliant ces proportions par ordre, en omettant le facteur AG', commun aux deux termes du premier rapport composé, et substituant à AD' son égale IM, on conclura

$$AG : IL' :: \overline{AB} \times \overline{AD} : \overline{IK} \times \overline{IM}.$$

Enfin, les parallélépipèdes IL' et IP, ayant même base $IKLM$, donneront la proportion

$$IL' : IP :: II' : IN.$$

Multipliant encore cette proportion et la précédente par ordre, en omettant le facteur IL' et remplaçant II' par son égale AE, il viendra

$$AG : IP :: \overline{AB} \times \overline{AD} \times \overline{AE} : \overline{IK} \times \overline{IM} \times \overline{IN},$$

ce qui donne l'énoncé du théorème.

257. *Remarque.* Si l'on choisit pour terme de comparaison de tous les parallélépipèdes rectangles, le parallélépipède rectangle *ag*, *fig.* 139, dont les trois arêtes contiguës *ab*, *ad*, *ae* soient égales à la ligne prise pour unité ou pour mesure commune des droites, leur produit sera l'unité, et l'on aura Fig. 139.

$$ag : AG :: 1 : \overline{AB} \times \overline{AD} \times \overline{AE},$$

c'est-à-dire *que le parallélépipède rectangle* AG *contiendra autant de fois le parallélépipède rectangle* ag, *que le produit des lignes* AB, AD, AE, *rapportées à la mesure commune* ab, *contient l'unité.* C'est là ce qu'il faut entendre quand on dit *que la mesure du volume d'un parallélépipède rectangle est le produit de ses trois arêtes contiguës ;* et si l'on observe que le produit $\overline{AB} \times \overline{AD}$ exprime le nombre des quarrés égaux à *ac*, contenus dans la base *AC* (168), ou, ce qui est la même chose, donne la mesure de l'aire de cette base, on en conclura que le *volume d'un parallélépipède rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur*, évaluées l'une et l'autre numériquement.

Dans le cas où les arêtes *AB*, *AD* et *AE* contiendraient un nombre exact de fois le côté *ab* du parallélépipède *ag*, on reconnaîtrait, à l'inspection de la figure, que l'on pourrait placer sur la base *AC* autant de parallélépipèdes égaux à *ag*, que cette base contient de fois la base *ac*, et qu'on formerait ainsi un parallélépipède de même base que *AG*, de même hauteur que *ag*, et qui serait contenu dans *AG* autant de fois que la hauteur *AE* contient la hauteur *ae* ou le côté *ab* ; d'où il suit encore que le parallélépipède *AG* contient autant de parallélépipèdes égaux à *ag* que le produit de la base *ABCD* par la hauteur *AE*, contient d'unités.

258. 1er *Corollaire.* Si les trois arêtes *AB*, *AD*, *AE* étaient égales entre elles, le volume du parallélépipède *AG* serait mesuré par $\overline{AB} \times \overline{AB} = \overline{AB}^3$, ou par la

troisième puissance de AB; mais il est visible que, dans ce cas, les six faces du parallélépipède rectangle AG deviennent des quarrés égaux : on lui donne alors le nom de *cube*, et de là vient qu'on appelle *cube* la troisième puissance d'un nombre.

259. 2e *Corollaire.* Puisqu'un parallélépipède quelconque peut toujours être transformé en un parallélépipède rectangle de même hauteur, et construit sur une base équivalente (249), il s'ensuit que le volume d'un parallélépipède quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur; et que, par conséquent, deux parallélépipèdes de même hauteur et de bases seulement équivalentes, comprennent le même volume.

260. 3e *Corollaire.* Le volume du prisme triangulaire
Fig. 129. $ABCEFG$, *fig.* 129, étant équivalent à la moitié de celui du parallélépipède $ABCDEFGH$ (250), aura pour mesure, d'après ce qui précède, la moitié du produit de la base de ce parallélépipède par sa hauteur; mais le triangle ABC, qui forme la base du prisme, n'étant que la moitié de celle du parallélépipède, il est évident que le volume d'un prisme triangulaire aura pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

Le volume d'un prisme qui a une base quelconque
Fig. 128. $ABCDE$, *fig.* 128, s'exprime de la même manière; car si l'on partage le polygone $ABCDE$ en triangles, par des diagonales AC, AD, et que, par ces diagonales et par les arêtes parallèles qui leur sont contiguës, AF et CH, AF et DI, on mène des plans, on partagera le prisme AI en trois prismes triangulaires de même hauteur, et dont les bases seront ABC, ACD, ADE : en désignant par H la hauteur commune de ces prismes, ou la distance perpendiculaire des plans qui contiennent leurs bases inférieures et leurs bases supérieures, les mesures de leurs volumes respectifs seront

$$\overline{ABC} \times H, \quad \overline{ACD} \times H, \quad \overline{ADE} \times H;$$

leur somme $(ABC+ACD+ADE)H=\overline{ABCDE}\times H$ donnera le volume du prisme total AI.

On conclut de là que les volumes de deux prismes quelconques sont entre eux comme les produits de leur base par leur hauteur, et que par conséquent ils sont entre eux comme leurs hauteurs lorsqu'ils ont des bases équivalentes, ou comme leurs bases lorsqu'ils ont même hauteur, ou enfin que ces prismes sont équivalens lorsqu'ils ont à la fois même hauteur et des bases équivalentes, et cela, quelles que soient les figures de ces bases.

261. 4e *Corollaire.* Le volume d'un tétraèdre a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur, puisque ce volume est le tiers de celui du prisme, qui est mesuré par le produit de sa base par sa hauteur (254).

262. 5e *Corollaire.* Les mêmes mesures conviennent aux pyramides quelconques ; car si l'on partage en triangles la base $ABCDE$ de la pyramide quelconque $SABCDE$, *fig.* 127, et que l'on mène des plans par le sommet et par chacune des diagonales AC, AD, cette pyramide se trouvera partagée en trois tétraèdres de même hauteur, et dont les bases seront respectivement ABC, ACD, ADE : le volume de chacun de ces tétraèdres étant mesuré par le tiers du produit de sa base par sa hauteur, la somme des volumes de tous trois, ou celui de la pyramide proposée, sera évidemment égal, au tiers du produit de la somme de leurs bases par la hauteur commune, c'est-à-dire au tiers du produit de la base de la pyramide proposée par sa hauteur. Fig. 127.

Il résulte de là que deux pyramides quelconques sont entre elles comme les produits de leur base par leur hauteur, et seulement comme leurs bases si les hauteurs sont les mêmes, ou comme leurs hauteurs si les bases sont équivalentes, ou enfin que ces pyramides sont équivalentes lorsqu'elles ont à la fois même hauteur et

des bases équivalentes, quelles que soient d'ailleurs les figures de ces bases.

263. *Remarques.* Puisqu'on peut trouver la hauteur de la pyramide dont un tronc donné, à bases parallèles, fait partie (234), il est évident qu'on aura le volume de ce tronc en calculant séparément le volume de la pyramide entière, celui de la pyramide retranchée, et prenant la différence des deux résultats.

On voit encore qu'un polyèdre quelconque pouvant toujours être partagé en pyramides (241), l'évaluation de son volume s'opérera en calculant séparément, d'après ce qui précède, celui de chacune des pyramides qu'il contient, et prenant la somme des résultats: je ne m'arrêterai donc pas sur ce sujet.

Cependant il est une espèce de polyèdre à laquelle on peut ramener toutes les autres, et que, pour cette raison, il est bon de connaître: c'est le *prisme triangulaire tronqué*, qui ne diffère du prisme triangulaire ordinaire que parce que le plan opposé à sa base n'est point parallèle à cette base, et que par conséquent ses faces sont des trapèzes au lieu d'être des parallélogrammes. *ABCDEF*, *fig.* 140, est un prisme triangulaire tronqué. Fig. 140.

THÉORÈME.

264. *Un prisme triangulaire tronqué est toujours équivalent à trois tétraèdres de même base, et ayant leurs sommets respectifs placés à chacun des angles du triangle opposé à cette base.*

Démonstration. En faisant passer un plan par les trois points *A*, *C*, *E*, on détacherait d'abord du prisme *ABCDEF*, le tétraèdre *EABC*, dont la base est le triangle *ABC*, base du prisme, et dont le sommet est placé à l'angle *E* du triangle *DEF* opposé à cette base. Il resterait ensuite la pyramide quadrangulaire *EACFD*, qui se diviserait en deux tétraèdres *EACD*,

ECFD, en menant par la diagonale *DC* et, par le point *F*, le plan *DEC*. Ces tétraèdres ne sont pas ceux qui sont désignés dans l'énoncé; mais en rétablissant le prisme dans son entier, on prouve facilement qu'ils sont équivalens à ces derniers.

En effet, si l'on mène dans la face *ABED* la diagonale *BD*, et que l'on conçoive le plan *BDC*, on aura le tétraèdre *BACD*, construit sur la base *ACD* du tétraèdre *EACD*, et de même hauteur, puisque les sommets *B* et *E* de l'un et de l'autre sont sur une même droite *BE*, parallèle au plan de leur base; mais on peut aussi considérer le tétraèdre *BACD* comme ayant son sommet au point *D*, et pour base le triangle *ABC*: ainsi ce tétraèdre est tel que l'exige l'énoncé.

Pour trouver le tétraèdre équivalent à *ECFD*, il faut, dans les faces *ACFD* et *BCFE*, tirer les diagonales *AF* et *BF*; en concevant alors le plan *AFB*, on a le tétraèdre *BACF*, dont la base *ACF* est équivalente à la base *CFD* du tétraèdre *ECFD*, puisque ces deux triangles ont même base *CF*, et sont compris entre les parallèles *AD* et *CF*; de plus, les tétraèdres ayant leurs sommets sur la même droite *BE*, parallèle au plan de leur base, ont par conséquent la même hauteur : ils sont donc équivalens. Le tétraèdre *BACF*, considéré comme ayant son sommet placé en *F*, et pour base le triangle *ABC*, sera le troisième tétraèdre désigné dans l'énoncé.

265. *Corollaire.* Il suit, du théorème précédent, que le volume d'un prisme triangulaire tronqué a pour mesure le produit de sa base par le tiers de la somme des trois perpendiculaires abaissées sur cette base, de chacun des angles de la base supérieure, puisque ces perpendiculaires sont les hauteurs respectives des tétraèdres, à la somme desquels le prisme est équivalent, et qui ont tous pour base celle du prisme.

THÉORÈME.

266. *Deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs arètes homologues.*

Démonstration. 1°. Si les polyèdres proposés sont les pyramides $SABCDE$, $S'FGHIK$, *fig.* 127, on aura, par le n° 235, Fig. 127.

$$ABCDE : FGHIK :: \overline{SP}^2 : \overline{S'Q}^2;$$

multipliant cette proportion par la proportion évidente

$$\tfrac{1}{3}SP : \tfrac{1}{3}S'Q :: SP : S'Q,$$

il viendra

$$\overline{ABCDE} \times \tfrac{1}{3}\overline{SP} : \overline{FGHIK} \times \tfrac{1}{3}\overline{S'Q} :: \overline{SP}^3 : \overline{S'Q}^3.$$

Les deux premiers termes de cette proportion, qui expriment les volumes des pyramides proposées, montrent que ces volumes sont entre eux comme les cubes de leurs hauteurs; mais la similitude des pyramides donne aussi

$$SP : S'Q :: SA : S'F :: AB : FG \text{ (233)},$$

d'où l'on tire

$$\overline{SP}^3 : \overline{S'Q}^3 :: \overline{SA}^3 : \overline{S'F}^3 :: \overline{AB}^3 : \overline{FG}^3,$$

et par conséquent

$$SABCDE : S'FGHIK :: \overline{SA}^3 : \overline{S'F}^3 :: \overline{AB}^3 : \overline{FG}^3;$$

c'est-à-dire que *les pyramides semblables sont entre elles comme les cubes de leurs arètes homologues, soit que ces arètes partent du sommet, soit qu'elles se trouvent sur la base* (*).

(*) En imitant la construction et le raisonnement du n° 177, il serait facile de prouver que *les volumes de deux tétraèdres qui ont un angle trièdre commun, sont entre eux comme les produits des arètes qui, dans chacun, comprennent cet angle.*

12°. Lorsqu'il s'agit de deux polyèdres quelconques, on peut les concevoir partagés en un même nombre de pyramides semblables et semblablement disposées (243). Chacune des pyramides du premier polyèdre sera à celle qui lui correspond dans le second, comme le cube de l'une de ses arètes est au cube de l'arète homologue de l'autre pyramide; mais ces arètes, qui sont nécessairement ou les arètes mêmes des polyèdres proposés, ou les diagonales de leurs faces, ou enfin les diagonales qui joignent intérieurement les sommets de leurs angles polyèdres, sont, d'un polyèdre à l'autre, dans le même rapport (244); leurs cubes formeront par conséquent une suite de rapports égaux, et ces rapports étant aussi égaux à ceux des pyramides, il en faut conclure que ces derniers sont égaux entre eux : par conséquent la somme des pyramides du premier polyèdre est à la somme des pyramides du second, comme une quelconque des pyramides de l'un est à la correspondante de l'autre, ou comme le cube de l'une quelconque des arètes du premier polyèdre est au cube de l'arète homologue du second. Substituant dans cette proportion, à la place des sommes des pyramides, les polyèdres qu'elles composent, il en résultera que ces corps sont entre eux dans le rapport des cubes de leurs arètes homologues.

DEUXIÈME PARTIE.

SECTION II.

DES CORPS RONDS.

267. Les corps ronds sont ceux qu'on produit en faisant tourner une figure plane autour d'une ligne droite. Je ne m'occuperai spécialement ici que du *cône droit*, du *cylindre droit*, et de la *sphère*.

Le cône droit s'engendre en faisant tourner un triangle rectangle SAC, *fig.* 141, autour de l'un des côtés SC de l'angle droit; l'hypoténuse SA décrit dans ce mouvement *la surface conique droite* qui enveloppe le corps. Fig. 141.

Un point quelconque A' de cette droite décrit une circonférence de cercle dont le centre est sur la droite SC, autour de laquelle tourne le triangle SAC, et que, pour cette raison, on nomme l'*axe du cône*; car si l'on conçoit la droite $A'C'$ tirée dans le triangle générateur, perpendiculairement à cet axe, et tournant avec lui, elle décrira un plan perpendiculaire à l'axe SC (198), et sera évidemment le rayon du cercle $A'D'B'$.

Il suit de là que la surface conique coupée par un plan perpendiculaire à son axe, donne une circonférence de cercle; et il est visible qu'un plan mené par son sommet, la coupe en général suivant deux lignes droites.

Le cercle ADB décrit par le côté AC du triangle générateur, et qui ferme le cône, est la *base*, tandis que le point S est le *sommet*; et cette base est perpendiculaire à l'axe SC (*).

(*) On donne le nom de *cône droit* à celui que je décris ici, pour le distinguer du *cône oblique à base circulaire*, qui s'engendre

Les triangles semblables SAC et $SA'C'$, donnant

$$AC : A'C' :: SC : SC' :: SA : SA',$$

font voir que les rayons des cercles ADB et $A'D'B'$ sont proportionnels à la distance de leur plan, au sommet du cône ; mais les circonférences des cercles étant entre elles comme leurs rayons (154), et leurs aires suivant le rapport des quarrés de ces rayons (188), on aura encore

$$\text{circ.}ADB : \text{circ.}A'D'B' :: AC : A'C' :: SC : SC' :: SA : SA',$$

$$\text{aire } ADB : \text{aire } A'D'B' :: \overline{AC}^2 : \overline{A'C'}^2 :: \overline{SC}^2 : \overline{SC'}^2 :: \overline{SA}^2 : \overline{SA'}^2,$$

propriétés qui reviennent à celles qui ont été démontrées pour les pyramides dans les n°s 233 et 235.

268. *Remarque.* Lorsqu'on a les dimensions d'un tronc de cône à bases parallèles $BDAEB'D'A'E'$, *fig.* 144, on calcule, par un procédé analogue à celui du n° 234, la hauteur du cône entier. En effet, les triangles ASO et $A'S'O'$, étant semblables, donnent Fig. 144.

$$AO : A'O' :: SO : SO',$$

d'où l'on tire

$$AO - A'O' : SO - SO' :: AO : SO,$$

ce qui revient à

$$AO - A'O' : OO' :: AO : SO,$$

proportion dans laquelle les trois premiers termes sont donnés, et qui fera connaître la hauteur du cône entier.

THÉORÈME.

269. *Si l'on construit des polygones réguliers, inscrits et circonscrits à la base du cône, et que l'on*

---

en faisant tourner autour d'un point S, *fig.* 142, une droite SA, assujettie à toucher continuellement la circonférence d'un cercle ADB, situé dans un plan qui ne passe pas par le point S. La droite SC, que l'on nomme encore l'*axe du cône*, n'est plus perpendiculaire au plan de la base ADB. Fig. 142.

joigne les angles de ces polygones avec le sommet du cône, ces lignes détermineront des pyramides dites régulières, *parce que toutes leurs faces triangulaires seront égales; et parmi ces pyramides, on pourra toujours en trouver deux, l'une inscrite, l'autre circonscrite, telles, que la différence de leurs aires soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur.*

Fig. 143. *Démonstration.* Soit *abcdef*, *fig.* 143, le polygone inscrit dans la base du cône; en tirant les droites *aS*, *bS*, *cS*, etc., et joignant ces droites par des plans, on aura la pyramide *Sabcdef*. L'aire de cette pyramide, sans y comprendre sa base *abcdef*, est composée des triangles *aSb*, *bSc*, *cSd*, etc., égaux entre eux, puisqu'ils sont formés par les côtés du polygone *abcdef* que l'on suppose régulier, et par les obliques *Sa*, *Sb*, *Sc*, etc., qui s'écartent également de la perpendiculaire *SO*. L'aire de l'un de ces triangles, de *aSb*, par exemple, a pour mesure $\frac{1}{2}\,\overline{ab} \times \overline{Sg}$, *Sg* étant perpendiculaire sur *ab*; leur somme aura pour mesure $\frac{1}{2}N \times \overline{ab} \times \overline{Sg}$, en désignant par *N* le nombre des côtés du polygone *abcdef*; et comme $N \times \overline{ab}$ est évidemment le contour de ce polygone, on en conclura que *l'aire de la pyramide régulière, lorsqu'on n'y comprend point sa base, a pour mesure la moitié du produit du contour de cette base, par la perpendiculaire abaissée du sommet sur l'un de ses côtés.*

Dans la pyramide circonscrite, dont je n'ai représenté qu'une seule face, *ASB*, pour ne pas trop compliquer la figure, les faces sont toutes égales entre elles comme dans la pyramide inscrite, parce que les arêtes *SA*, *SB* sont toujours des obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire *SO*. Le milieu du côté *AB* du polygone circonscrit étant précisément le point de son contact avec la circonférence du cercle *aGbf*,

la perpendiculaire SG, abaissée du point S sur AB, se confond avec le côté du cône. L'aire du triangle ASB a pour expression $\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{SG}$, et par conséquent celle de la pyramide entière, à l'exception de sa base, sera $\frac{1}{2}N\times\overline{AB}\times\overline{SG}$.

Cela posé, si l'on désigne par p et P les aires de la pyramide inscrite et de la pyramide circonscrite, et par p' et P' les contours de leurs bases, on aura

$$p=\tfrac{1}{2}p'\times\overline{Sg}, \qquad P=\tfrac{1}{2}P'\times\overline{SG},$$

d'où l'on conclura

$$P-p=\tfrac{1}{2}P'\times\overline{SG}-\tfrac{1}{2}p'\times\overline{Sg}.$$

Mais il résulte de la nature des polygones réguliers inscrits et circonscrits au cercle (151), que les contours de ces polygones approchent sans cesse de l'égalité à mesure que l'on multiplie leurs côtés; et il est visible que, dans les mêmes circonstances, la différence entre les droites SG et Sg peut devenir aussi petite qu'on voudra : les produits $\frac{1}{2}P'\times\overline{SG}$ et $\frac{1}{2}p'\times\overline{Sg}$ approcheront donc aussi sans cesse de l'égalité, et la différence des aires de la pyramide inscrite et de la pyramide circonscrite pourra par conséquent devenir moindre que telle grandeur donnée qu'on voudra.

270. *Corollaire.* Il est évident que plus on multiplie les côtés des polygones inscrits et circonscrits, plus les pyramides inscrites et circonscrites approchent de se confondre avec le cône, et plus en même temps l'aire de la pyramide inscrite augmente, tandis que celle de la pyramide circonscrite diminue. En effet, le contour du polygone inscrit augmente toujours, ainsi que la droite Sg, qui, en s'approchant de la surface conique, s'éloigne sans cesse de la perpendiculaire SO, tandis que le contour du polygone circonscrit diminue sans cesse en s'approchant du cercle, et que la droite SG conserve

la même grandeur. Il suit évidemment de là, que, pour l'étendue, l'aire du cône est toujours comprise entre celles de la pyramide inscrite et de la pyramide circonscrite; mais comme, par le théorème précédent, on peut rendre la différence de ces dernières moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite qu'elle soit, on pourra toujours, à plus forte raison, rendre la différence entre l'aire du cône et celle de la pyramide inscrite ou de la pyramide circonscrite, aussi petite qu'on le voudra.

THÉORÈME.

271. *L'aire d'un cône droit a pour mesure la moitié du produit de la circonférence du cercle qui lui sert de base par son côté, ou* $\frac{1}{2}$ CR, *en nommant la première* C *et le second* R.

Démonstration. Si P représente actuellement le périmètre du polygone circonscrit, l'aire de la pyramide circonscrite sera exprimée par $\frac{1}{2}PR$ (269), puisque R est la même chose que SG; et désignant par X la vraie mesure de l'aire du cône, les trois quantités $\frac{1}{2}PR$, $\frac{1}{2}CR$ et X seront dans le cas du n° 186, puisque la première, toujours plus grande que les deux autres, en vertu du n° 270, et à cause que $P > C$, peut en approcher d'aussi près qu'on voudra : on aura donc

$$X = \tfrac{1}{2}CR \text{ (*)}.$$

THÉORÈME.

272. *L'aire de la portion qui reste de la surface conique, après qu'on en a retranché une partie* SA'D'B', *par un plan parallèle à la base, ou l'aire du cône*

(*) Ce théorème se démontrerait immédiatement par un raisonnement analogue à celui de la note du n° 187, en substituant des pyramides aux polygones employés dans la note citée. Le lecteur trouvera aisément de quelle manière il faudrait modifier ce raisonnement pour l'appliquer aux propositions des numéros 275, 280, 283, 297 et 304, qui complètent la mesure de l'aire et du volume des corps ronds.

tronqué ADBEA'D'B'E', fig. 144, *a pour mesure la moitié du produit de la somme des circonférences de ses deux bases* ADB et A'D'B', *par son côté* AA'. Fig. 144.

Démonstration. Si l'on élève par le point A, perpendiculairement à SA, la droite AC, égale en longueur à la circonférence $ADBE$, et que l'on tire SC, l'aire du triangle rectangle SAC, ayant pour mesure $\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{SA}$, est équivalente à l'aire du cône $SADBE$ (n° précéd.). Tirant ensuite la droite $A'C'$ parallèle à AC, les triangles SAC et $SA'C'$, semblables entre eux, donneront

$$AC : A'C' :: SA : SA';$$

mais on a aussi

circonf. $ADBE$: circonf. $A'D'B'E'$ :: SA : SA' (267);

le rapport $SA : SA'$, commun entre ces deux proportions, conduit à la suivante :

circonf. $ADBE$: circonf. $A'D'B'E'$ :: $AC : A'C'$;

et puisque AC = circonf. $ADBE$, par construction, il en résulte

$$A'C' = \text{circonf. } A'D'B'E'.$$

Il suit de là que l'aire du triangle $SA'C'$, égale à $\frac{1}{2}\overline{A'C'}\times\overline{SA'}$, sera équivalente à celle du cône retranché $SA'D'B'E'$: l'aire du trapèze $ACC'A'$ sera donc équivalente à celle du tronc de cône $ADBEA'D'B'E'$; et comme la droite AA' est perpendiculaire aux droites AC et $A'C'$, la mesure du trapèze $ACC'A'$ sera

$$\frac{1}{2}AA'\ (AC + A'C')\ (175),$$

ou $\frac{1}{2}AA'$ (circ. $ADBE$ + circ. $A'D'B'E'$),

comme le porte l'énoncé.

Puisqu'on peut prendre, au lieu de $\frac{1}{2}(AC + A'C')$, la droite $A''C''$, menée parallèlement à AC, par le milieu de AA' (175), il s'ensuit que l'on peut aussi substituer à $\frac{1}{2}$ (circ. $ADBE$ + circ. $A'D'B'E'$), la circonférence

$A''D''B''E''$ de la section faite dans le tronc de cône, à égale distance des deux bases, et parallèlement à leurs plans; car on aura cette suite de rapports égaux :

$$AC : A''C'' :: SA : SA''$$

$$:: \text{circ. } ADBE : \text{circ. } A''D''B''E'',$$

d'après laquelle l'égalité de circ. $ADBE$ et de AC entraîne celle de circ. $A''D''B''E''$ et de $A''C''$.

On conclura de là que l'aire convexe du tronc de cône a pour mesure $\overline{AA'} \times$ circ. $A''D''B''E''$, ou le *produit de son côté par la circonférence de la section faite à égale distance des bases*.

N. B. En substituant le sommet à la base supérieure, cette mesure devient celle de l'aire du cône entier.

THÉORÈME.

273. *En multipliant suffisamment les côtés du polygone inscrit, on pourra toujours former deux pyramides, l'une inscrite, et l'autre circonscrite, telles, que la différence de leurs volumes soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur.*

Démonstration. En effet, la pyramide inscrite et la pyramide circonscrite ayant même hauteur SO, *fig.* 143, en nommant p et P les volumes de ces pyramides, p' et P' les aires des polygones *abcdef*, $ABCDEF$ qui leur servent de bases, on aura

Fig. 143.

$$p = \tfrac{1}{3} p' \times \overline{SO}, \quad P = \tfrac{1}{3} P' \times \overline{SO},$$

ce qui donnera

$$P - p = \tfrac{1}{3} \overline{SO} \times (P' - p');$$

et comme on peut amener à tel degré de petitesse qu'on voudra la différence $P' - p'$ entre l'aire du polygone inscrit et celle du polygone circonscrit (184), on rendra donc moindre que telle grandeur donnée qu'on voudra,

la différence $P - p$ entre le volume de la pyramide inscrite et celui de la pyramide circonscrite.

274. *Corollaire.* Le volume du cône étant visiblement intermédiaire entre celui de la pyramide inscrite et celui de la pyramide circonscrite, il suit du théorème précédent, que l'on peut toujours assigner une pyramide inscrite et une pyramide circonscrite qui en diffèrent aussi peu qu'on voudra.

THÉORÈME.

275. *Le volume d'un cône a pour mesure le tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur, ou* $\frac{1}{3}$ CH, *en représentant par* C *la première, et par* H *la seconde.*

Démonstration. Soit P l'aire du polygone servant de base à la pyramide circonscrite, dont le volume aura alors pour mesure $\frac{1}{3}PH$, et soit X la vraie mesure du volume du cône ; les trois quantités $\frac{1}{3}PH$, $\frac{1}{3}CH$ et X seront encore dans le cas du numéro 186, puisque P surpasse toujours C, et que, d'après le numéro précédent, la première quantité, $\frac{1}{3}PH$, toujours plus grande que les deux autres, peut en approcher cependant d'aussi près qu'on voudra : on aura donc $X = \frac{1}{3}CH$ (*).

PROBLÈME.

276. *Trouver le volume d'un tronc de cône droit à bases parallèles.*

Solution. Il faudra prolonger les côtés AA' et BB', *fig.* 144, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent, pour connaître Fig. 144.
la hauteur SO du cône entier (268), au moyen de laquelle on aura pour le volume de ce corps, $\frac{1}{3}\overline{SO} \times \overline{ADBE}$; et

(*) Le théorème ci-dessus a également lieu pour le cône oblique ; car il est évident que le théorème du n° 273 et le corollaire du n° 274 ne supposent point que la perpendiculaire SO tombe sur le centre du cercle $a\,G\,b\,f$, et peuvent par conséquent s'adapter au cône oblique, sur la figure 142. Il en est de même à l'égard de la recherche du volume du cône tronqué, dans le n° suivant.

soustrayant de SO la hauteur du tronc OO', le reste SO' sera la hauteur du cône retranché, dont le volume sera par conséquent exprimé par $\frac{1}{3}\overline{SO'} \times \overline{A'D'B'E'}$. La différence entre ce produit et le précédent sera le volume du tronc de cône proposé.

Fig. 145. 277. Si l'on conçoit que le rectangle $ACC'A'$, *fig.* 145, tourne autour de l'un de ses côtés, CC', il engendrera le corps appelé *cylindre droit;* la ligne AA' décrira dans ce mouvement la *surface cylindrique droite.*

Un point quelconque A'' de cette droite décrira la circonférence du cercle $A''D''B''$, égal et parallèle au cercle ADB engendré par AC, et que l'on nomme la *base* du cylindre; car la droite $A''C''$, perpendiculaire à CC', égale à AC, décrira, en tournant autour de CC', un plan parallèle au plan ADB, et dont l'intersection avec la surface cylindrique sera $A''D''B''$. Il résulte de là que la section de la surface du cylindre droit, par un plan parallèle à sa base, est un cercle égal à cette base.

Le cylindre est terminé supérieurement par une base $A'D'B'$, égale et parallèle à sa base inférieure ADB. La droite CC', autour de laquelle tourne le parallélogramme $ACC'A'$ et qui contient évidemment les centres des bases et ceux des sections qui leur sont parallèles, se nomme l'*axe du cylindre*, et est perpendiculaire à la base (*).

(*) Le *cylindre oblique* est celui que renferme la surface décrite
Fig. 146. par une droite quelconque AA', *fig.* 146, assujettie à glisser parallèlement à elle-même le long de la circonférence d'un cercle ADB. Si l'on considère la droite génératrice AA' parvenue dans une position quelconque DD', que, par le centre de la base, on mène CC' parallèle et égale à AA', qu'on termine le corps par un plan $A'D'B'$ parallèle à ADB, en tirant $C'D'$, on formera le parallélogramme $DCC'D'$, et l'on aura $C'D' = CD$. Ainsi, la base supérieure $A'D'C'$ du cylindre oblique sera un cercle aussi bien que sa base inférieure et toutes les sections qui lui sont parallèles; mais l'axe CC' ne sera point perpendiculaire sur cette base, comme dans le cylindre droit.

THÉORÈME.

278. *Si l'on inscrit et circonscrit au cercle qui sert de base à un cylindre, des polygones d'un même nombre de côtés, et que, par les sommets des angles de ces polygones, on mène des droites parallèles à l'axe* OO', fig. 147, *en joignant leurs extrémités supérieures par* Fig. 147. *d'autres droites, on formera deux prismes, l'un inscrit, l'autre circonscrit, au cylindre proposé; et l'on pourra toujours prendre ces prismes tels, que la différence de leurs aires soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur.*

Démonstration. Les droites aa', bb', etc., élevées parallèlement à OO', et par conséquent perpendiculaires au plan $abcdef$, seront sur la surface du cylindre, puisque les rectangles $aOO'a'$, $bOO'b'$ sont égaux au rectangle générateur. Il est évident d'ailleurs que les rectangles $abb'a'$, $bcc'b'$, etc. sont égaux, puisqu'ils ont visiblement deux angles et trois côtés égaux chacun à chacun (85). Les arêtes aa', bb', etc. étant perpendiculaires sur ab, bc, etc., les aires des rectangles ab', bc', etc. seront exprimées par $\overline{ab} \times \overline{aa'}$, $\overline{bc} \times \overline{bb'}$, etc.; réunissant ces produits, en observant qu'ils ont tous un facteur commun, puisque $aa' = bb' =$ etc., l'aire du prisme inscrit, sans y comprendre les bases $abcdef$, $a'b'c'd'e'f'$, sera exprimée par $(ab + bc + cd + de + ef + fa) \times aa'$, ou par $p \times H$, si p désigne le périmètre du polygone $abcdef$, et H la hauteur aa', commune au prisme et au cylindre.

Pour éviter la confusion, je n'ai représenté qu'une seule face $ABB'A'$ du prisme circonscrit. Il est visible que si, dans cette face et par le point G, où le côté AB touche le cercle, on tire GG' parallèlement à OO', cette droite sera sur la surface cylindrique, puisque le rectangle $GOO'G'$ est égal au rectangle générateur. L'aire du rectangle $ABB'A'$ étant exprimée par $\overline{AB} \times \overline{GG'}$, l'aire totale du prisme circonscrit, en

n'y comprenant point les bases, sera égale au contour P du polygone circonscrit, multiplié par la hauteur GG' ou H, commune à tous les parallélogrammes qui forment l'enveloppe du prisme circonscrit et celle du prisme inscrit.

Cela posé, la différence de l'aire convexe du prisme inscrit à celle du prisme circonscrit, sera $P \times H - p \times H = (P - p)\ H$, et pourra devenir aussi petite qu'on voudra, en prenant des polygones inscrits et circonscrits, dont les contours P et p diffèrent l'un de l'autre de moins que telle grandeur donnée qu'on voudra.

279. *Corollaire.* Il suit évidemment de la proposition précédente et par les raisons déjà développées dans le n° 270, que la surface cylindrique est moindre que celle du prisme circonscrit et plus grande que celle du prisme inscrit, et que l'on peut par conséquent trouver un prisme, soit inscrit, soit circonscrit, dont l'aire diffère aussi peu qu'on voudra de l'aire du cylindre droit.

THÉORÈME.

280. *L'aire de la surface convexe du cylindre droit a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par sa hauteur* H, *ou le produit* CH.

Démonstration. Si l'on désigne par P le contour du polygone qui sert de base au prisme circonscrit au cylindre, et par X la vraie mesure de ce dernier, on aura PH pour l'aire du prisme circonscrit, et il est visible que les trois quantités PH, CH et X seront dans le cas du n° 186 : on aura donc $X = CH$

THÉORÈME.

281. *On peut toujours former deux prismes, l'un inscrit et l'autre circonscrit au cylindre, tels, que leurs volumes diffèrent aussi peu qu'on voudra.*

Dém. Le volume du prisme inscrit $abcdefa'b'c'd'e'f'$ est égal à $\overline{abcdef} \times H$ (260) ; et désignant l'aire du

polygone inscrit par p; celle du polygone circonscrit par P, le volume du prisme inscrit sera mesuré par pH, et celui du prisme circonscrit par PH; leur différence étant $(P-p)\,H$, pourra devenir aussi petite qu'on voudra, puisque la différence $P-p$, entre l'aire du polygone inscrit et celle du polygone circonscrit, peut être rendue moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite qu'elle soit (184).

282. *Corollaire.* Il suit de là que l'on peut construire un prisme inscrit et un prisme circonscrit tels, que leur volume diffère aussi peu qu'on voudra de celui du cylindre, qui sera d'ailleurs toujours plus grand que le premier, et moindre que le second.

THÉORÈME.

283. *Le volume d'un cylindre droit a pour mesure le produit de l'aire de sa base par sa hauteur*, ou $C'H$, C' *étant l'aire de cette base.*

Démonstration. Si l'on désigne par P' l'aire du polygone circonscrit, $P'H$ sera la mesure du volume du prisme circonscrit; et si X désigne la vraie mesure du cylindre, les trois quantités $P'H$, $C'H$ et X se trouvant dans le cas du n° 186, on aura nécessairement $X = C'H$ (*).

284. Si le demi-cercle ACB tourne autour de son diamètre AB, *fig.* 148, il engendrera la *sphère*, et la demi-circonférence qui l'enveloppe décrira la *surface sphérique.* Fig. 148.

Dans ce mouvement, chaque point de l'arc ACB décrit évidemment une circonférence de cercle ayant pour rayon la perpendiculaire DE, abaissée sur le

(*) Le théorème ci-dessus a également lieu à l'égard du cylindre oblique; car il est facile de voir que le théorème et le corollaire précédens ne supposent pas que l'axe du cylindre et les arêtes des prismes soient perpendiculaires au plan de la base.

diamètre AB que l'on nomme *axe*. Il faut pourtant excepter de cette remarque les extrémités A et B de l'axe, qui restent immobiles comme tous les points de cet axe, et que l'on nomme *pôles*.

La surface sphérique a tous ses points également éloignés du point O, centre du cercle-générateur ; car ce point ayant conservé la même situation sur le plan du demi-cercle ACB, dans toutes les positions prises par ce plan, sa distance à chacun des points de l'arc ACB, qui ont passé successivement par tous ceux de la sphère, n'a pas varié.

Il suit de là que le rayon du cercle ACB est aussi celui de la sphère.

THÉORÈME.

285. *La section de la sphère, par un plan quelconque, est toujours un cercle.*

Démonstration. La proposition est évidente par elle-même, d'après ce qui précède, lorsque le plan coupant passe par le centre de la sphère ; et alors la circonférence de cette section a pour rayon celui de la sphère.

Mais si $DGFH$ désigne un plan quelconque, et que, du centre O, on abaisse sur ce plan la perpendiculaire OE, le pied E de cette perpendiculaire sera à égale distance de tous les points de la section $DGFH$; car toutes les obliques OD, OG, OF, OH, étant égales comme rayons de la sphère, s'écarteront également de OE (200) : la courbe $DGFH$ sera donc un cercle ayant son centre en E, et DE pour rayon.

286. *Remarque.* La droite DE étant nécessairement moindre que le rayon OD, le cercle $DGFH$ sera moindre que celui qui résulterait d'une section faite par le centre de la sphère ; ce dernier serait un *grand cercle*, tandis que l'autre n'est qu'un *petit cercle*.

Tous les grands cercles, ayant même rayon, sont égaux entre eux.

287. *Corollaire.* Deux grands cercles, *ACBF*, *AIBK*, se coupent toujours en deux parties égales; car il est évident qu'ils ne peuvent se rencontrer que dans la droite *AB*, commune section de leurs plans, qui, passant par leur centre commun, est en même temps le diamètre de l'un et de l'autre, et les partage par conséquent en deux parties égales.

288. Trois cercles qui se coupent deux à deux sur la surface de la sphère, forment un *triangle sphérique*; mais on ne considère ordinairement que celui qui, comme *ICM*, est formé par trois arcs de grand cercle, plus petits que la demi-circonférence.

Si, du centre de la sphère, on mène des rayons aux points *C*, *I* et *M*, il est visible que ces rayons détermineront un angle trièdre *OCIM*, dont les angles plans *IOC*, *IOM*, *MOC*, seront mesurés par les arcs *CI*; *IM* et *CM*.

THÉORÈME.

289. *La somme de deux côtés d'un triangle sphérique est toujours plus grande que le troisième.*

Démonstration. Puisqu'en vertu du n° 222, la somme de deux quelconques des trois angles plans *IOC*, *IOM*, *MOC*, qui forment l'angle trièdre *OCIM*, surpasse le troisième, et que les arcs *CI*, *IM* et *CM*, qui mesurent ces angles, sont du même rayon, il en résulte nécessairement que la somme de deux quelconques de ces arcs, qui serait la mesure de la somme des angles auxquels ils correspondent (110), doit surpasser le troisième.

290. 1er *Corollaire.* Il suit de là que le plus court chemin pour aller d'un point à un autre sur la surface sphérique, est l'arc du grand cercle déterminé par le plan qui passe par ces deux points et par le centre de la sphère; car si l'on assignait pour plus court chemin entre les points *A* et *B*, *fig.* 149, une ligne *AMNB*, Fig. 149.

différente du grand cercle AB qui passe par ces points, que l'on prît un point M sur cette ligne, et que l'on tirât les arcs de grands cercles AM et MB, on aurait

$$AM + MB > AB \text{ (n° précédent).}$$

Prenant entre M et B le point N, et menant les arcs de grands cercles MN et NB, on aurait encore

$$MN + NB > MB,$$

et par conséquent

$$AM + MN + NB > AM + MB.$$

En continuant ainsi, on voit que plus on s'approche de la ligne $AMNB$, plus le chemin à parcourir pour aller de A en B augmente, d'où il est évident que AB est le plus court : et l'on n'en saurait trouver d'autre ; car le grand cercle que l'on mènerait par deux points quelconques de l'arc AB se confondrait avec cet arc, puisque tous ses points et le centre de la sphère sont compris dans un seul plan.

J'ai supposé la ligne $AMNB$ extérieure à tous les grands cercles menés par deux quelconques de ses points ; mais si le contraire avait lieu, ainsi qu'on le voit dans la partie ponctuée $MN'A$, on tirerait les arcs de grands cercles MN' et AN' ; et comme on aurait

$$AN' + MN' > AM,$$

il en résulterait encore

$$AN' + MN' + MN + NB > AM + MB > AB.$$

291. 2° *Corollaire.* Il suit encore du même théorème que la somme des côtés d'un triangle sphérique est moindre que la circonférence d'un grand cercle ; car si l'on prolonge les côtés AI et AM du triangle MAI, *fig.* 148, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en B, on aura

Fig. 148.

$$IM < BM + BI \text{ (289) ;}$$

ajoutant de part et d'autre $AM + AI$, il viendra

$$AM + AI + IM < BM + BI + AM + AI;$$

or, les arcs AM et BM forment la demi-circonférence ACB, les arcs AI et BI la demi-circonférence AIB, égale à la première (286); les quatre arcs réunis composent donc une circonférence de grand cercle, laquelle surpasse par conséquent la somme des côtés du triangle MAI.

Il est facile de voir que cette proposition résulte aussi des numéros 226 et 288.

THÉORÈME.

292. *Si, par le centre d'un cercle quelconque* DGFH, *tracé sur la sphère, on élève une perpendiculaire* AE, *elle passera par le centre de la sphère, et la coupera en deux points,* A *et* B, *dont chacun sera également éloigné de tous ceux de la circonférence* DGFH.

Démonstration. En effet, il est évident, par le numéro 200, que la perpendiculaire AE doit passer par une suite de points tels, que chacun soit à égale distance des points de la circonférence $DGFH$, décrite du pied E de cette perpendiculaire, comme centre; or, le point O, centre de la sphère, ayant la même propriété, doit par conséquent se trouver sur AE, et les points A et B, où AE rencontre la sphère, doivent être chacun à égale distance des points de la circonférence $DGFH$; bien entendu que la distance de ces derniers au point A n'est égale à leur distance au point B, que quand le point E tombe en O, ou qu'il s'agit d'un grand cercle $CILK$.

Il est visible que les arcs AD, AG, AF, AH, ayant pour cordes les distances du point A à chacun des points de la circonférence $DGFH$, et étant pris sur des grands cercles qui ont tous même rayon, sont égaux.

293. *Corollaire.* Il suit de ce qui précède que les

points A et B peuvent servir à décrire le cercle $DGFH$, sans qu'il soit besoin de connaître son centre, placé dans l'intérieur de la sphère, puisqu'il suffit de marquer tous les points dont les distances au point A ou au point B, mesurées sur la surface sphérique par les arcs de grand cercle AD et AG ou BD et BG, sont égales à celle que l'on a choisie pour décrire le cercle proposé.

Les points A et B se nomment en conséquence les *pôles* du cercle $DGFH$, et la droite AE en est l'*axe*.

THÉORÈME.

294. *Le plan mené par un point de la surface de la sphère, perpendiculairement au rayon qui passe par ce point, est tangent à la sphère; et réciproquement le plan tangent à un point quelconque de la surface sphérique, est perpendiculaire à l'extrémité du rayon.*

Fig. 150. *Démonstration.* Le plan AB, *fig.* 150, étant perpendiculaire sur le rayon OC, au point C, a tous ses autres points plus éloignés du centre O de la sphère que ne l'est le point C, puisque les obliques quelconques OD, OE, etc. sont plus longues que la perpendiculaire OC (200): donc les points D, E, etc. sont hors de la sphère; et le plan AB n'ayant qu'un seul point C de commun avec la surface de cette sphère, lui est tangent.

Réciproquement, le plan tangent à la sphère en C ne peut être que le plan AB, perpendiculaire sur le rayon OC; car ce plan n'ayant de commun avec la sphère que le point de *contact* C, et tous ses autres points étant plus éloignés du centre que celui-ci, il s'ensuit que le rayon OC est la plus courte ligne qu'on puisse mener du centre sur le plan tangent, et que par conséquent il est perpendiculaire sur ce plan.

THÉORÈME.

295. *Si l'on inscrit et si l'on circonscrit à un arc quelconque d'un demi-cercle deux portions de polygones réguliers du même nombre de côtés, et qu'on fasse*

tourner le demi-cercle autour de son diamètre, avec les portions de polygones, il sera toujours possible de rendre la différence entre l'aire du corps décrit par la portion inscrite, et l'aire du corps décrit par la portion circonscrite, aussi petite qu'on voudra.

Démonstration. L'aire du corps décrit par la portion de polygone *abcd*, *fig.* 151, quand elle tourne avec l'arc *ad* autour du diamètre *ap*, se compose des aires que décrit en particulier chacun de ses côtés. Le premier *ab* décrit un cône entier, et les autres des troncs de cône ayant pour bases les cercles engendrés par les perpendiculaires *be*, *cf*, *dg*, abaissées des points *b*, *c*, *d*, sur l'axe *aO* (267). L'aire de l'un de ces corps, de celui que décrit *cd*, par exemple, s'obtient en abaissant du milieu de ce côté, sur *aO*, la perpendiculaire *lq*, et est égale à $\overline{cd} \times$ circ. *lq* (272); mais cette expression peut être transformée en une autre ne contenant plus le facteur circ. *lq*, qui change pour chaque cône. Pour cela, on abaisse *cr* perpendiculaire sur *dg*; on tire *lO*; et les triangles *dcr* et *qlO*, semblables, comme ayant les côtés perpendiculaires chacun à chacun (65), donnent Fig. 151.

$$cd : cr :: lO : lq.$$

Mais *cr* est égal à *fg*, et les circonférences des cercles étant entre elles comme leurs rayons, on peut substituer au rapport de *lO* à *lq* celui des circonférences de cercle dont ces lignes seraient les rayons, et l'on aura

$$cd : fg :: \text{circ. } lO : \text{circ. } lq$$

d'où l'on conclura

$$\overline{cd} \times \text{circ. } lq = fg \times \text{circ. } lO;$$

donc l'aire du cône décrit par *cd* aura aussi pour expression $\overline{fg} \times$ circ. *lO*, c'est-à-dire *le produit de sa hauteur par la circonférence du cercle inscrit au polygone dont son côté fait partie*. Il en est de même des aires des

cônes décrits par les autres côtés et dont les hauteurs sont *ef* et *ae*. La circonférence du cercle inscrit étant un facteur commun à toutes ces aires, leur somme, ou l'aire du corps décrit par la portion *abcd* du polygone inscrit, sera donc égale à la somme des lignes *fg*, *ef*, *ae*, c'est-à-dire à la partie *ag* de l'axe, comprise entre l'extrémité *a* du premier côté et la perpendiculaire abaissée sur cet axe par l'extrémité du dernier côté, multipliée par la circonférence du cercle inscrit, ou à $\overline{ag} \times$ circ. lO.

Par la même raison, l'aire du corps décrit par la portion *ABCD* du polygone circonscrit, aura pour expression $\overline{AG} \times$ circ. LO. Cette dernière quantité surpassera toujours la première, d'abord parce que circ. LO sera toujours plus grand que circ. lO, ensuite parce que AG surpasse ag. En effet, on a

$$AG = aG + Aa \quad \text{et} \quad ag = aG + Gg,$$

d'où il résulte

$$AG - ag = Aa - Gg = Dd - Gg,$$

puisque $Aa = Dd$; mais il est visible que $Gg < Dd$, et qu'on peut rendre Aa ou Dd aussi petit qu'on voudra, en multipliant suffisamment le nombre des côtés des polygones : il en sera donc de même de la différence des lignes Dd et Gg, nécessairement moindre que la plus grande de ces lignes. Par conséquent AG surpassera toujours ag, et pourra en approcher d'aussi près qu'on voudra (*). Dans cette circonstance, LO

(*) Le triangle DOG donne (59)

$$dO : gO :: Dd : Gg, \text{ d'où } Gg = Dd \times \frac{gO}{dO};$$

ce qui prouve encore que $Gg < Dd$, puisque gO n'est que l'un des côtés du triangle rectangle dont dO est l'hypoténuse. De plus, le point g étant l'extrémité commune de toutes les portions de polygones inscrits à l'arc ad, les lignes gO et dO ne changent point non plus que leur rapport : Gg diminue donc en même temps que Dd

et lO s'approchant également de plus en plus, circ. LO diffère de moins en moins de circ. lO : on pourra donc rendre la différence $\overline{AG} \times$ circ. $LO - \overline{ag} \times$ circ. lO moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite qu'elle soit, en considérant cette différence comme celle de deux rectangles dont les bases et les hauteurs peuvent être aussi près que l'on voudra de l'égalité.

296. *Corollaire.* L'expression $AG - ag = Dd - Gg$ montre aussi que AG diminue en même temps que Dd, car la hauteur ag est commune à tous les polygones inscrits à l'arc ad; LO demeurant aussi le même, il en résulte que l'aire du corps décrit par la portion $ABCD$ diminue en se rapprochant de la sphère. L'augmentation de lO dans la même circonstance, prouve que l'aire du corps décrit par $abcd$ augmente alors, et que par conséquent l'aire de la portion de sphère décrite par aLd, est moindre que celle du premier de ces corps, et plus grande que celle du second. Il suit de là qu'on peut assigner deux corps de ce genre, dont l'aire diffère aussi peu que l'on voudra de celle de la portion de la sphère décrite par l'arc.

THÉORÈME.

297. *L'aire de la portion de sphère, ou calotte sphérique, décrite par un arc qui ne surpasse pas le quart de la circonférence du cercle générateur, est égale au produit de cette circonférence par la partie du diamètre qui mesure la hauteur de la calotte.*

Démonstration. Soit X la vraie mesure de l'aire décrite par l'arc ad; en la comparant à celle du corps décrit par la portion de polygone circonscrit $ABCD$, on aura les trois quantités

$$\overline{AG} \times \text{circ. } LO, \ \overline{ag} \times \text{circ. } LO, \text{ et } X;$$

et la première étant toujours plus grande que les deux autres, dont elle peut approcher d'aussi près que l'on voudra, on en conclura, par le n° 186,

$$X = \overline{ag} \times \text{circ. } LO.$$

298. 1er *Corollaire.* Il suit de là que l'aire de la sphère entière a pour mesure le produit de son diamètre par la circonférence d'un grand cercle, c'est-à-dire $\overline{ap} \times$ circ. LO. En effet, le théorème précédent s'applique au quart de cercle aLm, et donne $\overline{aO} \times$ circ. LO pour l'aire de la demi-sphère qu'il engendre en tournant autour de l'axe aO; pour le second quart de cercle pnm, on a de même $\overline{pO} \times$ circ. LO : la somme de cette quantité et de la précédente, est

$$(aO + pO) \text{ circ. } LO = \overline{ap} \times \text{circ. } LO.$$

En général, l'aire d'une portion quelconque de la surface sphérique, comprise entre deux plans parallèles, ou d'une *zone*, est égale à la hauteur de cette zone, ou à la distance perpendiculaire des plans qui la terminent, multipliée par la circonférence d'un grand cercle; car si de la calotte décrite par l'arc aLm, et dont l'aire est mesurée par $\overline{aO} \times$ circ. LO, on retranche la calotte décrite par l'arc aLd, et dont l'aire est mesurée par $\overline{ag} \times$ circ. LO, on aura

$$(aO - ag) \text{ circ. } LO = \overline{Og} \times \text{circ. } LO,$$

pour l'aire de la zone décrite par l'arc dm.

On trouverait d'une manière analogue, que la zone décrite par l'arc mn doit être exprimée par $\overline{Oo} \times$ circ. LO; et en ajoutant ce produit à $\overline{Og} \times$ circ. LO, on aurait, dans le résultat $(Oo + Og)$ circ. $LO = \overline{og} \times$ circ. LO, l'expression de l'aire de la zone décrite par l'arc dmn, laquelle comprend le centre de la sphère.

299. 2e *Corollaire.* Il suit encore de ce qui précède, que l'aire de la surface sphérique est quadruple de celle de son grand cercle; car l'aire de ce dernier est exprimée par $\frac{1}{2} CR$, si l'on désigne sa circonférence par C, et

son rayon par R (187); mais nommant D le diamètre, on aura $R = \frac{1}{2} D$, et par conséquent $\frac{1}{2} R = \frac{1}{4} D$, d'où l'on tirera $\frac{1}{4} CD$ pour l'aire du grand cercle, résultat qui n'est en effet que le quart du produit CD, par lequel se mesure l'aire de la sphère (n° précédent).

THÉORÈME.

300. *L'aire de la portion* ACBIA, fig. 148, *comprise* Fig. 148.
entre deux grands cercles qui se coupent, et que l'on nomme fuseau sphérique, *est à la surface de la sphère, comme l'arc* CI *du cercle* CILK *perpendiculaire à l'intersection commune des plans* BCA *et* BIA, *est à sa circonférence, ou comme l'angle plan qui mesure leur angle dièdre* CABI, *est à quatre droits.*

Démonstration. La proposition est évidente lorsque l'arc CI est partie aliquote de la circonférence $CILK$; car si l'on conçoit cette circonférence divisée en effet dans ses parties aliquotes, et que, par les points A, B et par les points de division, on mène des grands cercles, la surface sphérique sera partagée en autant de fuseaux égaux à $ACBIA$, que le cercle $CILK$ contient de parties, puisqu'il est visible que deux fuseaux de la même sphère sont égaux lorsque les plans des cercles qui les déterminent font respectivement le même angle dièdre.

Quand l'arc CI n'est pas aliquote de la circonférence, on prouve, par un raisonnement analogue à celui du n° 109, que le rapport du fuseau $ACBIA$ à la surface entière de la sphère, ne peut être ni moindre ni plus grand que celui de l'arc CI à la circonférence $CILK$.

Le plan $CILK$ étant perpendiculaire à la droite AB, l'angle plan COI mesure évidemment l'angle dièdre $CABI$; et puisque le rapport de cet angle à quatre droits est le même que celui de l'arc CI qui le mesure, avec la circonférence $CILK$ (110), il s'ensuit nécessairement que l'angle COI est à quatre droits comme l'aire du fuseau $ACBIA$ est à celle de la sphère.

THÉORÈME.

301. *L'aire d'un triangle sphérique est à celle de la sphère entière, comme la différence entre la somme des trois angles dièdres formés par les cercles qui composent ce triangle et deux angles droits, est à huit angles droits.*

Démonstration. Les trois cercles *ACBL*, *CILK* et *MIFK*, qui forment le triangle sphérique *CIM*, partagent la surface sphérique en huit triangles, parmi lesquels *CKM* et *FIL* sont égaux, ainsi que l'on peut s'en convaincre en remarquant que les angles trièdres *OCKM* et *OFIL*, auxquels ils correspondent (288), ont toutes leurs parties égales (*). Cela posé, en dé-

(*) L'égalité des parties de ces angles trièdres prouve bien celle des parties des triangles sphériques; mais il est facile de voir que les côtés de ces triangles ne sont pas assemblés de la même manière, et qu'on ne peut par conséquent les appliquer l'un sur l'autre (225).

Cavalleri, à qui l'on doit la proposition ci-dessus (*Directorium generale uranometricum, Bononiæ*, 1632, pag. 316), et les auteurs qui l'ont suivi, ont regardé l'égalité des triangles sphériques dont les côtés sont égaux, chacun à chacun, comme analogue à celle des triangles rectilignes, sans faire attention qu'on ne pouvait pas retourner la surface sphérique comme le plan; mais au fond, cette difficulté est plus apparente que réelle, et il y a plusieurs manières de se convaincre de l'égalité des aires des triangles dont il s'agit: en voici d'ailleurs une démonstration.

Si par les sommets des angles de chacun des triangles proposés, on fait passer un cercle, et que par son pôle on mène des arcs de grand cercle aux angles des triangles proposés, ces arcs seront égaux (293); on formera par ce moyen sur chaque côté des triangles proposés, un triangle sphérique isocèle. Les triangles rectilignes formés par les cordes des côtés des triangles sphériques proposés étant égaux (99), les cercles dont on vient de parler seront aussi égaux (119), et auront leurs pôles placés aux mêmes distances de leur circonférence; par conséquent les trois triangles sphériques isocèles du premier des triangles proposés seront évidemment égaux aux trois du second, chacun à chacun, et les aires des triangles proposés seront formées de la même manière avec celles des nouveaux triangles.

signant la surface de la sphère par S, et l'angle droit par D, l'aire du fuseau $ICKMI$ aura pour expression

$$S \times \frac{\text{ang. } CIKM}{4D} \text{ (n° précédent)};$$

et comme ce fuseau est composé des triangles CIM, CKM, on aura

$$CIM + CKM = \frac{S \times \text{ang. } CIKM}{4D};$$

l'aire du fuseau $MIFAM$ étant

$$\frac{S \times \text{ang. } IMFA}{4D};$$

on trouvera

$$CIM + CIF = \frac{S \times \text{ang. } IMFA}{4D};$$

enfin, le fuseau $CILBC$, dont l'aire est exprimée par

$$\frac{S \times \text{ang. } ICLB}{4D},$$

donnera

$$CIM + MIL = \frac{S \times \text{ang. } ICLB}{4D}.$$

Mais si l'on met à la place du triangle CKM son égal FIL, et qu'on ajoute ces expressions, en observant que $CIM + CIF + FIL + MIL$ composent la moitié de la surface sphérique, située en avant du plan $ACBL$, ou l'*hémisphère* $IACBL$, il viendra

$$2CIM + \tfrac{1}{2}S = \frac{S}{4D}(\text{ang. } CIKM + \text{ang. } IMFA + \text{ang. } ICLB)$$

Les trois angles dièdres $CIKM$, $IMFA$, $ICLB$ sont évidemment ceux que forment entre eux les plans des côtés du triangle sphérique CIM; et, pour abréger, je les désignerai par une seule lettre de leur arête, savoir,

celle qui se trouve à l'intersection des deux côtés du triangle : de cette manière, les angles $CIKM$, $IMFA$, $ICLB$ seront respectivement les angles I, M, C, et par conséquent

$$2CIM + \tfrac{1}{2}S = \frac{S}{4D}(I + M + C).$$

Retranchant de part et d'autre $\frac{1}{2}S$, on obtiendra

$$2CIM = \frac{S(I + M + C)}{4D} - \tfrac{1}{2}S;$$

réduisant ensuite au même dénominateur tous les termes de cette expression de $2CIM$, et prenant la moitié du résultat, il viendra

$$CIM = \frac{S(I + M + C - 2D)}{8D}$$

ce qui donnera

$$CIM : S :: I + M + C - 2D : 8D \ (*).$$

THÉORÈME.

302. *Si, par les extrémités des portions correspondantes de polygones réguliers, inscrites et circonscrites au même arc, on tire deux rayons, on formera deux secteurs polygonaux qui, en tournant autour de l'un de ces rayons, engendreront des volumes dont la différence peut devenir aussi petite qu'on voudra, lorsqu'on multipliera suffisamment le nombre des côtés des polygones.*

Fig. 151. *Démonstration.* En tirant les rayons BO, CO, *fig.* 151, on voit que le corps engendré par la figure $abcdO$, en tournant autour de l'axe aO, se compose de ceux qu'engendrent les triangles abO, bcO, cdO, et qu'il faut évaluer séparément. Cela posé, si l'on abaisse sur

(*) Les angles I, M et C sont les angles mêmes du triangle sphérique (*Voyez le Traité élémentaire de Trigonométrie et d'application de l'Algèbre à la Géométrie*, chap. II).

aO la perpendiculaire be, on reconnaîtra que la corde ab et le rayon Ob, en tournant autour de aO, engendrent deux cônes ayant l'un et l'autre pour base le cercle décrit par la perpendiculaire be : la somme de leurs volumes, ou le volume du corps engendré par le triangle abO, sera donc exprimée par $\frac{1}{3}\overline{aO} \times$ cerc. be (275). Cette expression se transforme en une autre où ne se trouve plus le cercle be, en observant que l'aire du cône engendré par la corde ab a pour expression $\frac{1}{2}\overline{ab} \times$ circ. be (271) ; mais on a aussi

$$\text{cerc. } be = \tfrac{1}{2}\overline{be} \times \text{circ. } be \text{ (187)}$$

il résultera de là

$$\text{aire du cône } ab : \text{cerc. } be :: \tfrac{1}{2}\overline{ab} \times \text{circ. } be : \tfrac{1}{2}\overline{be} \times \text{circ. } be,$$

ou

$$:: ab : be,$$

en divisant les deux termes du second rapport par $\frac{1}{2}$ circ. be. Si maintenant on abaisse Oh, perpendiculaire sur ab, et que l'on compare entre eux les triangles abe et ahO, semblables, puisqu'ils sont rectangles l'un et l'autre, et qu'ils ont de plus un angle commun en a, on obtiendra la proportion

$$ab : be :: aO : Oh,$$

où se trouve encore le rapport $ab : be$; ainsi

$$\text{aire du cône } ab : \text{cerc. } be :: aO : Oh,$$

et par conséquent

$$\text{cerc. } be = \frac{Oh}{aO} \times \text{aire du cône } ab.$$

Par le moyen de cette expression, le volume du corps engendré par le triangle abO, et égal à $\frac{1}{3}\overline{aO} \times$ cerc. be,

deviendra

$$\tfrac{1}{3}\,\overline{Oh} \times \text{aire du cône } ab,$$

d'où il résulte que *le volume d'un corps décrit par un triangle qui tourne autour de l'un de ses côtés, a pour mesure le tiers de l'aire du cône engendré par l'un de ses deux autres côtés, multiplié par la perpendiculaire abaissée sur ce côté, de l'angle opposé.*

A l'égard du second triangle bcO, il faut prolonger bc jusqu'à la rencontre de tO; et, d'après ce qui précède, le volume du corps engendré par le triangle ctO étant $\frac{1}{3}\,\overline{Oi} \times$ aire du cône ct, tandis que celui du corps engendré par le triangle btO est $\frac{1}{3}\,\overline{Oi} \times$ aire du cône bt, la différence de ces expressions, ou la mesure du corps engendré par le triangle bcO, sera visiblement égale à $\frac{1}{3}\,\overline{Oi} \times$ la différence entre l'aire du cône ct et celle du cône bt, différence qui est précisément l'aire du cône tronqué décrit par le côté bc. Les mêmes raisonnemens prouveraient aussi que le volume du corps engendré par le triangle cdO, est mesuré par $\frac{1}{3}\,\overline{Ol} \times$ aire du cône tronqué décrit par cd. En continuant ainsi de proche en proche, et en observant que les perpendiculaires Oh, Oi, Ol, etc. sont toutes égales, on voit que, quel que soit le nombre des côtés ab, bc, cd, etc., le volume du corps engendré par le secteur polygonal $abcdO$, aura pour mesure $\frac{1}{3}\,\overline{Ol} \times$ la somme des aires décrites par les côtés ab, bc, cd; etc., somme qui n'est autre chose que l'aire décrite par la portion de polygone $abcd$.

En appliquant ce résultat au secteur polygonal circonscrit $ABCDO$, on trouvera que le volume du corps qu'il engendre est égal à $\frac{1}{3}\,\overline{OL} \times$ aire décrite par la portion de polygone $ABCD$; et comme il a été prouvé (295) que les aires décrites par les portions correspondantes de polygones réguliers, inscrits et circonscrits, peuvent s'approcher d'aussi près qu'on voudra, tandis que la

différence des apothèmes OL et Ol diminue sans cesse, il en résulte évidemment que les volumes engendrés par le secteur polygonal inscrit et par le secteur polygonal circonscrit, correspondans, tendent aussi sans cesse vers l'égalité, et peuvent en approcher aussi près qu'on voudra.

303. *Corollaire.* Il est visible que le corps décrit par le secteur circulaire $aLdO$, et qu'on nomme *secteur sphérique*, est moindre que le corps décrit par le secteur polygonal circonscrit, et plus grand que celui que décrit le secteur polygonal inscrit: il suit donc du théorème précédent, que la différence entre le volume du premier corps et celui de l'un quelconque des deux autres, peut être rendue aussi petite que l'on voudra, en multipliant suffisamment les côtés des polygones.

THÉORÈME.

304. *Le volume d'un secteur sphérique est égal à l'aire de la calotte sur laquelle il s'appuie, multipliée par le tiers du rayon, ou à* $\frac{1}{3}$SR, *S désignant cette aire, et* R *le rayon.*

Démonstration. Si P représente l'aire décrite par la portion de polygone circonscrit $ABCD$, le volume du corps engendré par le secteur polygonal $ABCDO$ sera

$$P \times \tfrac{1}{3}\overline{OL}, \text{ ou } \tfrac{1}{3}PR \text{ (302)};$$

nommant à l'ordinaire X la vraie mesure du volume du secteur sphérique, on aura les trois quantités $\frac{1}{3}PR$, $\frac{1}{3}SR$ et X, placées dans les circonstances du n°. 186, et l'on en conclura nécessairement $X = \frac{1}{3}SR$.

Il est évident que l'on connaît par ce résultat le volume du secteur sphérique, puisque son aire S est celle de la calotte décrite par l'arc ad.

305. 1er *Corollaire.* Il suit de là que le volume de la sphère est égal à son aire multipliée par le tiers du rayon, puisque si l'on prend, au lieu de l'arc ad, le quart de la circonférence, ou am, le secteur sphérique

deviendra égal à la demi-sphère, parce que le rayon mO, perpendiculaire sur aO, décrira un plan qui partagera la sphère en deux également ; et l'on aura pour la moitié ou l'hémisphère supérieur, $\frac{1}{2} S \times \frac{1}{3} \overline{mO}$, en prenant S pour l'aire de la sphère entière : réunissant les deux moitiés, le total $S \times \frac{1}{3} \overline{mO}$ sera le volume de la sphère.

L'aire de la sphère étant égale à quatre fois celle d'un de ses grands cercles, ou à quatre cercles, son volume deviendra $\frac{4}{3} R \times$ cercle, ou $\frac{2}{3} D \times$ cercle, c'est-à-dire que *le volume de la sphère est égal à l'aire de son grand cercle, multipliée par les deux tiers du diamètre.*

306. 2e *Corollaire.* Si l'on voulait obtenir le volume engendré par un secteur aOn, plus grand que le quart de cercle, on retrancherait de la sphère entière le secteur engendré par nOp, et égal à $\frac{1}{3} \overline{mO} \times$ aire de la calotte décrite par l'arc np ; la différence serait $\frac{1}{3} mO$ multiplié par la différence entre l'aire entière de la sphère et celle de la calotte décrite par np, différence qui est l'aire décrite par l'arc amn, ou celle de la calotte qui sert de base au secteur proposé.

307. 3e *Corollaire.* Le volume de la portion de sphère engendrée par le demi-segment circulaire $aLdg$, et que l'on nomme *segment sphérique*, s'obtiendra en retranchant du volume du secteur sphérique décrit par le secteur circulaire $aLdO$, celui du cône décrit par le triangle dgO.

Quant au volume renfermé entre la zone engendrée par l'arc dLc et les plans que décrivent les perpendiculaires dg, cf, on l'obtiendra en retranchant le segment sphérique décrit par le demi-segment circulaire acf, de celui que décrit adg.

DE LA COMPARAISON DES CORPS RONDS.

308. Les corps ronds semblables sont ceux qui sont engendrés par des figures semblables : tels sont les cônes $SADB$ et $SA'D'B'$, *fig.* 141, engendrés par les triangles semblables ACS, $A'C'S$. Fig. 141.

Il suit du n° 267, que les côtés, les hauteurs et les circonférences des bases des cônes semblables sont proportionnels, et que les aires de leurs bases sont comme les quarrés de leurs lignes homologues.

Les cylindres $ADBA'D'B'$ et $adba'd'b'$, *fig.* 145, engendrés par les rectangles semblables $ACC'A'$, $acc'a'$, sont aussi semblables; et la similitude de ces figures donnera encore les rapports égaux Fig. 145.

$$AA' : ad' :: AC : ac :: \text{circ. } AC : \text{circ. } ac,$$
$$\overline{AA'}^2 : \overline{ad'}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2 :: \text{cerc. } AC : \text{cerc. } ac.$$

Enfin, les cercles étant des figures semblables, les sphères sont aussi des corps semblables.

THÉORÈME.

309. *Les aires des cônes semblables sont comme les quarrés des côtés de ces cônes, et leurs volumes comme les cubes de ces mêmes côtés*

Démonstration. 1°. Si l'on multiplie par ordre les deux proportions

$$\text{circ. } AC : \text{circ. } A'C' :: AS : A'S, \textit{ fig. } 141, \qquad \text{Fig. 141.}$$
$$\tfrac{1}{2}AS : \tfrac{1}{2}A'S :: AS : A'S,$$

il viendra

$$\tfrac{1}{2}\overline{AS} \times \text{circ. } AC : \tfrac{1}{2}\overline{A'S} \times \text{circ. } A'C' :: \overline{AS}^2 : \overline{A'S}^2,$$

proportion dont les deux premiers termes expriment les aires des cônes $SADB$ et $SA'D'B'$ (271).

2°. Si l'on multiplie par ordre les deux proportions

$$\text{cerc. } AC : \text{cerc. } A'C' :: \overline{AS}^2 : \overline{A'S}^2,$$
$$\tfrac{1}{3}CS : \tfrac{1}{3}C'S :: AS : A'S,$$

on aura

$$\tfrac{1}{3}\overline{CS} \times \text{cerc. } AC : \tfrac{1}{3}\overline{C'S} \times \text{cerc. } A'C' :: \overline{AS}^3 : \overline{A'S}^3,$$

proportion dont les deux premiers termes expriment les volumes des cônes proposés, $SADB$, $SA'D'B'$ (275).

THÉORÈME.

310. *Les aires de deux cylindres semblables sont comme les quarrés de leurs côtés, et leurs volumes comme les cubes.*

Démonstration. 1°. En multipliant par ordre les deux proportions

Fig. 145. $$\text{circ. } AC : \text{circ. } ac :: \overline{AA'} : \overline{aa'} \text{ (308), } \textit{fig. } 145,$$
$$\overline{AA'} : \overline{aa'} :: \overline{AA'} : \overline{aa'},$$

il en résultera

$$\overline{AA'} \times \text{circ. } AC : \overline{aa'} \times \text{circ. } ac :: \overline{\overline{AA'}}^2 : \overline{\overline{aa'}}^2,$$

proportion dont les deux premiers termes expriment les aires des cylindres proposés (280).

2°. Si l'on multiplie par ordre les deux proportions

$$\text{cerc. } AC : \text{cerc. } ac :: \overline{\overline{AA'}}^2 : \overline{\overline{aa'}}^2 \text{ (308)},$$
$$\overline{AA'} : \overline{aa'} :: \overline{AA'} : \overline{aa'},$$

on aura

$$\overline{AA'} \times \text{cerc. } AC : \overline{aa'} \times \text{cerc. } ac :: \overline{\overline{AA'}}^3 : \overline{\overline{aa'}}^3,$$

proportion dont les deux premiers termes expriment les volumes des cylindres proposés (283).

THÉORÈME.

311. *Les aires de deux sphères sont comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres, et leurs volumes comme les cubes de ces mêmes lignes.*

Démonstration. Soient R et R' les rayons des sphères proposées, D et D' leurs diamètres, S et S' leurs aires, C et C' les circonférences de leurs grands cercles; on aura, 1°.

$$C : C' :: D : D';$$

multipliant cette proportion par la proportion évidente

$$D : D' :: D : D',$$

il viendra

$$CD : C'D' :: D^2 : D'^2;$$

or, CD et $C'D'$ désignent les aires des sphères (298): donc

$$S : S' :: D^2 : D'^2$$
$$:: 4R^2 : 4R'^2 :: R^2 : R'^2,$$

en observant que $D = 2R$ et $D' = 2R'$.

2°. Si l'on multiplie par ordre les deux proportions

$$S : S' :: R^2 : R'^2,$$
$$\tfrac{1}{3}R : \tfrac{1}{3}R' :: R : R',$$

on aura

$$\tfrac{1}{3}RS : \tfrac{1}{3}R'S' :: R^3 : R'^3;$$

proportion dont les deux premiers termes expriment les volumes des sphères proposées (305); et comme $R^3 : R'^3 :: D^3 : D'^3$, on aura pareillement

$$\tfrac{1}{3}RS : \tfrac{1}{3}R'S' :: D^3 : D'^3.$$

312. *Remarque.* On compare ordinairement la sphère avec le cylindre circonscrit, c'est-à-dire avec le cylindre $FGG'F'$, *fig.* 150, dont les bases sont égales au grand cercle de la sphère OCC', et dont la hauteur FF' est égale au diamètre de cette même sphère. L'aire de ce cylindre étant mesurée par $\overline{FF'} \times$ circ. FC (280), Fig. 150.

est égale à celle de la sphère (298), puisque $FF' = CC'$ et circ. FC = circ. CO.

Le volume du même cylindre, exprimé par $FF' \times$ cerc. FC (283), étant comparé à celui de la sphère, mesuré par $\frac{2}{3}\ \overline{CC'} \times$ cerc. CO (305), il en résulte que ce dernier n'est que les deux tiers de l'autre.

313. *Conclusion.* Je n'ai donné dans ce qui précède que les propositions nécessaires à la mesure des aires et des volumes; mais la manière d'effectuer les multiplications prescrites par les énoncés ou formules générales, qui complète les règles du *toisé* tant des surfaces que des corps, est suffisamment indiquée dans les art. VIII et suivans du SUPPLÉMENT au *Traité élémentaire d'Arithmétique*, placé en tête du présent Ouvrage. Pour connaître la théorie des intersections des plans et des surfaces courbes qui forme le Complément des Élémens de Géométrie envisagés dans toute leur étendue, les Lecteurs pourront recourir aux *Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes* (ou Élémens de Géométrie descriptive), 6e édition.

Quant aux corps réguliers, ou polyèdres terminés par des polygones réguliers égaux formant des angles dièdres égaux, ils sont traités avec beaucoup de détail dans la *Géométrie* de M. Legendre. Je me bornerai à montrer ici que le nombre de ces corps ne saurait surpasser cinq, et qu'ils ne peuvent être formés que par des triangles équilatéraux, ou des quarrés, ou des pentagones. Cela se voit en observant que puisque la somme des angles plans qui composent un angle polyèdre doit être moindre que quatre droits (226), on ne peut, avec trois hexagones seulement, former un angle trièdre; car la somme des trois angles plans serait alors égale à quatre droits (82): à plus forte raison ne saurait-on employer plus de trois hexagones ou des polygones d'un plus grand nombre de côtés. Il suit de là que l'on peut assembler trois, quatre ou cinq triangles équilatéraux

pour former chaque angle polyèdre, et seulement trois quarrés ou trois pentagones, ce qui fournit en effet cinq corps.

Celui dont les angles sont trièdres et les faces triangulaires, est le *tétraèdre régulier*, formé de quatre triangles équilatéraux, *fig.* 152. Fig. 152.

L'*octaèdre* régulier a ses angles tétraèdres, et est formé par huit triangles équilatéraux, *fig.* 153. Fig. 153.

L'*icosaèdre* a ses angles pentaèdres, et est formé par vingt triangles équilatéraux, *fig.* 154. Fig. 154.

L'*hexaèdre* ou *cube* a ses angles trièdres, et est formé par six quarrés égaux, *fig.* 155. Fig. 155.

Le *dodécaèdre* a aussi ses angles trièdres, et est formé par douze pentagones, *fig.* 156. Fig. 156.

ADDITION *à la Note de la page* 93.

Cette incommensurabilité de la diagonale avec le côté du quarré, à laquelle, par une exagération assez singulière, Platon (*des Lois*, livre 7, vers la fin) attachait une importance telle, qu'il regardait comme indigne du nom d'homme celui qui l'ignorait, se trouve démontrée à la fin du dixième livre des *Élémens* d'Euclide, et dans plusieurs des traités modernes.

Voici comment M. John Leslie l'établit, en terminant le Ve livre de ses *Elements of Geometry*.

Soit ABC, *fig.* 84*, un triangle rectangle isoscèle, moitié d'un quarré; qu'on porte le côté AB sur la diagonale AC, de C en E, qu'on tire BE, et que, par le point E, on mène EF perpendiculaire sur AC, on verra que le triangle BEF est isoscèle; car si des angles droits CBF et CEF, on retranche les angles égaux CBE et CEB du triangle BEC, isoscèle par construction, il reste les angles EBF et FEB égaux: donc $EF=BF$. De plus, l'angle BAC ou FAE, étant la moitié d'un droit, il en est de même de l'angle AFE: donc le triangle AEF est isoscèle; par conséquent $EF=AE$, et est $<AF$. Ainsi l'*excès* AE *de la diagonale* AC *sur le côté* AB *est contenu dans ce côté deux fois avec un reste.* Fig. 84*.

Soit AH ce reste; comme il est dans le triangle rectangle et isoscèle AEF, ce qu'est AE dans le triangle ABC, il sera donc contenu dans AE deux fois avec un reste. Soit AL ce nouveau reste, et AHI le triangle rectangle et isoscèle construit sur AH comme côté; le reste AL sera de même contenu dans AH deux fois avec un reste, et ainsi de suite, sans que jamais l'opération puisse être terminée,

quoique les restes aillent toujours en décroissant : donc AC et AB n'ont point de commune mesure.

La suite des égalités

$$\begin{aligned} AC &= AB + AE, \\ AB &= 2AE + AH. \\ AE &= 2AH + AL, \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

fournit des approximations du rapport de AC avec AB, d'autant plus exactes qu'on la pousse plus loin, ou que le reste qu'on néglige est plus petit. Si c'est au reste AL que l'on s'arrête, on trouvera

$$AH = 2AL, \text{ d'où } AB = 12AL, \quad AC = 17AL \quad \text{et} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{17}{12}.$$

Cette même suite conduit à une fraction continue d'une forme très remarquable. On a d'abord

$$\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{AE}{AB};$$

puis on obtient

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AE}{2AE + AH} = \frac{1}{2 + \dfrac{AH}{AE}},$$

$$\frac{AH}{AE} = \frac{AH}{2AH + AL} = \frac{1}{2 + \dfrac{AL}{AH}},$$

etc.,

en divisant les deux termes de la seconde fraction de chaque ligne, par le numérateur de cette fraction.

De là on conclut facilement que

$$\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{1}{2 + \dfrac{AH}{AE}} = 1 + \frac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{AL}{AH}}},$$

et en général,

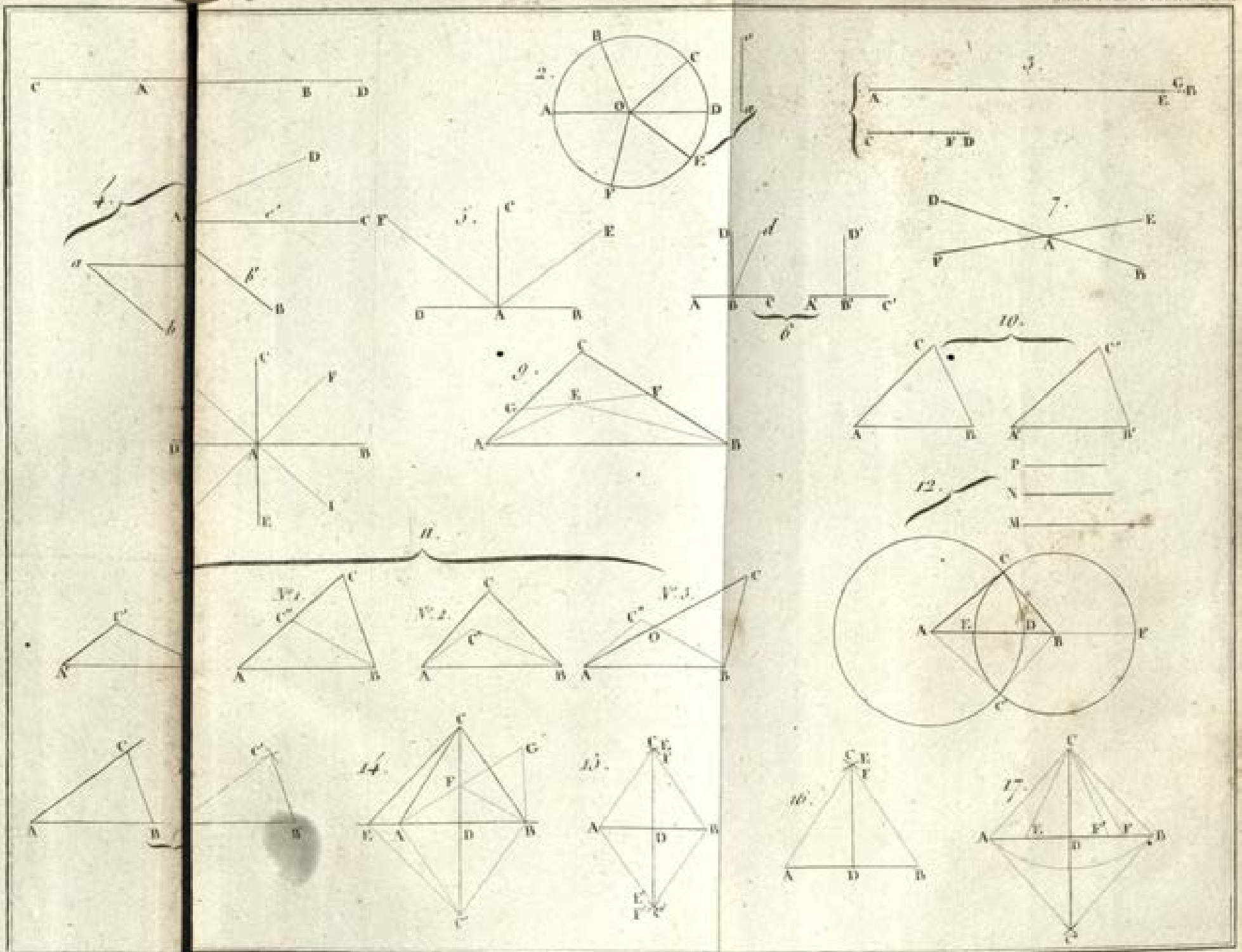
$$\frac{AC}{AB} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}},$$

expression qui ne saurait jamais s'arrêter, mais qui, par le procédé indiqué en *Arithmétique*, donne les approximations successives

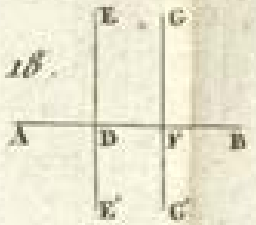
$$\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \text{ etc.,}$$

et qu'on trouve aussi dans le *Complément des Élémens d'Algèbre*.

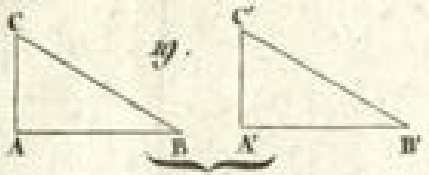
FIN.


2.
3.
4.
5.
6.
7.
9.
10.
11.
12.
14.
15.
16.
17.

18.

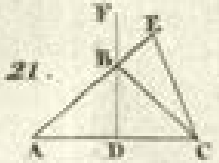


19.

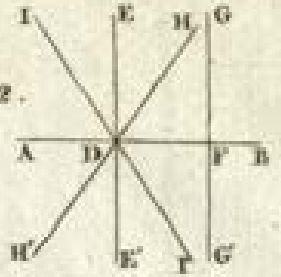


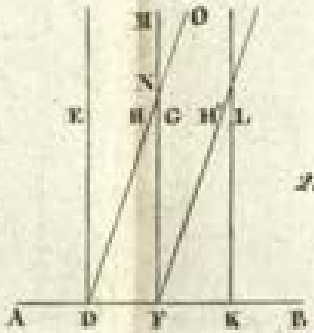
20.

21.

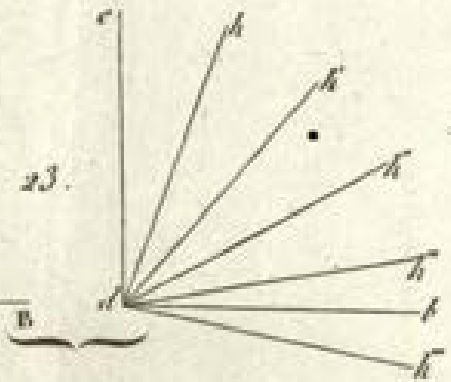


22.



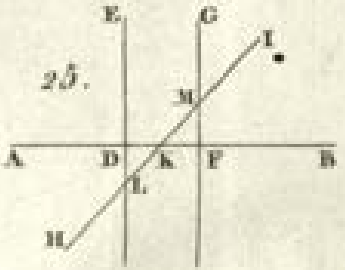


23.



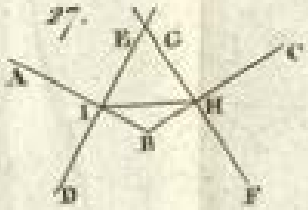
24.

25.



26.

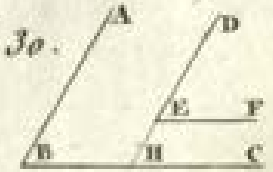
27.



28.

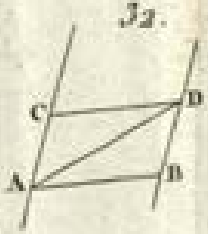
29.

30.

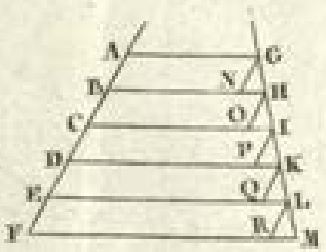


31.

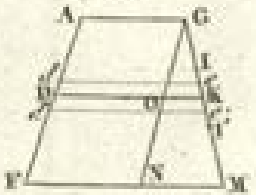
32.



33.



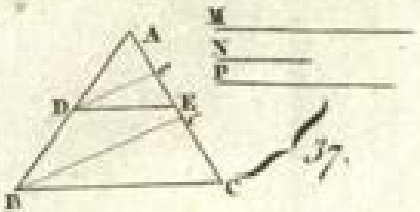
34.



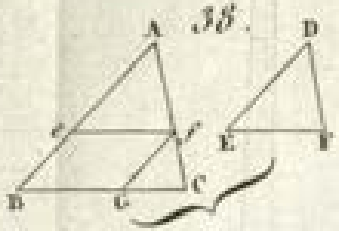
35.

36.

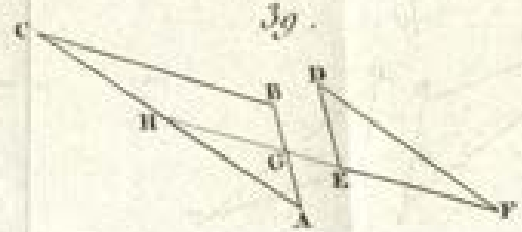
37.



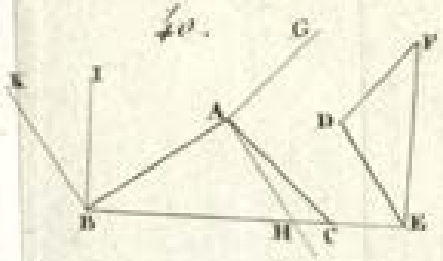
38.



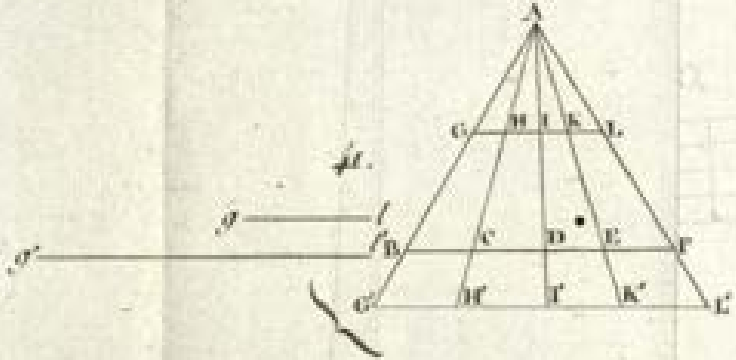
39.



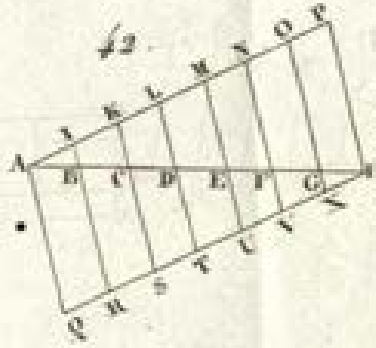
40.



41.

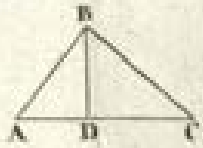


42.

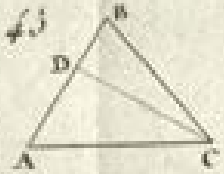


43

44.

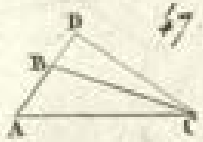


45

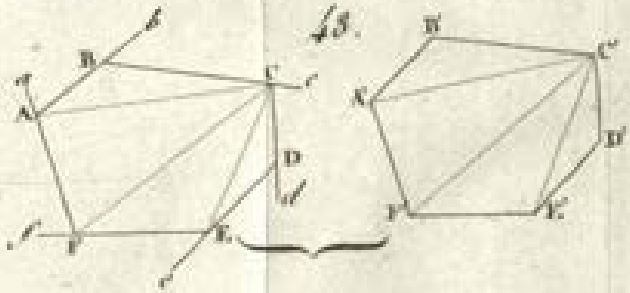


46

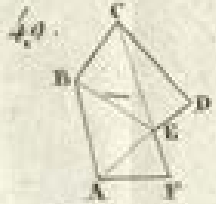
47



48.

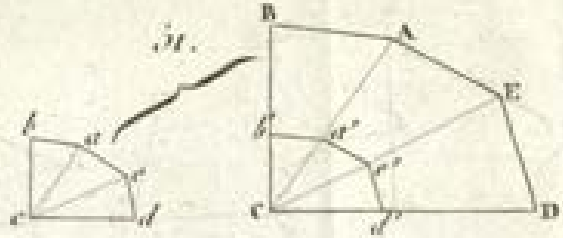


49.

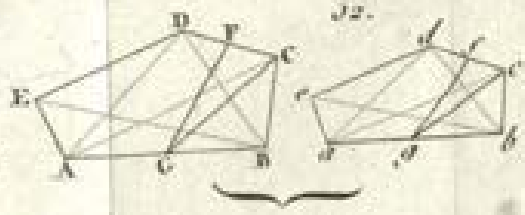


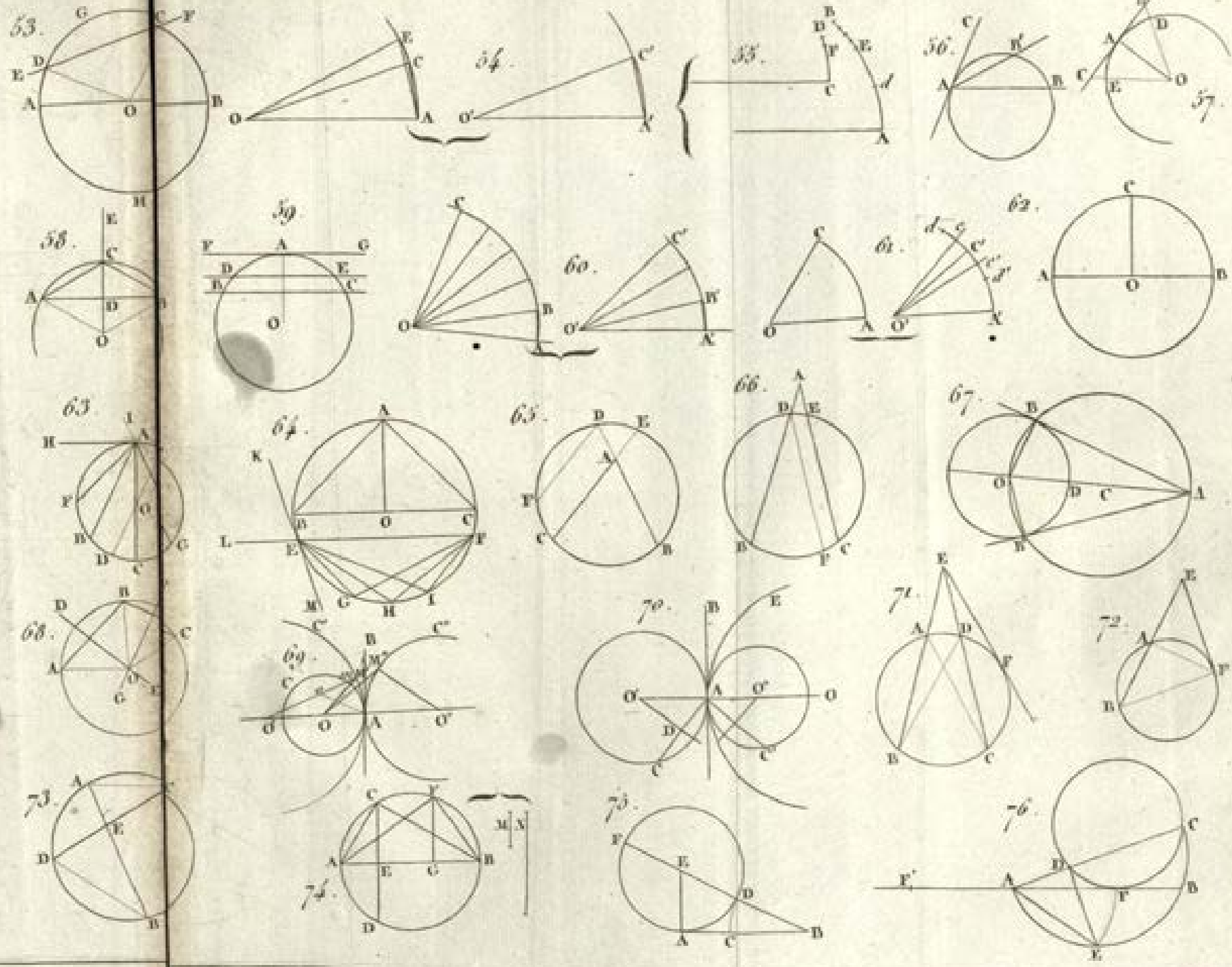
50.

51.

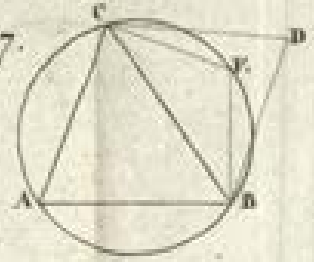


52.

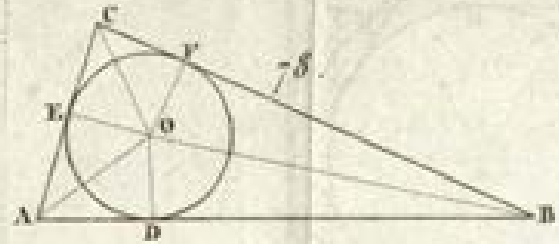



53.
54.
55.
56.
57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.

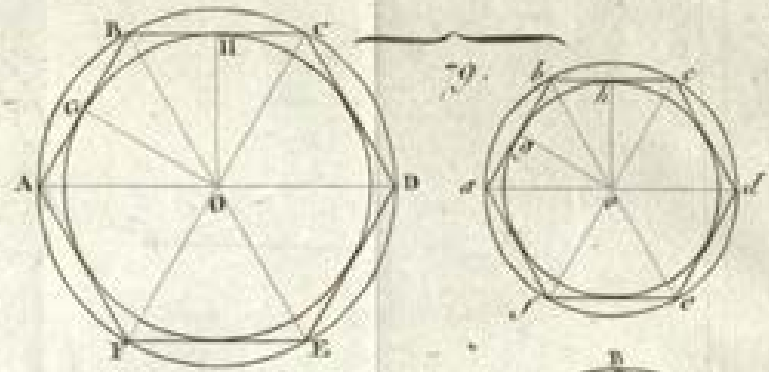
77.



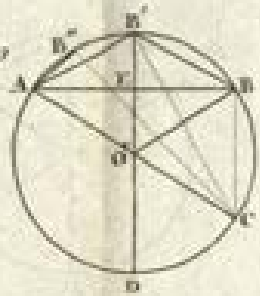
78.



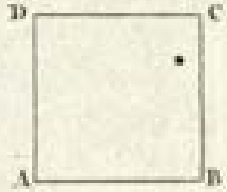
79.



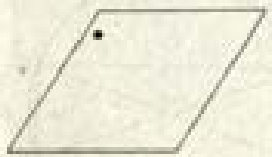
80.



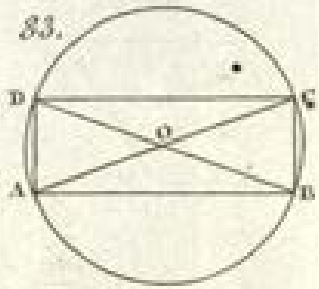
81.



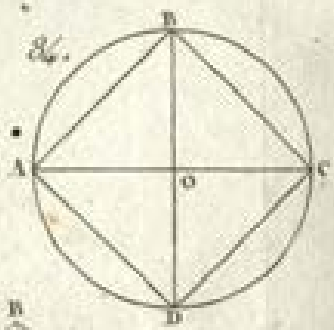
82.



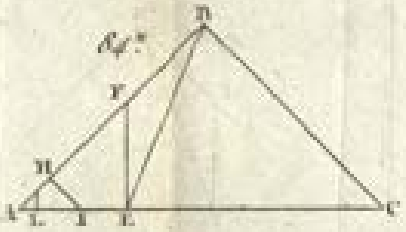
83.



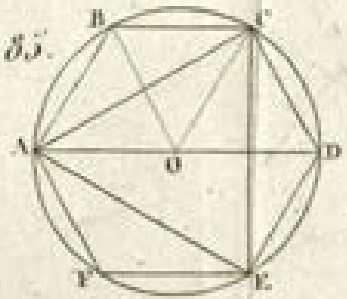
84.



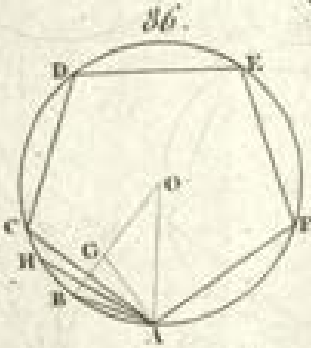
84*.



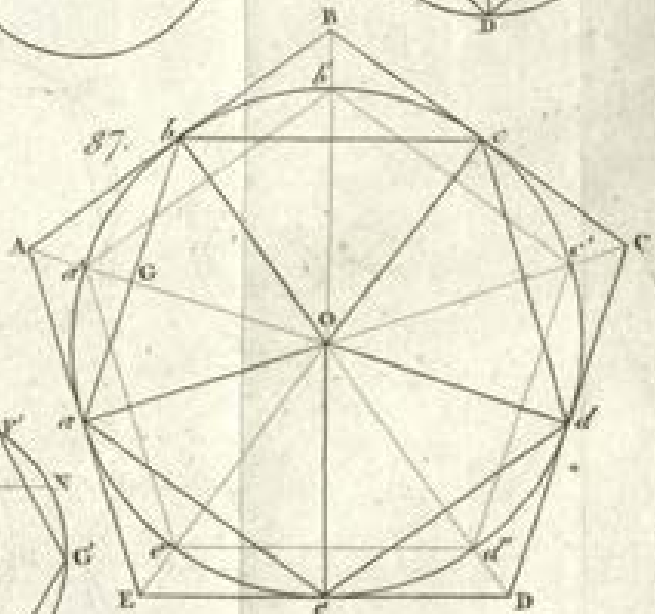
85.



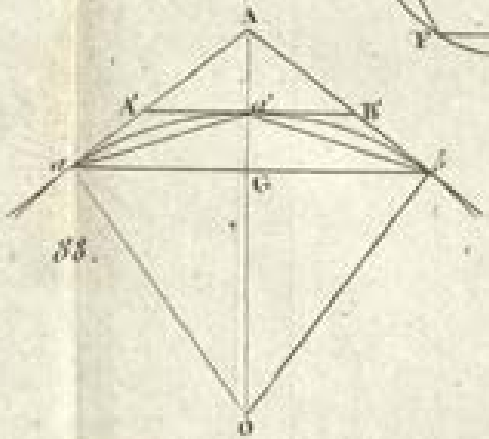
86.



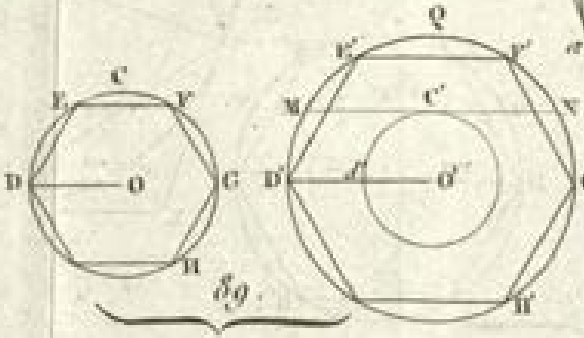
87.

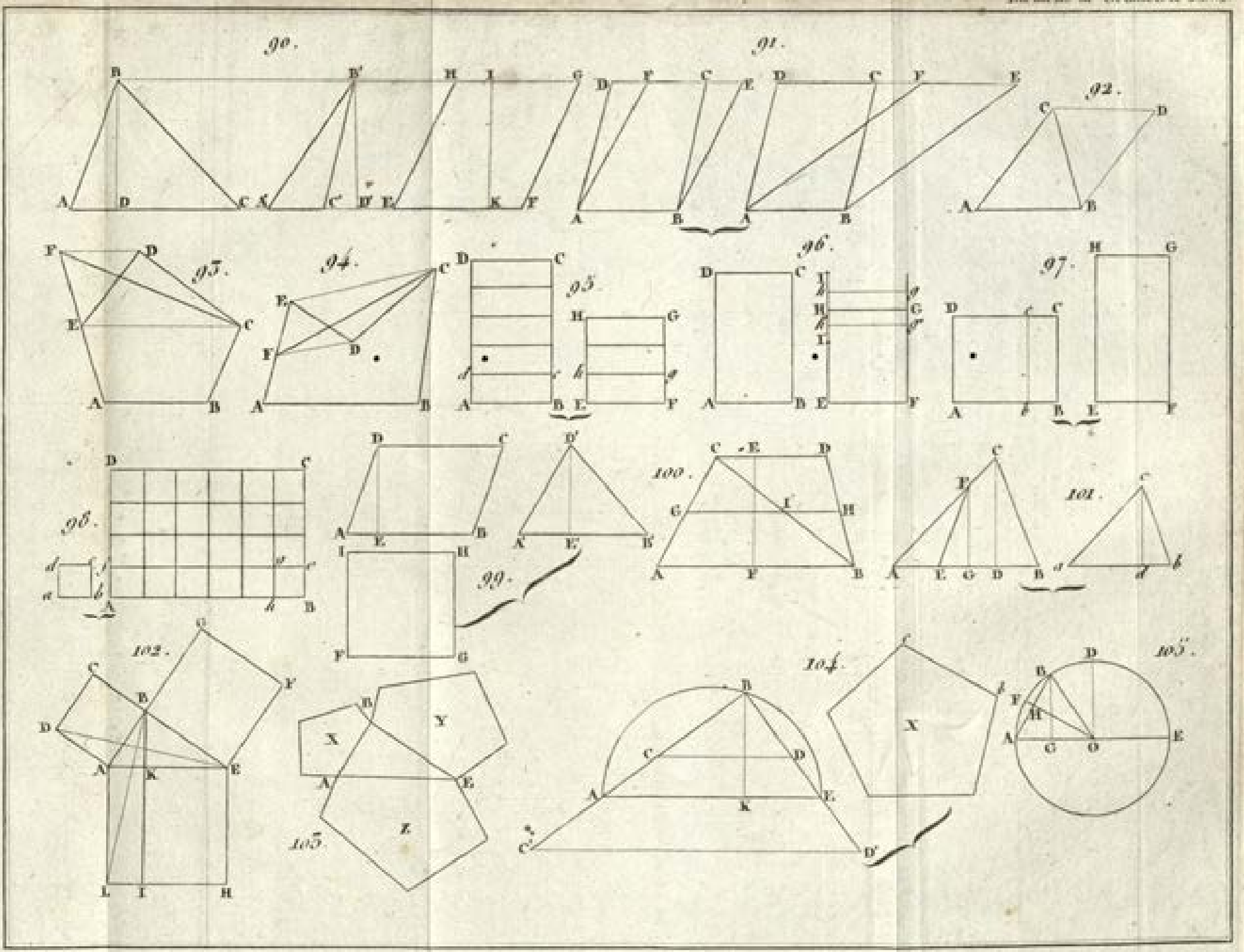


88.

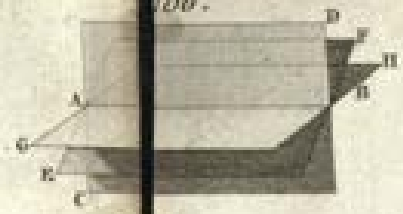


89.

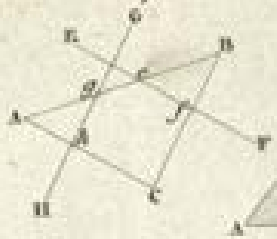



90.
91.
92.
93.
94.
95.
96.
97.
98.
99.
100.
101.
102.
103.
104.
105.

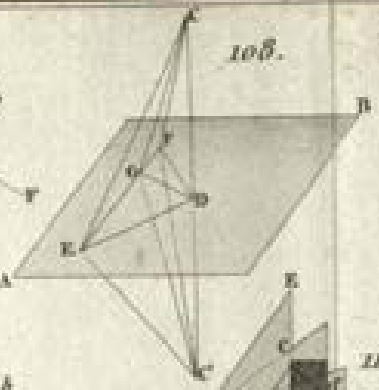
106.



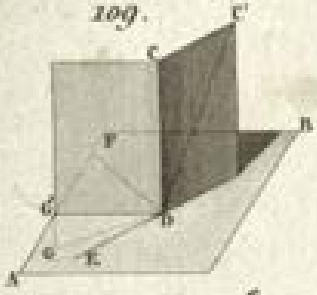
107.



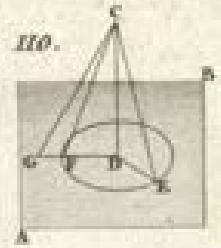
108.



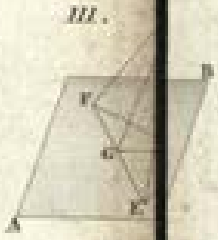
109.



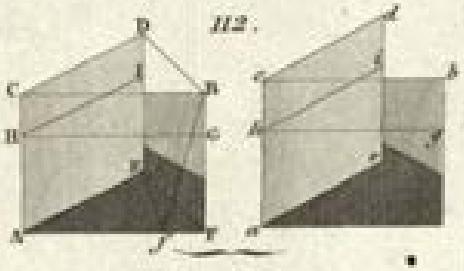
110.



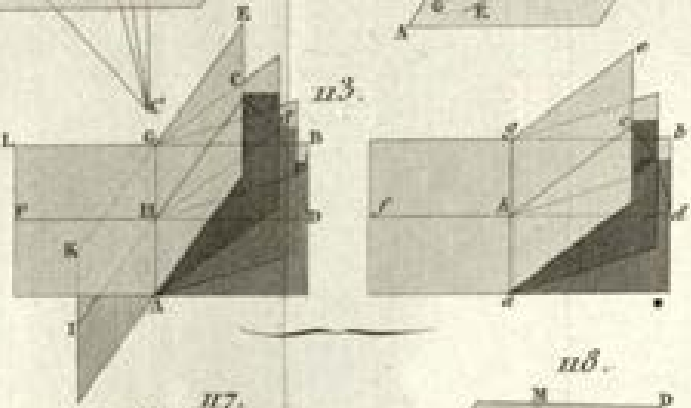
111.



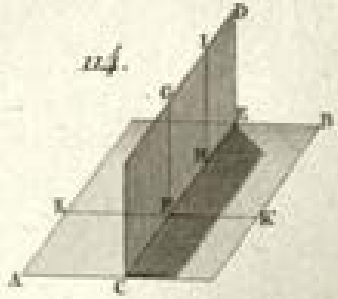
112.



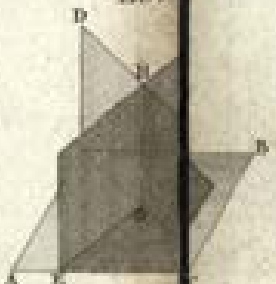
113.



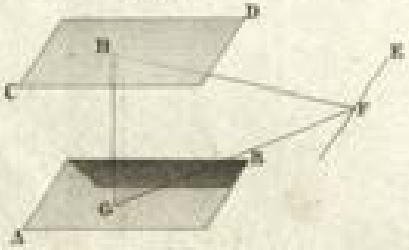
114.



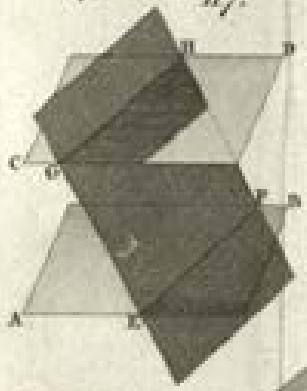
115.



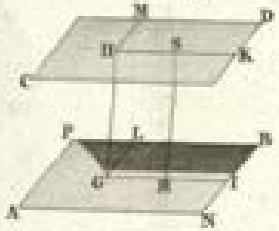
116.



117.

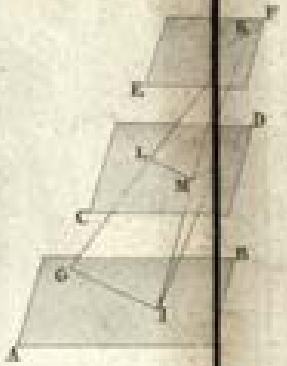


118.

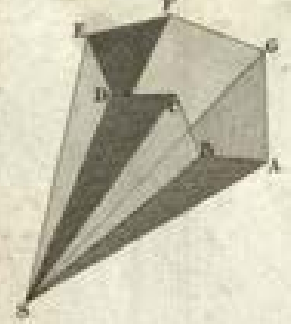


119.

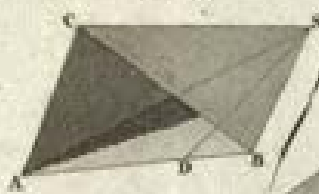
120.



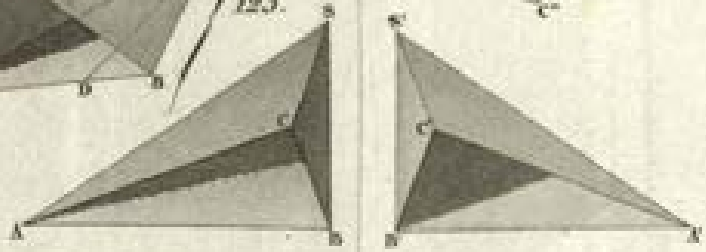
121.



122.

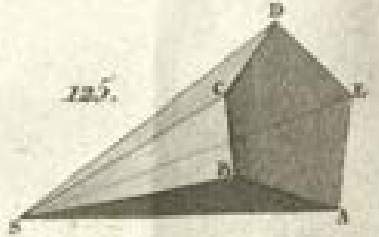


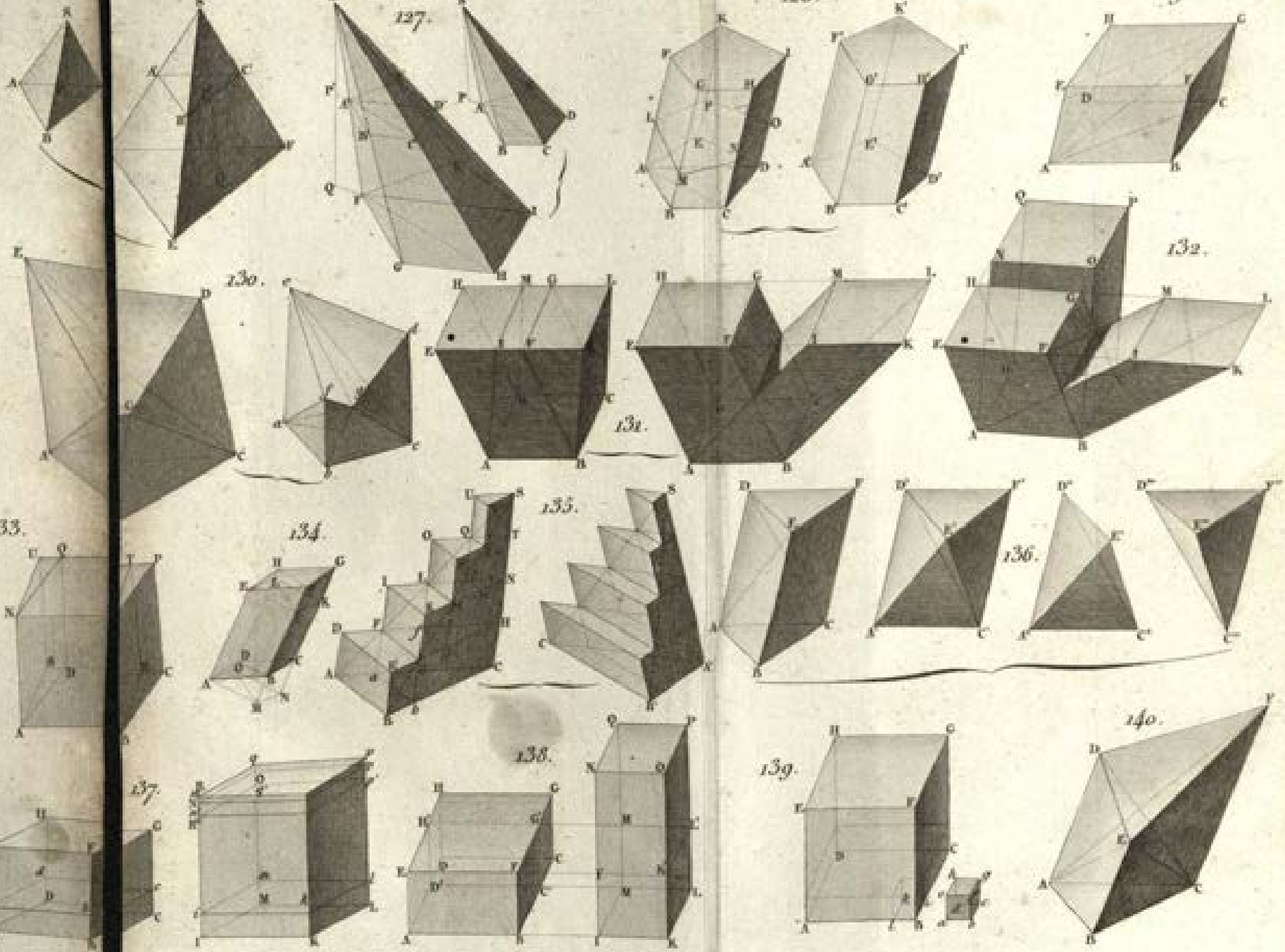
123.



124.

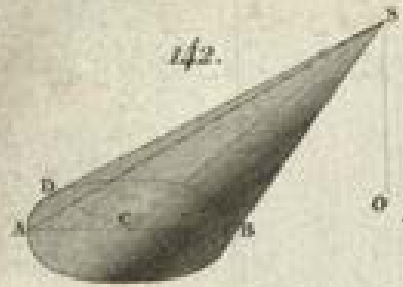
125.



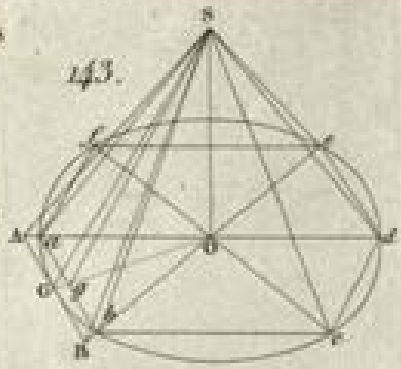

127.
128.
129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.
136.
137.
138.
139.
140.

141.

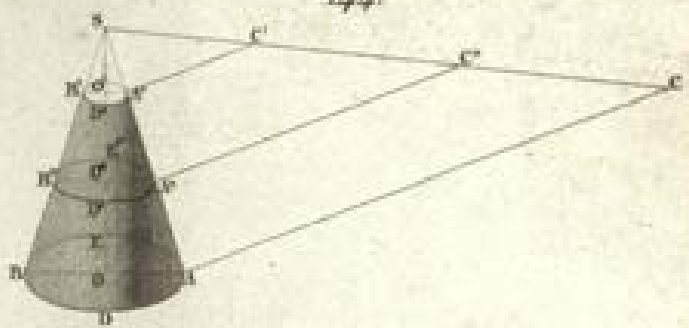
142.



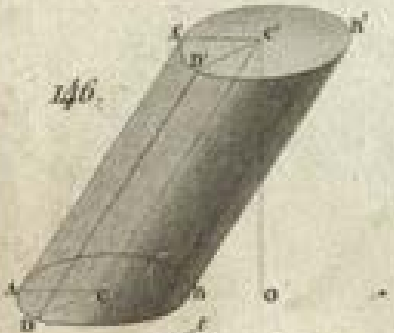
143.



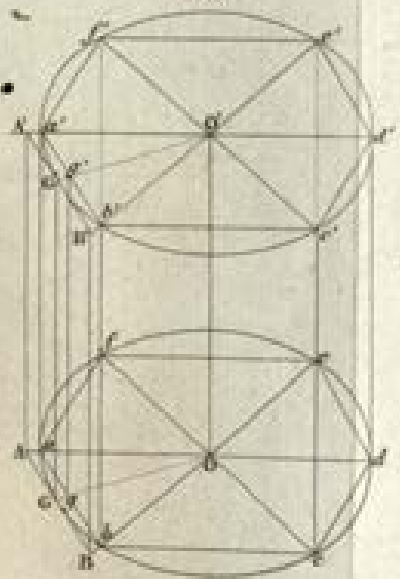
144.



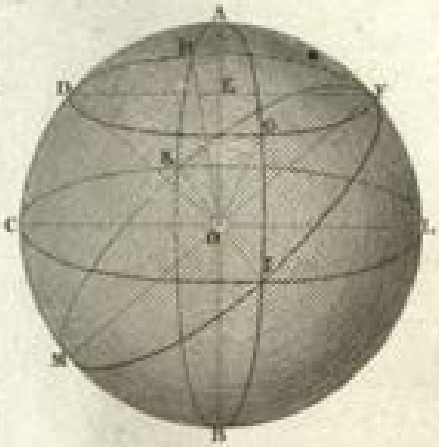
146.



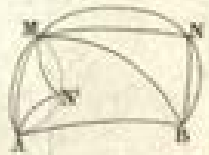
147.



148.

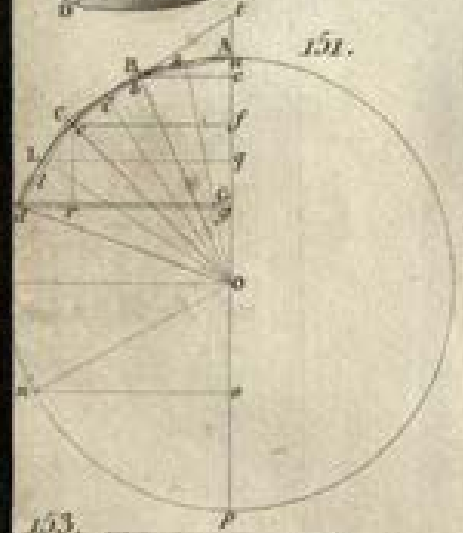


149.



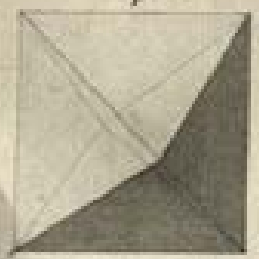
150.

151.



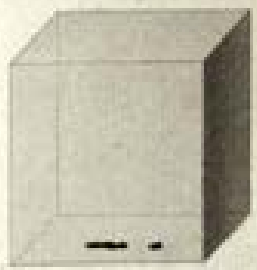
152.

153.

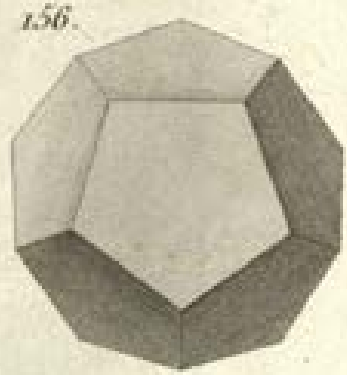


154.

155.



156.



ELEMENS

D'ALGEBRE,

A L'USAGE

DE L'ÉCOLE CENTRALE

DES QUATRE-NATIONS;

PAR S. F. LACROIX.

QUATORZIÈME ÉDITION,

revue et corrigée.

PARIS,

BACHELIER, SUCCESSEUR DE Mme Ve COURCIER,

LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55

1825.

AVIS DU LIBRAIRE.

Les motifs qui ont déterminé le plan de ces Élémens d'Algèbre, sont exposés dans les Essais sur l'Enseignement en général et sur celui des Mathématiques en particulier, *publiés par l'Auteur, et comprenant l'analyse de toutes les parties de son Cours, ainsi que l'indication de la marche qu'il a suivie dans ses leçons.*

On peut joindre aux Élémens d'Algèbre *leur* Complément, *qui se trouve aussi chez le même Libraire, et qui contient la résolution des équations littérales, la théorie élémentaire des suites, celle des fractions continues et les premiers principes de l'analyse indéterminée.*

Tous Exemplaires du présent Traité, qui ne porteront pas, comme ci-dessous, les signatures de l'Auteur et du Libraire, seront contrefaits. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la Loi, les fabricateurs et les débitans de ces Exemplaires.

Bachelier

TABLE.

Notions préliminaires sur le passage de l'Arithmétique à l'Algèbre, explication et usage des signes algébriques, page 2

Quels sont la nature et le but de l'Algèbre, *ibid.*
Des signes dont on se sert en Algèbre, 3
Résolution de quelques problèmes par le moyen des signes algébriques, 4
Ce que c'est qu'une formule, 11

Des équations, 15

Ce qu'il faut faire pour résoudre une question avec le secours de l'Algèbre, *ibid.*
Ce que c'est qu'une *équation*, un de ses *membres*, un *terme*, *ibid.*

De la résolution des équations du premier degré à une seule inconnue, 17

Règle pour faire passer un terme d'un membre dans un autre, 19
Pour dégager l'inconnue des quantités qui la multiplient, 21
Pour faire disparaître les dénominateurs, 23
Ce qu'il faut faire pour mettre un problème en équation, 24
Exemples, 25

Méthodes pour effectuer, autant qu'il est possible, les opérations indiquées sur les quantités représentées par des lettres, 31

Explication des mots *monomes*, *binomes*, etc., *polynomes*, *incomplexes* et *complexes*, 32

De l'Addition des quantités algébriques, 32

Ce que c'est qu'un coefficient, 33
Règle pour faire l'addition, 34
Règle pour faire la réduction des quantités algébriques, 35

De la soustraction des quantités algébriques, 36
Règle pour faire la soustraction, *ibid.*

De la multiplication des quantités algébriques, page 37
Manières d'indiquer la multiplication des quantités algébriques, *ibid.*
Ce que c'est qu'une puissance, 40
Ce que c'est qu'un exposant, *ibid.*
Comment on forme les puissances d'un nombre, 41
Règles pour faire la multiplication des quantités monomes, *ibid.*
Ce que c'est que le degré d'un produit, 42
Note sur le mot *dimension*, *ibid.*
De la multiplication des quantités complexes, *ibid.*
Règles des signes, 45
Règles pour faire la multiplication, 46
Exemples de la multiplication complexe, *ibid.*
Ce que c'est qu'une expression *homogène*, 50
Expression du produit de la somme de deux quantités par leur différence, du quarré et du cube d'un binome, 51
Manière d'indiquer la multiplication des quantités complexes, 52
De la Division des quantités algébriques, 52
Règles pour diviser les quantités monomes, 53
Ce que signifie une quantité dont l'exposant est zéro, 54
Comment on simplifie une division indiquée, lorsqu'elle ne peut s'effectuer, 55
Division des quantités complexes, 58
Ce que c'est qu'*ordonner* les termes d'une quantité, *ibid.*
Règles pour faire la division, 60
Exemples de division, 61
Ce qu'il faut faire lorsqu'il se trouve plusieurs termes contenant la même puissance de la lettre suivant laquelle on ordonne, 64
Exemple, *ibid.*
Des fractions algébriques, 66
Comment on reconnaît qu'une division de quantités complexes ne peut s'effectuer, 67
Comment, lorsque cela est possible, on simplifie la fraction qui en résulte, *ibid.*
Ce que c'est que le plus grand commun diviseur de deux quantités algébriques, *ibid.*
Comment il se détermine, 68
Précaution nécessaire pour réussir dans l'opération, lorsque la quantité qu'on prend pour diviseur contient plusieurs termes où la lettre par rapport à laquelle on a ordonné, se trouve au même degré, 72
Ce qu'il faut faire pour obtenir d'abord les diviseurs indépendans de cette lettre, 74
Récapitulation des règles du calcul des fractions, 76

Relation des termes des fractions égales, page 77
Résolution d'une équation littérale du premier degré, 79

Des questions à deux inconnues et des quantités négatives, 80

Exemples, *ibid.*
Ce qu'il faut faire lorsqu'on parvient à une équation dont les deux membres sont affectés du signe —, 83
Question dans laquelle la valeur de l'une des inconnues est affectée du signe —, 84
Ce que signifie ce signe, 85
Comment les valeurs affectées du signe — doivent *satisfaire* aux équations du problème, 88
Résumé des remarques précédentes, 90
Ce que c'est que les *solutions négatives*, 91
Démonstration des règles du calcul des quantités négatives isolées, 92
Comment se combinent, par rapport à leurs signes, les monomes isolés, 93
Comment on peut trouver le véritable énoncé d'une question pour laquelle on a rencontré des valeurs négatives, 94
Problème dont les différens cas offrent des exemples des diverses singularités que peuvent présenter les expressions des inconnues, dans les équations du premier degré, *ibid.*
Ce que signifie, le résultat $\frac{m}{0}$, 101
——— le résultat $\frac{0}{0}$, 103
Note sur l'emploi du mot *identique*, 104
Conclusion générale de ce qui précède, 105
Usage du changement de signe des quantités, pour comprendre plusieurs questions en une seule, *ibid.*
Résolution des problèmes précédens, en n'y employant qu'une seule inconnue, 106
Problème qui mène aux équations générales du premier degré à deux inconnues, 110

De la résolution d'un nombre quelconque d'équations du premier degré renfermant un pareil nombre d'inconnues, 114

Règle générale pour en déduire une équation à une seule inconnue en chassant ou *éliminant* successivement toutes les autres, *ibid.*
Exemples, *ibid.*
Problèmes à résoudre, 121

Formules générales pour la résolution des équations du premier degré, page 123
Procédé général pour éliminer entre deux équations, une inconnue au premier degré, 124
Valeurs générales des inconnues dans les équations du premier degré à trois inconnues, 129
Règle générale pour former les valeurs des inconnues, 131
Application des formules générales, 132
Des équations du second degré à une seule inconnue, 134
Exemples des équations du second degré qui ne contiennent qu'un terme inconnu, *ibid.*
De l'extraction des racines quarrées des nombres entiers, 135
Des nombres qui ne sont pas des quarrés parfaits, 142
Caractère auquel on reconnaît que la racine trouvée n'est pas trop faible, 143
Comment on fait le quarré d'une fraction, et comment on en extrait la racine, *ibid.*
Tout nombre premier qui divise le produit de deux nombres, divise nécessairement l'un de ces nombres, 144
Note sur la décomposition des nombres en facteurs, et sur le caractère des fractions irréductibles, 145
Les nombres entiers qui ne sont point des quarrés, n'ont point de racine en nombre entier, ni en nombre fractionnaire, 146
Ce que c'est qu'un nombre *commensurable* ou *rationnel*, 147
Comment on indique par un *radical* les racines à extraire, *ibid.*
Méthode pour approcher des racines, *ibid.*
Méthode pour abréger, par la division, l'extraction des racines, 149
Méthode pour la continuer indéfiniment par les fractions ordinaires, 150
Manière d'obtenir, le plus simplement possible, la racine approchée d'une fraction dont les termes ne sont pas des quarrés, 151
Résolution des équations du second degré qui ne contiennent que le quarré de l'inconnue, 152
La racine quarrée d'une quantité peut être prise avec le signe + ou le signe —, 154
La racine quarrée d'une quantité négative est *imaginaire*, 156
Des équations complètes du second degré, 157
Formule générale pour la résolution des équations du second degré à une seule inconnue, 160
Règle générale qu'il faut suivre pour les résoudre, *ibid.*
Exemples sur lesquels on montre les propriétés des solutions négatives, *ibid.*
Question qui fait voir dans quels cas les problèmes du second degré deviennent absurdes, 164

Des expressions qu'on appelle *imaginaires* ; page 167
Preuve directe que les équations du second degré ont toujours deux racines, 168
Résolution de quelques problèmes, 170
Question qui mène à des valeurs singulières, lorsqu'on la résout par la formule générale, 174

De l'extraction de la racine quarrée des quantités algébriques, 180

Transformation au moyen de laquelle on peut simplifier les quantités radicales, *ibid.*
Extraction de la racine quarrée des quantités monomes, 181
——— des polynomes, 183

De la formation des puissances des monomes, et de l'extraction de leurs racines, 187

Table des 7 premières puissances des nombres, depuis 1 jusqu'à 9, 188
Comment on élève une quantité monome à une puissance quelconque, 189
Comment on extrait la racine d'un degré quelconque, d'une quantité monome, *ibid.*
Comment on simplifie une expression radicale monome, 190
Des racines imaginaires en général, 191
Des exposans fractionnaires, 192
Des exposans négatifs, 193

De la formation des puissances des quantités complexes, 195

Manière d'indiquer ces puissances, *ibid.*
Forme du produit d'un nombre quelconque de facteurs du premier degré, 197
Observations au moyen desquelles on déduit de ce produit le développement de la puissance quelconque d'un binome, 200
Théorie générale des permutations et des combinaisons, 201
Formation du développement d'une puissance quelconque du binome, 205
Terme général de la formule du binome, 206
Application de la formule du binome à des exemples, *ibid.*
Transformation de cette formule pour en faciliter l'usage, 208
Application à un trinome, 209

De l'extraction des racines des quantités complexes, *ibid.*

De l'extraction de la racine cubique des nombres entiers, *ibid.*

De l'extraction de la racine cubique des fractions, page 214
Procédés pour approcher des racines cubiques des nombres qui ne sont pas des cubes parfaits, 216
De l'extraction des racines de degrés plus élevés, 217
De l'extraction des racines des quantités littérales, 220

Des équations à deux termes, 222

Division de $x^m - a^m$ par $x - a$, 224
Des facteurs de l'équation $x^m - a^m = 0$, et des racines de l'unité, 225
Loi générale sur le nombre des racines d'une équation, et distinction des *déterminations arithmétiques* et des *déterminations algébriques* des racines des nombres, 228

Des équations qui peuvent se résoudre à la manière de celles du second degré, 228

Détermination de leurs diverses racines, 229

Du calcul des radicaux, 231

Procédés pour effectuer sur les radicaux de même degré, les quatre opérations fondamentales, 232
——— pour élever à une puissance quelconque un radical, 235
——— pour en extraire la racine d'un degré quelconque, 236
——— pour ramener au même degré des radicaux de degrés différens, 237
——— pour passer sous un radical un facteur qui en est dehors, 238
——— pour la multiplication et la division des radicaux quelconques, *ibid.*

Remarques sur quelques cas singuliers du calcul des radicaux, 239

Détermination du produit $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, *ibid.*

Des diverses expressions du produit $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b}$, 241
Note sur les racines imaginaires de -1, 242

Du calcul des exposans fractionnaires, 243

Comment on en conclut les règles données par le calcul des radicaux, *ibid.*
A quoi tient l'avantage qu'il a sur ce dernier, 246

Théorie générale des équations, 246

Sous quelle forme on met les équations, 247

Ce que c'est que la racine d'une équation, page 248
Proposition fondamentale de cette théorie, *ibid.*
De la décomposition des équations en facteurs simples ou du premier degré, 250
Du nombre de diviseurs du premier degré que peut avoir une équation, 252
De la composition d'une équation par des facteurs simples ou du premier degré, *ibid.*
Note sur la divisibilité des polynomes entiers, *ibid.*
Formation des coefficiens d'une équation, 253
Note sur la composition des équations, 254
Combien une équation peut avoir de facteurs d'un degré donné, 255

De l'élimination entre les équations des degrés supérieurs au premier, 257

Par la substitution de la valeur de l'une des inconnues, *ibid.*
Règle pour faire disparaître un radical, 258
Formules générales des équations à deux inconnues, et comment on les met sous la forme d'équations à une seule, 259
Formules d'élimination entre deux équations du second degré, *ibid.*
Condition que doivent remplir les valeurs d'une même inconnue, commune à deux équations, 260
Comment la recherche du commun diviseur de deux équations conduit à l'élimination de l'une des inconnues, 261
Ce qu'il faut faire lorsqu'on a obtenu la valeur de l'une des inconnues dans l'équation finale, pour remonter à celle de l'autre inconnue, 262
Procédé pour éliminer une inconnue entre deux équations quelconques, *ibid.*
Cas singuliers dans lesquels les équations proposées laissent la question indéterminée, ou bien sont contradictoires, 263
Procédé qu'Euler substitue à la recherche du commun diviseur, 265
Inconvéniens de l'élimination successive des inconnues, lorsqu'on a plus de deux équations, et indication du degré auquel doit monter l'équation finale, 270

De la recherche des racines commensurables, et des racines égales des équations numériques, 271

Toute équation dont les coefficiens sont des nombres entiers, celui du premier terme étant 1, ne peut avoir pour racines que des nombres entiers, ou des nombres incommensurables, *ibid.*
Manière de faire évanouir les fractions dans une équation, 272
Recherche des diviseurs commensurables du premier degré, 274

Manière d'obtenir l'équation dont les racines sont les différences entre une des racines de la proposée et toutes les autres, page 280
Recherche des racines égales, 281
Formation de l'équation aux différences entre les racines prises deux à deux, et de l'équation aux quarrés de ces différences, 285
Moyen pour faire disparaître un terme quelconque d'une équation, 287
De la décomposition des équations en facteurs d'un degré supérieur au premier, 288

De la résolution par approximation des équations numériques, 289

Comment on peut reconnaître qu'une équation a une racine réelle comprise entre deux nombres donnés, *ibid.*
Note sur les changemens de valeur des polynomes, 291
Détermination d'un nombre qui rende le premier terme plus grand que la somme de tous les autres, 294
Toute équation de degré impair a au moins une racine réelle de signe contraire à son dernier terme, 297
Toute équation de degré pair a au moins deux racines réelles et de signes contraires, lorsque son dernier terme est négatif, *ibid.*
Détermination des limites des racines, dans un exemple, 298
Application à cet exemple, de la méthode de Newton pour approcher des racines d'une équation, *ibid.*
Caractères auxquels on reconnaît le degré d'approximation qu'on a atteint, 300
Inconvénient de cette méthode lorsque les racines diffèrent peu, 302
Note sur les racines égales et sur les racines imaginaires, 303
Comment on constate l'existence des racines réelles et inégales, soit par l'équation aux quarrés des différences des racines, *ibid.*
——— soit en multipliant les racines par des nombres plus ou moins grands, 307
Usage de la division des racines pour faciliter la résolution d'une équation dont les coefficiens sont de grands nombres, 308
Méthode d'approximation due à Lagrange, *ibid.*

Des proportions et des progressions, 312

Principales propriétés de l'équidifférence et de la proportion, 313
Changemens qu'on peut faire subir aux proportions, 314
De la progression par différence, 320
Terme général, *ibid.*
Somme, 322
De la progression par quotient, *ibid.*
Terme général, 323

Somme, page 324
Des progressions par quotient, dont la somme a une limite déterminée, *ibid.*
Manière de déduire tous les termes d'une progression par quotient de l'expression de sa somme, 326
Division de m par $m-1$, continuée à l'infini, *ibid.*
Dans quels cas le quotient de cette opération est *convergent*, et peut être pris pour la valeur approchée de la fraction $\frac{m}{m-1}$, 327
Ce que c'est que des séries *divergentes*, 331
—————— la *sommation* des séries, *ibid.*

Théorie des quantités exponentielles et des logarithmes, 331

De la liaison qu'ont entre elles les différentes manières de calculer, 332
Conséquences remarquables qui résultent de la génération des nombres par le moyen des puissances d'un seul, 333
Ce que c'est qu'un *logarithme*, une *base* de logarithmes, 335
Manière de calculer des tables de logarithmes, 336
Note contenant la méthode proposée par *Long*, et la table des puissances décimales de 10, 337
Ce que c'est que la *caractéristique* des logarithmes, 339
Des logarithmes des fractions, 341
Des *complémens arithmétiques*, 342
Manière de passer d'un système de logarithmes à un autre, 345
Ce que c'est que le logarithme de zéro, 346
Application des logarithmes à l'évaluation numérique des formules algébriques, *ibid.*
Application des logarithmes à la règle de trois, 347
Les logarithmes des nombres en progression par quotient, sont en progression par différences, 348
Application des logarithmes à la résolution des équations où l'inconnue entre comme exposant, *ibid.*

Questions relatives à l'intérêt de l'argent, 349

De l'intérêt simple, 350
De l'intérêt composé, *ibid.*
Des *annuités*, 355
Comment on peut comparer entre elles des sommes payables à différentes époques, 357

ADDITION, 359
Note sur le problème des couriers, *ibid.*

Alphabet pour faciliter la lecture des calculs où l'on fait usage des lettres grecques.

A, α	Alpha.
B, β, $\mathfrak{b}$	Bèta
Γ, γ, Γ, $\mathfrak{r}$	Gamma.
Δ, δ	Delta.
E, ε	Epsilon.
Z, ζ	Zeta.
H, η	Èta.
Θ, θ, ϑ	Thèta.
I, ι	Iota.
K, $\varkappa$	Cappa.
Λ, λ	Lambda.
M, μ	Mu.
N, ν	Nu.
Ξ, ξ	Xi.
O, o	Omicron.
Π, π, ϖ	Pi.
P, ρ, ϱ	Rho.
Σ, σ, ς	Sigma.
T, τ, $\mathfrak{t}$	Tau.
T, υ	Upsilon.
Φ, φ	Phi.
X, χ	Chi.
Ψ, ψ	Psi.
Ω, ω	Oméga

ERRATA.

Page 130, ligne 19, e *lisez* d
ibid., 20, d *lisez* e

ÉLÉMENS D'ALGÈBRE.

*Notions préliminaires sur le passage de l'*ARITHMÉTIQUE *à l'*ALGÈBRE, *explication et usage des signes algébriques.*

1. On a dû remarquer dans le *Traité élémentaire d'Arithmétique*, plusieurs questions dont la solution se compose de deux parties : l'une ayant pour but de chercher auxquelles des quatre *opérations fondamentales* se rapporte la détermination du nombre inconnu par le moyen des nombres donnés, et l'autre l'application de ces règles. La première partie, indépendante de toute manière d'écrire les nombres ou de tout système de numération, repose entièrement sur le développement des conséquences qui résultent explicitement ou implicitement de l'énoncé, ou de la manière dont cet énoncé lie les nombres donnés aux nombres inconnus, c'est-à-dire des relations qu'il établit entre ces nombres. En général on peut, si ces relations ne sont pas compliquées, trouver par le simple raisonnement, la valeur des nombres inconnus. Il faut pour cela décomposer les conditions que ren-

ferment les relations énoncées, en traduisant ces relations dans une suite de phrases équivalentes, dont la dernière doit être conçue en ces termes : *L'inconnue égale la somme, ou la différence, ou le produit, ou le quotient de telles et telles grandeurs.* L'exemple suivant éclaircira ce que ces notions générales pourraient renfermer d'obscur.

Partager un nombre donné en deux parties telles, que la première surpasse la seconde d'un excès donné.

Pour y parvenir, on observera, 1°. que

La plus grande partie est égale à la plus petite, plus l'excès donné,

et que par conséquent, si la plus petite partie était connue, en lui ajoutant cet excès, on aurait la plus grande : 2°. que

La plus grande partie ajoutée avec la plus petite partie, forme le nombre à partager.

Substituant dans cette dernière phrase, à ces mots : *la plus grande partie,* l'expression équivalente rapportée plus haut, savoir : *la plus petite partie, plus l'excès donné,* on trouve que

La plus petite partie, plus l'excès donné, plus encore la plus petite partie, forment le nombre à partager.

Mais alors la phrase peut être abrégée, en l'énonçant ainsi :

Deux fois la plus petite partie, ajoutées avec l'excès donné, forment le nombre à partager ;

et on en conclut nécessairement que

Deux fois la plus petite partie sont égales au nombre à partager, diminué de l'excès donné :

donc

Une fois la plus petite partie est égale à la moitié de la différence entre le nombre à partager et l'excès donné,

Ou, ce qui est la même chose,

La plus petite partie est égale à la moitié du nombre à partager, moins la moitié de l'excès donné.

Voilà donc la question proposée résolue, puisque pour obtenir les parties cherchées, il suffit de faire des opérations purement arithmétiques sur des nombres connus.

Si, par exemple, le nombre à partager était 9, et l'excès de la plus grande partie sur la plus petite, 5, la plus petite partie serait, d'après la règle ci-dessus, égale à $\frac{9}{2}$ moins $\frac{5}{2}$, ou à $\frac{4}{2}$, ou enfin à 2; et la plus grande, composée de la plus petite plus l'excès 5, serait égale à 7.

2. Les raisonnemens, fort simples dans le problème proposé ci-dessus, mais très compliqués dans d'autres, se composant, en général, d'un certain nombre d'expressions, telles que *ajouté à*, *diminué de*, *est égal à*, etc., répétées fréquemment, et qui tiennent aux opérations par lesquelles les grandeurs qui entrent dans l'énoncé de la question, sont liées entre elles, il est visible qu'on abrégerait beaucoup en représentant chacune de ces expressions par un signe; et c'est aussi ce qu'on fait, comme il suit.

Pour indiquer l'addition, on se sert du signe $+$, qui signifie *plus*.

Pour la soustraction, on se sert du signe $-$, qui signifie *moins*.

Pour la multiplication, on se sert du signe $\times$, qui signifie *multiplié par*.

Pour écrire que deux quantités doivent être divisées l'une par l'autre, on place la seconde sous la première, et on les sépare par un trait : $\frac{5}{4}$ signifie 5 *divisé par* 4.

Enfin pour marquer que deux quantités sont égales, on met entre leurs expressions le signe $=$, qui signifie *égale*.

Ces abréviations, quoique déjà très considérables, ne suffisent pas encore, car on est obligé de répéter souvent

le nombre à partager, *le nombre donné*, etc., *la plus petite partie*, *le nombre cherché*, etc., ce qui allonge beaucoup. A l'égard des données, l'expédient qui s'est offert le premier, a été de prendre, pour les représenter, des nombres déterminés qui servent d'exemple, comme on en use en Arithmétique; mais la chose n'étant pas possible à l'égard des nombres inconnus, on y a substitué un signe de convention, qui a varié avec le temps. On s'est enfin accordé à employer les lettres de l'alphabet ; presque toujours on se sert des dernières, comme en Arithmétique on met un x pour le quatrième terme d'une proportion dont on ne connaît que les trois premiers; et c'est de l'usage de ces divers signes qu'est résultée l'*Algèbre*.

Je vais, par leur moyen, reprendre la question du n° 1, et je représenterai l'inconnue ou le plus petit nombre par une lettre, x, par exemple; le nombre à partager et l'excès donné, par les deux nombres 9 et 5; la plus grande des parties cherchées sera exprimée par $x+5$, et leur somme par $x+5+x$: on aura donc

$$x+5+x=9;$$

mais en écrivant $2x$ pour le double de la quantité x, il en résultera

$$2x+5=9.$$

Cette expression montrant qu'il faut ajouter 5 au nombre $2x$ pour former 9, j'en conclurai que $2x=9-5$, ou que $2x=4$, et qu'enfin $x=\frac{4}{2}=2$.

En rapprochant maintenant ce que signifient les phrases abrégées que je viens d'écrire au moyen des signes convenus, de celles qui m'ont conduit à la solution par le raisonnement seul, on verra que les unes ne sont que la traduction des autres.

Le nombre 2, résultat des opérations précédentes,

ne convient qu'à l'exemple particulier que j'ai choisi, tandis que le raisonnement seul, en apprenant que *la plus petite partie est égale à la moitié du nombre à partager, moins la moitié de l'excès donné*, fait voir comment le nombre inconnu se compose avec les nombres donnés, et fournit une règle, à l'aide de laquelle on peut résoudre tous les cas particuliers compris dans la question.

Cet avantage du raisonnement employé seul, tient à ce qu'en ne désignant aucun nombre en particulier, les nombres donnés passent sans altération d'une phrase à l'autre, tandis qu'en considérant des nombres déterminés, on effectue à mesure toutes les opérations qui se présentent sur ces nombres; et quand on est parvenu au résultat, rien ne retrace comment le nombre 2, auquel on peut arriver par une infinité d'opérations différentes, a été formé par les nombres donnés 9 et 5.

3. On évitera ces inconvéniens en représentant, par des caractères indépendans de toute valeur particulière, et sur lesquels on ne puisse par conséquent effectuer aucun calcul, le *nombre à partager* et l'*excès donné*. Les lettres de l'alphabet sont très propres à cet usage; et la question proposée peut, par leur moyen, s'énoncer ainsi :

Partager un nombre connu, représenté par a, *en deux parties telles, que la plus grande ait sur la plus petite un excès donné, représenté par* b.

Désignant toujours la plus petite par x,

La plus grande sera exprimée par $x + b$;

Leur somme, ou le nombre à partager, sera équivalent à $x + b + x$, ou à $2x + b$:

La condition de la question donnera donc

$$2x + b = a.$$

Maintenant il est visible que s'il faut ajouter au double de x, ou à $2x$, la quantité b, pour faire la quantité a, il

en résulte qu'il faut diminuer a de b pour obtenir $2x$, et que par conséquent $2x = a - b$.

On conclura de là que la moitié de $2x$ ou $x = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$.

Ce dernier résultat étant traduit en langage ordinaire, par la substitution des mots et des phrases que désignent les lettres et les signes qu'il renferme, donne la règle trouvée ci-dessus, d'après laquelle, *pour obtenir la plus petite des parties cherchées, on doit, de la moitié du nombre à partager, ou de* $\frac{a}{2}$, *retrancher la moitié de l'excès donné, ou* $\frac{b}{2}$.

Connaissant la plus petite partie, on aura la plus grande en ajoutant à la plus petite l'excès donné. Cette remarque est suffisante pour achever de résoudre la question proposée; mais l'Algèbre donne plus, elle fournit une règle pour calculer la plus grande partie sans le secours de la plus petite, et voici comment: $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ étant la valeur de celle-ci, en l'augmentant de l'excès b, on aura pour la plus grande partie, $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b$; or, $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b$ exprime qu'après avoir retranché de $\frac{a}{2}$ la moitié de b, il faut ajouter au reste b tout entier, ou deux moitiés de b, ce qui se réduit à augmenter $\frac{a}{2}$ d'une moitié de b ou de $\frac{b}{2}$. Il est évident par là que $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b$ revient à $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$; et en traduisant cette expression, on apprend que *la plus grande des deux parties cherchées*

est égale à la moitié du nombre à partager plus la moitié de l'excès donné.

Dans la question particulière dont je me suis occupé en premier lieu, le nombre à partager était 9, l'excès d'une partie sur l'autre, 5 ; pour la résoudre par les règles auxquelles je viens de parvenir, il faudra effectuer sur les nombres 9 et 5 les opérations indiquées sur a et sur b.

La moitié de 9 étant $\frac{9}{2}$, et celle de 5 étant $\frac{5}{2}$, on aura pour la plus petite partie,

$$\frac{9}{2}-\frac{5}{2}=\frac{4}{2}=2,$$

pour la plus grande,

$$\frac{9}{2}+\frac{5}{2}=\frac{14}{2}=7.$$

4. J'ai désigné ci-dessus par x la plus petite des deux parties, et j'en ai déduit la plus grande : si l'on voulait chercher immédiatement cette dernière, on observerait qu'en la représentant par x, l'autre serait $x-b$, puisqu'on passe de la plus grande à la plus petite, en retranchant l'excès de la première sur la seconde ; le nombre à partager serait alors exprimé par $x-b+x$, ou par $2x-b$, et on aurait par conséquent

$$2x-b=a.$$

Ce résultat fait voir que $2x$ surpasse la quantité a de la quantité b, et que par conséquent $2x=a+b$. En prenant la moitié de $2x$ et de la quantité qui lui est égale, pour avoir la valeur de x, on tire de là

$$x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2},$$

ce qui donne, pour calculer la plus grande des deux parties cherchées, la même règle que ci-dessus. Je

ne m'arrêterai pas à en déduire l'expression de la plus petite.

La même relation entre des nombres donnés et des nombres inconnus, peut être énoncée de plusieurs manières très différentes ; celle qui a conduit à la question précédente, est aussi celle qui résulte de l'énoncé que voici :

Connaissant la somme a *de deux nombres, et leur différence* b, *trouver chacun de ces nombres ;* puisqu'en d'autres termes le nombre à partager est la somme des deux parties cherchées, et que leur différence est l'excès de la plus grande sur la plus petite. Ce changement dans les termes de l'énoncé étant appliqué aux règles trouvées ci-dessus, elles donnent :

Le plus petit des deux nombres cherchés est égal à la moitié de la somme moins la moitié de la différence.

Le plus grand est égal à la moitié de la somme plus la moitié de la différence.

5. Voici une question analogue à la précédente, mais un peu plus compliquée :

Partager un nombre donné en trois parties telles, que l'excès de la moyenne sur la plus petite soit un nombre donné, et l'excès de la plus grande sur la moyenne soit un autre nombre donné.

Pour fixer les idées, je donnerai d'abord aux nombres connus des valeurs déterminées :

Je supposerai que le nombre à partager soit 230,

Que l'excès de la partie moyenne sur la plus petite soit 40,

Que l'excès de la plus grande partie sur la moyenne soit 60.

Désignant la plus petite partie par x,

La moyenne sera la plus petite plus 40, ou $x + 40$,

Et la plus grande sera la moyenne plus 60, ou $x+40+60$;

Or, les trois parties prises ensemble doivent faire le nombre à partager : donc

$$x+x+40+x+40+60=230.$$

En réunissant d'une part les nombres donnés, et de l'autre les nombres inconnus, x se trouvera 3 fois dans le résultat ; et pour abréger, on écrira

$$3x+140=230.$$

Mais puisqu'il faut ajouter 140 au triple de x pour faire 230, il s'ensuit qu'en ôtant 140 de 230, on aura précisément le triple de x, ou que

$$3x=230-140,$$

ou que

$$3x=90;$$

et il suit de là que $x=\frac{90}{3}$ ou $=30$.

En ajoutant à 30 l'excès 40 de la moyenne sur la plus petite, on aura 70 pour la partie moyenne.

En ajoutant à 70 l'excès 60 de la plus grande partie sur la moyenne, on aura 130 pour la plus grande partie.

6. Si les nombres connus étaient différens de ceux que j'ai mis dans l'énoncé, on résoudrait encore la question en suivant la marche tracée dans le numéro précédent ; mais on serait obligé de répéter tous les raisonnemens et toutes les opérations par lesquelles on est parvenu au nombre 30, parce que rien ne montre comment ce nombre se compose des nombres donnés, 230, 40 et 60. Pour rendre la solution indépendante des valeurs particulières des nombres, et faire voir comment la valeur de l'inconnue se forme au moyen des quantités connues, je vais énoncer le problème ainsi :

Partager le nombre donné a en trois parties telles, que

l'excès de la moyenne sur la plus petite soit un nombre donné b, *et l'excès de la plus grande sur la moyenne soit un nombre donné* c.

En désignant comme ci-dessus par x la quantité inconnue, et en écrivant, à l'aide des signes convenus et des symboles, a, b, c, qui représentent les quantités connues de la question, les raisonnemens faits précédemment sur les nombres, on formera de nouveau

la plus petite partie x,
la moyenne $x+b$,
la plus grande $x+b+c$;

et la réunion de ces trois parties faisant le nombre à partager, il faudra que

$$x+x+b+x+b+c=a.$$

Cette expression, toute simple qu'elle est, peut encore s'abréger; car puisqu'elle montre que x entre trois fois dans le nombre à partager, et que b y entre deux fois, au lieu de $x+x+x$, j'écrirai $3x$, au lieu de $+b+b$, j'écrirai $+2b$, et il viendra

$$3x+2b+c=a.$$

Cette dernière expression fait connaître qu'il faut ajouter au triple du nombre représenté par x, le double du nombre représenté par b et encore le nombre c, pour former le nombre a; il s'ensuit que si du nombre a, on ôte le double du nombre b, puis encore le nombre c, on aura précisément le triple de x, ou que

$$3x=a-2b-c;$$

or x étant le tiers de trois fois x, ou de $3x$, on en conclura que

$$x=\frac{a-2b-c}{3}.$$

Il faut bien remarquer que n'ayant assigné aucune valeur particulière aux nombres représentés par a, b, c,

le résultat auquel je suis parvenu ne donne non plus aucune valeur pour x; il indique seulement quelles opérations il faut faire sur ces nombres, lorsqu'on leur assigne une valeur, pour en déduire celle de l'inconnue.

En effet, l'expression $\frac{a-2b-c}{3}$, à laquelle x est égal, peut être rendue dans le langage ordinaire, en écrivant, à la place des lettres, la dénomination des nombres qu'elles représentent, et à la place des signes, l'énonciation des opérations qu'ils indiquent; on formera ainsi cette phrase :

Du nombre à partager, ôtez le double de l'excès de la partie moyenne sur la plus petite, et encore l'excès de la plus grande sur la moyenne, et prenez le tiers du reste.

En suivant cette phrase à la lettre, on déterminera, par les premières opérations de l'Arithmétique, la plus petite partie. Le nombre à partager étant, par exemple, 230, les excès 40 et 60, comme dans le numéro précédent, on ôtera de 230, deux fois 40, ou 80, et 60, il restera 90, dont le tiers sera 30, ainsi qu'on l'a déjà trouvé.

Si le nombre à partager était 520, les excès 50 et 120, on ôterait de 520 deux fois 50, ou 100, et 120, il resterait 300, dont le tiers, ou 100, serait la plus petite partie; on formerait les deux autres en ajoutant 50 à 100, ce qui ferait 150; puis 120 à ce résultat, ce qui ferait 270 : ainsi, les trois parties demandées seraient

100, 150, 270,

et leur somme serait 520, ainsi que l'exige la question.

C'est parce que les résultats algébriques ne sont le plus souvent que l'indication d'opérations à effectuer sur des nombres pour en trouver d'autres, qu'on les appelle en général *formules*.

Cette question, quoique plus compliquée que celle du numéro 1, peut encore être résolue avec le langage ordinaire; c'est ce qu'on voit dans le tableau ci-joint, où l'on a placé vis-à-vis de chaque raisonnement, sa traduction en caractères algébriques. L'examen attentif de ce tableau ne doit laisser aucun doute sur l'utilité de l'Algèbre et sur les circonstances de son invention.

PROBLÈME.

Partager un nombre en trois parties telles, que l'excès de la moyenne sur la plus petite soit un nombre donné, et que l'excès de la plus grande sur la moyenne soit un autre nombre donné.

SOLUTION.

Avec le langage ordinaire.	*Avec l'écriture algébrique.*
	Soit le nombre à partager désigné par a,
	l'excès de la partie moyenne sur la plus petite, par..... b,
	l'excès de la plus grande sur la moyenne, par..... c,
	La plus petite étant..... x.
La moyenne partie sera la plus petite, plus l'excès de la moyenne sur la plus petite.	La moyenne sera $x+b$.
La plus grande partie sera la moyenne, plus l'excès de la plus grande sur la moyenne.	La plus grande $x+b+c$.
Les trois parties réunies forment le nombre proposé :	
Donc la plus petite partie, plus la plus petite partie, plus l'excès de la moyenne sur la plus petite, plus encore la plus petite partie, plus l'excès de la moyenne sur la plus petite, plus l'excès de la plus grande sur la moyenne, égalent le nombre à partager :	Donc $x+x+b+x+b+c=a$.
Donc trois fois la plus petite partie, plus deux fois l'excès de la moyenne sur la plus petite, plus encore l'excès de la plus grande sur la moyenne, égalent le nombre à partager :	$3x+2b+c=a$.
Donc trois fois la plus petite partie égalent le nombre à partager moins deux fois l'excès de la moyenne sur la plus petite, et moins encore l'excès de la plus grande sur la moyenne :	$3x=a-2b-c$.
Donc enfin la plus petite partie égale le tiers de ce qui reste après qu'on a ôté du nombre à partager deux fois l'excès de la moyenne sur la plus petite, et encore l'excès de la plus grande sur la moyenne.	$x=\frac{a-2b-c}{3}$.

7. Les signes convenus dans le numéro 2 ne sont pas les seuls dont on se serve en Algèbre ; de nouvelles considérations en introduiront par la suite de nouveaux. On a déjà dû remarquer que j'ai indiqué dans le numéro 2, la multiplication de x par 2, et dans les numéros 5 et 6, celle de x par 3, celle de b par 2, en plaçant seulement ces chiffres au-devant des lettres x et b, sans aucune interposition de signe, et j'en userai ainsi désormais ; en sorte que tout nombre placé à la gauche d'une lettre sera multiplicateur du nombre que représente cette lettre : $5x$, $5a$, etc. désigneront 5 fois x, 5 fois a, etc. ; $\frac{3}{4}x$ ou $\frac{3x}{4}$, etc. désigneront les $\frac{3}{4}$ de x ou 3 fois x divisées par 4, etc.

En général, la multiplication s'indiquera désormais en mettant les facteurs à la suite les uns des autres, sans aucune interposition de signe, toutes les fois qu'il n'en résultera pas de confusion.

Ainsi les expressions ax, bc, etc. seront équivalentes à $a \times x$, $b \times c$, etc., mais on ne pourra pas supprimer le signe $\times$ lorsqu'il s'agira des nombres, car alors l'expression 3×5, dont la valeur est 15, devenant 35 par l'omission du signe $\times$, changerait entièrement de signification. Dans ce cas, on substitue souvent un point au signe $\times$, et on écrit $3 . 5$.

Des Équations.

8. En examinant avec attention la solution des problèmes des numéros 3 et 6, on la trouvera composée de deux parties bien distinctes. Dans la première, on exprime, au moyen des caractères algébriques, les relations que l'énoncé de la question établit entre les quantités connues et les quantités inconnues, et cela conduit à égaler deux quantités entre elles, savoir :

Dans le numéro 3, les quantités $2x + b$ et a,

Dans le numéro 6, les quantités $3x + 2b + c$ et a.

Puis de cette égalité on déduit une suite de conséquences qui mènent enfin à égaler l'inconnue x à un assemblage de quantités données, liées entre elles par des opérations que l'on sait effectuer : voilà la seconde partie de la solution.

Les deux parties que je viens d'indiquer se retrouvent dans presque tous les problèmes qui sont du ressort de l'Algèbre. Il est difficile de donner, au moins pour le moment, une règle d'après laquelle on puisse effectuer la première partie, celle qui a pour objet la traduction en caractères algébriques des conditions de la question. Il faut, pour y réussir, se familiariser avec l'écriture algébrique, et acquérir l'habitude de décomposer l'énoncé d'un problème dans toutes ses circonstances, soit explicites, soit implicites. Mais lorsqu'on est parvenu à former les deux nombres que la question suppose *égaux* entre eux, il y a *des procédés* méthodiques pour déduire de cette expression algébrique la valeur de l'inconnue, ce qui fait l'objet de la seconde partie de la solution. Avant de les faire connaître, j'expliquerai quelques dénominations dont les Algébristes se servent à ce sujet.

Une *équation* est l'égalité de deux quantités.

L'ensemble des quantités qui sont d'un même côté du signe $=$, se nomme *membre*; une équation a deux *membres*.

Celui qui est à gauche s'appelle le *premier membre*; l'autre est le *second*.

Dans l'équation $2x+b=a$, $2x+b$ est le *premier membre*, a est le *second membre*.

Les quantités qui composent un même membre, lorsqu'elles sont séparées par les signes $+$ ou $-$, se nomment *termes*.

Ainsi le premier membre de l'équation $2x+b=a$ renferme deux termes, savoir : $2x$ et $+b$.

L'équation $\frac{3}{4}x+7=8x-12$, a deux termes dans chacun de ses membres, savoir :

$\frac{3}{4}x$ et $+7$ dans le premier,
$8x$ et -12 dans le second.

Quoique j'aie pris au hasard, et pour servir d'exemple, l'équation $\frac{3}{4}x+7=8x-12$, elle doit être considérée, ainsi que toutes celles dont je parlerai par la suite, comme venant d'un problème dont on peut toujours trouver un énoncé en traduisant en langage ordinaire l'équation proposée. Celle dont il s'agit revient à

Trouver un nombre x *tel, qu'en ajoutant* 7 *aux* $\frac{3}{4}$ *de* x, *la somme soit égale à* 8 *fois* x *moins* 12.

De même, l'équation $ax+bc-cx=ac-bx$, dans laquelle les lettres a, b, c sont censées représenter des quantités connues, répond à la question suivante :

Trouver un nombre x *tel, qu'en le multipliant par un nombre donné* a, *puis ajoutant le produit des deux nombres donnés* b *et* c, *et retranchant de cette somme le produit d'un nombre donné* c *par le nombre* x, *on ait un résultat égal au produit des nombres* a *et* c *diminué de celui des nombres* b *et* x.

C'est en s'exerçant beaucoup à passer du langage ordinaire à l'écriture algébrique, et à rendre celle-ci dans le premier, qu'on parviendra à se familiariser avec l'Algèbre, dont la difficulté ne consiste guère que dans la parfaite intelligence des signes et de leur emploi.

Tirer d'une équation la valeur de l'inconnue, ou parvenir à avoir cette inconnue seule dans un membre, et des quantités toutes connues dans l'autre, c'est ce qu'on appelle *résoudre* cette équation.

Les diverses questions qui peuvent se présenter conduisant à des équations plus ou moins composées, on a partagé celles-ci en plusieurs classes ou *degrés*. Je vais m'occuper d'abord des *équations du premier degré*. On nomme ainsi les équations dans lesquelles les inconnues ne sont multipliées ni par elles-mêmes, ni entre elles.

De la résolution des équations du premier degré à une seule inconnue.

9. On a déjà vu que résoudre une équation, c'est arriver à une expression dans laquelle l'inconnue seule dans un membre soit égalée à des quantités connues, combinées entre elles par des opérations qu'on sache effectuer. Il suit de là qu'il faut, pour amener une équation à cet état, *dégager* l'inconnue des quantités connues avec lesquelles elle se trouve combinée; or l'inconnue peut se trouver mêlée de trois manières, avec les quantités connues :

1°. Par addition et soustraction, comme dans les équations

$$x+5=9-x,$$

$$a+x=b-x;$$

2°. Par addition, soustraction et multiplication, comme dans les équations

$$7x - 5 = 12 + 4x,$$
$$ax - b = cx + d;$$

3°. Enfin par addition, soustraction, multiplication et division, comme dans les équations

$$\frac{5x}{3} + 8 = \frac{11}{12}x + 9,$$
$$\frac{ax}{b} + cx - d = \frac{mx}{n} + \frac{p}{q}.$$

On dégage l'inconnue des additions et soustractions où elle entre avec des quantités connues, en rassemblant dans un seul membre tous les termes où elle se trouve; et pour cela, il faut savoir faire passer un terme d'un membre dans un autre.

10. Par exemple, dans l'équation

$$7x - 5 = 12 + 4x,$$

il faut passer le terme $4x$ du second membre dans le premier, et le terme -5 du premier dans le second. Pour cela, on doit observer qu'en effaçant $+4x$ dans le second membre, on le diminue de la quantité $4x$, et qu'il faut opérer la même soustraction sur le premier membre, pour conserver l'égalité de ces deux membres; on écrira donc $-4x$ dans le premier membre, qui deviendra $7x - 5 - 4x$; et l'on aura

$$7x - 5 - 4x = 12.$$

Effacer -5 du premier membre, c'est supprimer la soustraction indiquée de 5 unités; c'est par conséquent augmenter ce membre de 5 unités; on doit donc, pour conserver l'égalité, augmenter aussi le second membre de 5 unités, ou écrire $+5$ dans ce membre: il deviendra $12 + 5$, et l'on aura

$$7x - 4x = 12 + 5.$$

En effectuant les opérations indiquées, il en résultera l'équation . . . $3x = 17$.

Par ces raisonnemens, qu'on peut appliquer à quelque exemple que ce soit, on voit qu'en effaçant dans un membre un terme affecté du signe $+$, et qui par conséquent augmentait ce membre, il faut soustraire ce terme de l'autre membre, ou l'y écrire avec le signe $-$; qu'au contraire, quand le terme qu'on efface a le signe $-$, comme par sa présence il diminuait le membre où il était, il faut augmenter l'autre membre du même terme, ou l'y écrire avec le signe $+$. On conclura de là cette règle générale :

Pour faire passer un terme quelconque d'une équation, d'un membre dans l'autre, il faut l'effacer dans le membre où il se trouve, et l'écrire dans l'autre avec un signe contraire à celui qu'il avait d'abord.

Pour mettre cette règle en pratique, il faut faire attention que le premier terme de chaque membre, quand il n'est précédé d'aucun signe, est censé avoir le signe $+$. C'est ainsi qu'en passant le terme cx de l'équation littérale $ax - b = cx + d$, du second membre dans le premier, on aura

$$ax - b - cx = d;$$

passant ensuite le terme $-b$ du premier membre dans le second, il viendra

$$ax - cx = d + b.$$

11. Par le moyen de la règle précédente, on peut d'abord réunir dans un des membres tous les termes affectés de l'inconnue, et dans l'autre toutes les quantités connues; et sous cette forme, le membre où se trouve l'inconnue, peut toujours se décomposer en deux facteurs, dont l'un ne contient que des quantités données, et dont l'autre est l'inconnue seule.

Cette simplification se présente d'elle-même toutes les

fois que l'équation proposée est numérique, et qu'elle ne contient point de fractions, parce qu'alors tous les termes affectés de l'inconnue se réduisent à un seul. Si l'on avait, par exemple, $10x+7x-2x=25+7$; en effectuant les opérations indiquées dans chaque membre, on trouverait successivement

$$17x-2x=32,$$

$$15x=32;$$

et $15x$ se décomposant dans les deux facteurs 15 et x, on aurait le facteur inconnu x, en divisant par le facteur donné 15, le nombre 32 égal au produit $15x$: il viendrait

$$x=\frac{32}{15}.$$

La décomposition se fait de même dans les équations littérales semblables à

$$ax=bc;$$

parce que le terme ax désigne immédiatement le produit de a par x: on en conclut

$$x=\frac{bc}{a}.$$

Soit maintenant l'équation

$$ax-bx+cx=ac-bc,$$

qui contient trois termes affectés de l'inconnue. Puisque ax, bx, cx, représentent les produits respectifs de x, par les quantités a, b, c, l'expression $ax-bx+cx$, traduite en langage ordinaire, donne cette phrase :

De x *pris d'abord autant de fois qu'il y a d'unités dans* a, *retranchez autant de fois* x *qu'il y a d'unités dans* b, *et ajoutez au résultat la même quantité* x *prise autant de fois qu'il y a d'unités dans* c.

Il suit de là qu'en tout l'inconnue x se trouve prise autant de fois qu'il y a d'unités dans la différence des

nombres a et b, augmentée du nombre c, c'est-à-dire autant de fois que le marque le nombre $a - b + c$: les deux facteurs du premier membre sont par conséquent $a - b + c$ et x : on a donc

$$x = \frac{a\,c - b\,c}{a - b + c}.$$

Ce raisonnement, qu'on peut appliquer à tout autre exemple, fait voir qu'*après la réunion dans un seul membre, des divers termes contenant l'inconnue, le facteur qui multiplie cette inconnue se forme de toutes les quantités qui la multiplient isolément, assemblées avec les signes dont elles sont précédées; et on obtient l'inconnue en divisant le membre tout connu par le facteur dont il s'agit.*

D'après cette règle, l'équation $a\,x - 3\,x = b\,c$ donne

$$x = \frac{b\,c}{a - 3}.$$

De même l'équation $x + a\,x = c - d$ conduit à

$$x = \frac{c - d}{1 + a},$$

parce qu'il faut observer que la lettre x étant seule, doit être regardée comme multipliée par l'unité. On voit d'ailleurs que dans $x + a\,x$, l'inconnue x se trouve contenue une fois de plus que dans $a\,x$, et est par conséquent multipliée par $1 + a$.

12. Il est visible que si tous les termes de l'équation contenaient un facteur commun, on pourrait supprimer ce facteur sans troubler l'égalité, puisqu'on ne ferait que diviser par un même nombre toutes les parties des deux quantités que l'on suppose égales entre elles.

Soit pour exemple l'équation

$$6\,a\,b\,x - 9\,b\,c\,d = 12\,b\,d\,x + 15\,a\,b\,c.$$

J'observe d'abord que les nombres 6, 9, 12 et 15, sont

divisibles par 3; et en supprimant ce facteur, je ne ferai que prendre le tiers de toutes les quantités qui forment l'équation : j'aurai, après cette réduction,

$$2abx - 3bcd = 4bdx + 5abc.$$

J'observe ensuite que la lettre b, combinée dans chaque terme par voie de multiplication, indique un facteur commun à tous ces termes; je la supprimerai donc aussi, et il viendra

$$2ax - 3cd = 4dx + 5ac.$$

En appliquant à cette dernière équation les règles des numéros 10 et 11, j'en tirerai successivement,

$$2ax - 4dx = 5ac + 3cd,$$

$$x = \frac{5ac + 3cd}{2a - 4d}.$$

13. Je passe maintenant aux équations dont les termes ont des diviseurs. On pourrait leur appliquer immédiatement les règles précédentes, toutes les fois que l'inconnue n'entre point dans les dénominateurs; mais il est souvent plus simple de ramener tous les termes au même dénominateur, qu'on peut supprimer ensuite.

Soit, par exemple, l'équation

$$\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}.$$

J'observerai que l'Arithmétique fournit des règles pour réduire des fractions au même dénominateur, et pour convertir des entiers en fractions d'une espèce donnée (*Arithm.* 69, 67), et je transformerai par ces règles, en fractions de même dénominateur, tous les termes de l'équation proposée.

En commençant d'abord par les fractions, qui sont

$$\frac{2x}{3}, \qquad \frac{4x}{5}, \qquad \frac{5x}{7},$$

je les changerai, par la première des règles citées, en

$$\frac{5\times7\times2x}{3\times5\times7},\qquad \frac{3\times7\times4x}{3\times5\times7},\qquad \frac{3\times5\times5x}{3\times5\times7};$$

puis pour convertir les entiers 4 et 12 en fractions, il n'y aura plus qu'à les multiplier par le dénominateur commun des fractions, savoir, par $3\times5\times7$, et l'on aura

$$3\times5\times7\times4,\qquad 3\times5\times7\times12.$$

Replaçant ensuite tous ces termes dans l'équation proposée, elle deviendra

$$\frac{5\times7\times2x}{3\times5\times7}+\frac{3\times5\times7\times4}{3\times5\times7}$$
$$=\frac{3\times7\times4x}{3\times5\times7}+\frac{3\times5\times7\times12}{3\times5\times7}-\frac{3\times5\times5x}{3\times5\times7};$$

et l'on y pourra supprimer le dénominateur, puisqu'on ne fera par là que multiplier toutes ses parties par ce dénominateur (*Arithm.* 54), ce qui ne saurait troubler l'égalité. Il viendra, après cette suppression,

$$5\times7\times2x+3\times5\times7\times4$$
$$=3\times7\times4x+3\times5\times7\times12-3\times5\times5x,$$

ou
$$70x+420=84x+1260-75x,$$

équation sans dénominateur, de laquelle on tirera la valeur de x par les règles précédentes.

L'inspection du résultat ci-dessus, et même l'application seule des règles d'Arithmétique citées, fait voir évidemment que, dans l'opération dont il s'agit, *les numérateurs de chaque fraction doivent être multipliés par le produit des dénominateurs de toutes les autres, les entiers, par le produit de tous les dénominateurs; et il ne faut tenir aucun compte du dénominateur commun des fractions résultantes.*

L'équation $70x+420=84x+1260-75x$ devient successivement

$$70x + 75x - 84x = 1260 - 420$$
$$61x = 840$$
$$x = \frac{840}{61} = 13\frac{47}{61}.$$

Le même procédé s'applique aux équations littérales, en observant qu'on ne peut alors qu'indiquer les multiplications, qui s'effectuent lorsqu'il s'agit des nombres.

Soit, par exemple, l'équation

$$\frac{ax}{b} - c = \frac{dx}{h} + \frac{fg}{h};$$

on en déduira

$$eh \times ax - beh \times c = bh \times dx + be \times fg,$$

résultat qu'on peut écrire plus simplement en plaçant, conformément à la convention établie dans le n° 7, à côté les uns des autres, sans interposition de signe, les facteurs de chaque produit, et en intervertissant l'ordre des multiplications pour conserver l'ordre alphabétique, plus facile dans l'énonciation des lettres : il viendra

$$aehx - bceh = bdhx + befg,$$

d'où l'on conclura

$$aehx - bdhx = befg + bceh,$$
$$x = \frac{befg + bceh}{aeh - bdh}.$$

14. Quoiqu'on ne puisse donner aucune règle générale et précise pour former l'équation d'une question quelconque, il existe cependant un précepte dont l'application bien entendue ne manquerait pas de conduire au but proposé. Voici ce précepte :

Indiquer, à l'aide des signes algébriques, sur les quantités connues, représentées soit par des nombres, soit par des lettres, et sur les quantités inconnues représentées toujours par des lettres, les mêmes raisonnemens et les

mêmes opérations qu'il faudrait effectuer pour vérifier les valeurs des inconnues, si elles étaient données.

Pour en faire usage, il faut d'abord déterminer avec soin quelles sont les opérations que l'énoncé de la question renferme, soit explicitement, soit implicitement; mais c'est précisément en cela que consiste la difficulté de *mettre en équation* un problème proposé.

Voici quelques exemples pour montrer l'application du précepte ci-dessus. J'ai choisi les deux premiers parmi les questions résolues en Arithmétique, afin de montrer la facilité que l'écriture algébrique apporte au développement des énoncés.

1°. Soient *deux fontaines, dont la première, coulant seule pendant* $2^h\frac{1}{2}$, *remplit un certain bassin, et dont la seconde remplit le même bassin en coulant seule pendant* $3^h\frac{3}{4}$; *combien faudra-t-il de temps pour qu'il soit rempli par les deux fontaines coulant à la fois?*

Si ce temps était donné, on le vérifierait en calculant les quantités d'eau versées par chaque fontaine, et réunissant les résultats, on s'assurerait qu'ils composent la totalité de l'eau que peut contenir le bassin.

Pour former l'équation, on désignera par x le temps inconnu, et on indiquera sur x les opérations énoncées ci-dessus; mais afin de rendre la solution indépendante des nombres donnés, et même d'abréger l'expression de ceux de l'énoncé qui sont fractionnaires, on les représentera aussi par des lettres; on pourra écrire a au lieu de $2^h\frac{1}{2}$, et b au lieu de $3^h\frac{3}{4}$.

Cela posé, en prenant, comme en Arithmétique, la capacité du bassin pour unité, on verra que

La première fontaine qui le remplit seule en un nombre a d'heures, y verse, dans une heure, une quantité d'eau marquée par la fraction $\frac{1}{a}$, et que par conséquent elle

fournira dans un nombre x d'heures la quantité $x \times \frac{1}{a}$, ou $\frac{x}{a}$ (*Arithm.* 53).

La seconde fontaine, qui remplit le même bassin en b d'heures, y verse, dans une heure, une quantité d'eau exprimée par la fraction $\frac{1}{b}$; et par conséquent dans un nombre x d'heures, elle fournira la quantité $x \times \frac{1}{b}$ ou $\frac{x}{b}$.

La quantité totale d'eau fournie par les deux fontaines sera donc

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b};$$

et cette quantité devant égaler celle que contient le bassin, et qui a été prise pour unité, on aura enfin l'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1.$$

Cette équation, traitée par les règles précédentes, conduit à

$$bx + ax = ab,$$

$$x = \frac{ab}{b+a}.$$

La dernière formule donne, pour résoudre tous les cas de la question proposée, cette règle fort simple :

Divisez le produit des nombres qui marquent le temps que met chaque fontaine en particulier à remplir le bassin, par la somme de ces nombres; le quotient marquera le temps qu'il faudra aux deux fontaines pour le remplir simultanément.

En appliquant cette règle aux nombres de l'énoncé, on a

$$2\tfrac{1}{2}\times 3\tfrac{3}{4}=\tfrac{5}{2}\times\tfrac{15}{4}=\tfrac{75}{8},$$

$$2\tfrac{1}{2}+3\tfrac{3}{4}=\tfrac{5}{2}+\tfrac{15}{4}=\tfrac{20}{8}+\tfrac{30}{8}=\tfrac{50}{8},$$

d'où

$$x=\tfrac{75}{50}=\tfrac{3}{2}.$$

2°. *Soit* a *un nombre à partager en trois parties, ayant entre elles les mêmes rapports que les nombres donnés* m, n *et* p.

Il est visible que la vérification de la question se ferait comme il suit :

En désignant par x la 1re partie, on aurait

$$m:n::x:\text{la 2e partie}=\frac{nx}{m}\ (\textit{Arithm.}\ 116.)$$

$$m:p::x:\text{la 3e partie}=\frac{px}{m};$$

et réunissant les trois parties, il faudrait trouver le nombre à partager : on aura donc l'équation

$$x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a.$$

En réduisant tous ses termes au dénominateur m, elle deviendra

$$mx+nx+px=am,$$

et on en tirera

$$x=\frac{am}{m+n+p}.$$

Ce résultat n'est que la traduction algébrique de la *règle de société* (*Arithm.* 124) ; car en regardant les nombres m, n, p, comme désignant les mises des marchands, $m+n+p$ est la mise totale, a le bénéfice à partager, et l'expression

$x=\dfrac{am}{m+n+p}$ indique qu'*une part s'obtient en multipliant la mise correspondante par le bénéfice total*, et

en divisant le produit par la somme des mises, ce qui revient à la proportion

la mise totale : *une mise particulière*
:: *le gain total* : *au gain particulier.*

15. La formation de l'équation du problème suivant exige des observations particulières qui ne se sont pas encore présentées.

Un pêcheur, afin d'encourager son fils, lui promet 5 centimes par chaque coup de filet dans lequel il aura pris du poisson, mais aussi il remettra à son père 3 centimes pour chaque coup infructueux. Après 12 coups de filet, le père et le fils règlent leur compte. Le premier doit au second 28 centimes. Combien y a-t-il eu de coups de filet heureux ?

Si l'on représente le nombre de ces coups par x, le nombre des coups infructueux sera $12 - x$; et si ces nombres étaient donnés, on les vérifierait en multipliant 5 centimes par le premier, pour obtenir ce que le père doit donner au fils, et 3 centimes par le second, pour avoir ce que le fils doit remettre au père : le premier nombre devrait surpasser le second des 28 centimes que le père doit à son fils.

On aura pour le premier nombre, x de fois 5 centimes ou $5x$. A l'égard du second nombre, il se présente une difficulté : comment obtenir le produit de 3 par $12 - x$? Si, au lieu de x, il y avait un nombre donné, on effectuerait d'abord la soustraction indiquée, puis on multiplierait 3 par le reste; mais pour le moment la chose n'est pas possible, et il faut tâcher d'effectuer la multiplication avant la soustraction, ou au moins de ramener le résultat à un ensemble de termes algébriques semblables à ceux que contiennent les équations qu'on sait résoudre.

Avec un peu d'attention, on voit qu'en prenant 12 fois

le nombre 3, on répète 3 autant de fois de trop qu'il y a d'unités dans le nombre x, dont on aurait dû préalablement diminuer le multiplicateur 12, en sorte que le véritable produit sera

36 diminué de 3 pris x fois ou de $3x$,

ou

$$36 - 3x.$$

Cette conclusion peut se vérifier facilement, en donnant à x des valeurs numériques. Si, par exemple, x était égal à 8, on aurait 3 à prendre 12 fois — 8 fois, et si on négligeait — 8 fois, on mettrait dans le résultat 8 fois de trop le nombre 3; le vrai produit serait donc

$$3 \times 12 - 3 \times 8 = 36 - 24 = 12.$$

Ce résultat s'accorde avec celui qu'on obtiendrait en retranchant d'abord 8 de 12; car

$$12 - 8 = 4 \qquad \text{et} \qquad 3 \times 4 = 12.$$

Cela posé, puisque l'argent dû par le père à son fils est exprimé par $5x$, et que celui que le fils doit à son père est exprimé par $36 - 3x$, il faut que le second nombre retranché du premier, donne pour reste 28; mais encore ici nouvelle difficulté : comment retrancher $36 - 3x$ de $5x$, sans avoir soustrait d'abord $3x$ de 36?

On élude cette difficulté en observant que si l'on négligeait le terme $-3x$, et qu'on retranchât de $5x$ le nombre 36 tout entier, on aurait nécessairement ôté $3x$ de trop, puisque ce n'est qu'après avoir diminué 36 de $3x$, qu'il faut le retrancher de $5x$. Ainsi, la différence $5x - 36$ doit être augmentée de $3x$ pour former la quantité qui doit rester après qu'on a ôté de $5x$ le nombre exprimé par $36 - 3x$: cette quantité sera donc

$$5x - 36 + 3x;$$

et on aura l'équation

$$5x - 36 + 3x = 28,$$

qui revient successivement à

$$8x - 36 = 28,$$
$$8x = 28 + 36,$$
$$8x = 64,$$
$$x = \frac{64}{8} = 8.$$

Il y a donc eu 8 coups de filet heureux et 4 d'infructueux.

En effet, 8 coups à 5 centimes, donnent 40 centimes,
4 coups à 3 donnent 12

différence..... 28

comme l'exige l'énoncé de la question.

Si on voulait rendre la solution générale, on représenterait par a la somme que le père donne à son fils pour chaque coup de filet heureux, par b celle que le fils rend à son père pour chaque coup de filet infructueux, par c le nombre total de coups de filet, et par d ce que le père doit à son fils après ce nombre de coups. En désignant toujours par x le nombre de coups heureux, $c - x$ serait celui des coups infructueux; chaque coup de la première espèce valant au fils une somme a, x coups vaudraient $a \times x$ ou ax, et les coups infructueux vaudraient au père la somme b, multipliée par le nombre $c - x$.

Le raisonnement par lequel on a trouvé les parties dont se compose le produit de 3 par $12 - x$, s'applique également au cas général. Si on néglige d'abord $-x$ pour former le produit bc, de b par c tout entier, la somme b sera répétée x fois de trop, et par conséquent le véritable produit sera $bc - bx$.

Pour retrancher ce produit de la somme ax, il faut observer aussi, comme dans l'exemple numérique, que si on retranchait la quantité bc toute entière, on ôterait de trop la quantité bx dont la première doit être diminuée d'abord; et que par conséquent le véritable reste n'est pas seulement $ax - bc$, mais $ax - bc + bx$.

Cette somme devant être égale à d, l'équation du problème sera

$$ax - bc + bx = d,$$

et donnera

$$ax + bx = d + bc,$$

$$x = \frac{d + bc}{a + b}.$$

Cette formule générale indiquant quelles opérations il faut faire sur les nombres donnés a, b, c, d, pour obtenir l'inconnue x, on peut ou la traduire en règle, ou bien y écrire à la place des lettres a, b, c, d, les nombres donnés; le dernier procédé est ce qu'on appelle *substituer* les valeurs des données, ou *mettre la formule en nombres*. En y appliquant ceux de l'exemple ci-dessus, il vient

$$x = \frac{28 + 3 \times 12}{5 + 3};$$

et en effectuant les opérations indiquées, on a, comme plus haut,

$$x = \frac{28 + 36}{8} = \frac{64}{8} = 8.$$

Méthodes pour effectuer, autant qu'il est possible, les opérations indiquées sur les quantités représentées par des lettres.

16. La question précédente a fait voir qu'il fallait, dans certains cas, décomposer en multiplications partielles une multiplication indiquée sur la somme ou la différence de plusieurs quantités; et dans le numéro 11, on a fait précisément le contraire, en décomposant la quantité $ax - bx + cx$, qui représente le résultat de plusieurs multiplications suivies d'additions et de soustractions, dans les deux facteurs $a - b + c$ et x, qui n'indiquent qu'une seule multiplication précédée d'addition

et de soustraction. Les raisonnemens dont on s'est servi dans ces deux circonstances, peuvent être réduits en règles; et il en résultera, sur les quantités représentées par des lettres, des opérations qu'on a appelées *multiplication* et *division algébriques*, par l'analogie qu'elles ont avec les opérations de l'Arithmétique qui portent les mêmes noms.

On a conçu par la même analogie deux opérations algébriques qui portent les noms d'*addition* et de *soustraction*, et dans lesquelles on a pour but de réunir en une seule plusieurs expressions algébriques, ou de les retrancher l'une de l'autre; mais ces opérations, comme les précédentes, diffèrent de celles de l'Arithmétique, en ce que leurs résultats, n'étant le plus souvent que des indications d'opérations à effectuer, ne présentent qu'une transformation des opérations primitivement indiquées, en d'autres qui produisent le même effet. Il arrive seulement, ou qu'on simplifie les expressions, ou qu'on leur donne une forme propre à manifester les conditions qu'il faut remplir.

Pour expliquer ces opérations, on appelle quantités *monomes* ou simplement *monomes*, celles qui n'ont qu'un seul terme, comme $+2a$, $-3ab$, etc.; *binomes* celles qui en ont deux, comme $a+b$, $a-b$, $5a-2x$, etc.; *trinomes* celles qui en ont trois, *quadrinomes* celles qui en ont quatre, et en général *polynomes* les quantités composées de plusieurs termes. Il est bon d'observer qu'on appelle aussi les monomes quantités *incomplexes*, et les polynomes quantités *complexes*.

De l'addition des quantités algébriques.

17. L'addition des quantités monomes se fait en les joignant par le signe $+$; c'est ainsi que b ajouté avec a s'indique par $a+b$. Mais lorsqu'on se propose d'ajouter

ensemble des expressions algébriques, on a en même temps pour but de simplifier le résultat, en le réduisant au plus petit nombre de termes possible, par la réunion de plusieurs de ces termes en un seul.

Cette réunion est celle qui a été effectuée dans les numéros 2 et 5, en réduisant la quantité $x+x$ à $2x$, la quantité $x+x+x$ à $3x$. Elle ne peut avoir lieu qu'à l'égard des quantités exprimées par les mêmes lettres, et qu'on appelle pour cette raison quantités *semblables*. On regarde la quantité littérale comme une unité qui se trouve répétée un certain nombre de fois; c'est ainsi que les quantités $2a$ et $3a$, considérées comme deux et trois unités d'une espèce particulière, forment, par leur addition, $5a$, ou 5 unités de même espèce. De même, $4ab$ et $5ab$ forment $9ab$.

Dans ce cas, l'addition s'opère sur les chiffres qui précèdent la quantité littérale, et qui indiquent combien de fois elle est répétée. Ces chiffres se nomment *coefficiens*. Le coefficient est donc le multiplicateur de la quantité devant laquelle il est placé; et il faut se rappeler que lorsqu'il n'est pas écrit, il est égal à l'unité; car $1a$ est la même chose que a.

18. Lorsqu'il s'agit de réunir des quantités quelconques, comme

$$4a+5b \qquad \text{et} \qquad 2c+3d,$$

le total doit être évidemment composé de toutes les parties ajoutées ensemble; il faut donc écrire

$$4a+5b+2c+3d.$$

Si l'on avait au contraire

$$4a+5b \qquad \text{et} \qquad 2c-3d,$$

il faudrait, dans la somme, écrire avec le signe —, ou indiquer comme soustractive, la quantité $3d$, qui, devant être retranchée de $2c$, diminuerait nécessairement d'au-

tant la somme qu'on formerait en réunissant $2c$ avec la première des quantités proposées ; et l'on aurait

$$4a + 5b + 2c - 3d.$$

Ces deux exemples font voir que *l'addition algébrique des polynomes s'effectue en écrivant à la suite les termes des autres, avec leurs signes, les quantités qu'il faut ajouter, et en observant que les termes qui ne sont précédés d'aucun signe, sont censés avoir le signe +.*

L'opération ci-dessus n'est, à proprement parler, qu'une indication par laquelle la réunion de deux quantités complexes est ramenée à l'addition et à la soustraction d'un certain nombre de quantités monomes ; mais si les expressions à ajouter contenaient des termes semblables, on pourrait réunir ces termes en opérant immédiatement sur leurs coefficiens.

Soient, pour exemple, les expressions

$$4a + 9b - 2c,$$
$$2a - 3c + 4d,$$
$$7b + c - e;$$

la somme indiquée sera, d'après la règle précédente,

$$4a + 9b - 2c + 2a - 3c + 4d + 7b + c - e.$$

Mais les termes $4a$ et $+2a$ étant formés de quantités semblables, se réunissent en un seul égal à $6a$.

De même les termes $+9b$, $+7b$, donnent $16b$.

Les termes $-2c$ et $-3c$, tous deux soustractifs, produisent dans le total le même effet que la soustraction d'une quantité égale à leur somme, c'est-à-dire que la soustraction de $5c$; et comme, en vertu du terme $+c$, on aura d'une autre part à ajouter c, il restera seulement à retrancher $4c$.

La somme des expressions proposées sera donc ramenée à

$$6a + 16b - 4c + 4d - e.$$

9. La dernière opération pratiquée ci-dessus, et par elle on réunit tous les termes semblables en un , quelque signe qu'ils aient, se nomme la *réduction*. *'effectue en faisant la somme des quantités sembla- ffectées du signe +, celle des quantités semblables tées du signe —; puis en retranchant la plus petite ces deux sommes de la plus grande, et donnant au reste le signe de la plus grande.*

Il est à remarquer que la réduction s'applique à toutes les opérations algébriques.

Voici, pour exercer le lecteur, quelques exemples d'additions avec leurs résultats.

1°. Ajouter les quantités

$$\begin{array}{l} 7m+3n-14p+17r \\ 3a+9n-11m+2r \\ 5p-4m+8n \\ 11n-2b-m-r+s \end{array}$$

résultat $7m+3n-14p+17r+3a+9n-11m+2r$
$+5p-4m+8n+11n-2b-m-r+s.$

Faisant la réduction, cette quantité se change en celle-ci

$$-9m+31n-9p+18r+3a-2b+s,$$

ou $31n-9m-9p+18r+3a-2b+s,$

en commençant par un terme qui ait le signe +.

2°. Ajouter les quantités

$$\begin{array}{l} 11bc+4ad-8ac+5cd \\ 8ac+7bc-2ad+4mn \\ 2cd-3ab+5ac+an \\ 9an-2bc-2ad+5cd \end{array}$$

résultat $11bc+4ad-8ac+5cd+8ac+7bc-2ad$
$+4mn+2cd-3ab+5ac+an+9an-2bc$
$-2ad+5cd.$

En réduisant cette quantité, elle devient

$$16bc+5ac+12cd+4mn-3ab+10an.$$

De la soustraction des quantités algébriques.

20. La soustraction des monomes s'indique, ainsi qu'on en est convenu, en plaçant le signe — entre la quantité à soustraire et celle dont on la soustrait.

b soustrait de a, s'écrit par $a-b$.

Lorsque les quantités sont semblables, la soustraction s'opère immédiatement sur les coefficiens.

Si de $5a$ on retranche $3a$, il vient pour reste $2a$.

A l'égard de la soustraction des polynomes, il faut distinguer deux cas. 1°. Si la quantité à soustraire a tous ses termes affectés du signe +, il faut évidemment leur donner le signe —, puisqu'on doit retrancher successivement toutes les parties de la quantité à soustraire.

Si, par exemple, de $5a-9b+2c$, on veut ôter $2d+3e+4f$, il faudra écrire

$$5a-9b+2c-2d-3e-4f.$$

2°. Si la quantité à soustraire a des termes affectés du signe —, il faut leur donner le signe +. En effet, si de la quantité a, on voulait ôter $b-c$, et qu'on écrivît d'abord $a-b$, on aurait diminué ainsi a de la quantité b tout entière ; mais la soustraction ne devrait s'effectuer qu'après avoir diminué préalablement b de la quantité c : on a donc ôté de trop cette dernière quantité, qu'il faut par conséquent restituer avec le signe +, ce qui donnera pour le vrai résultat,

$$a-b+c.$$

Ce raisonnement, qu'on peut appliquer à tous les cas semblables, montre que le signe — de c a dû être changé en +; et en rapprochant ce résultat du précédent, on conclura que *la soustraction des quantités algébriques s'effectue en écrivant, à la suite de la quantité dont on veut*

soustraire une autre, cette autre, après en avoir changé les signes + en —, et les signes — en +.

Lorsqu'on a écrit le résultat que donne d'abord la règle énoncée plus haut, on y fait, s'il y a lieu, des réductions conformes au précepte du numéro 19, ainsi qu'on le voit dans les exemples suivans :

1°. Soustraire de $17a+2m-9b-4c+23d$
la quantité $51a-27b+11c-4d$.

Résultat $17a+2m-9b-4c+23d$
$-51a+27b-11c+4d$.

Opérant la réduction, cette quantité devient

$$-34a+2m+18b-15c+27d,$$

ou bien

$$2m-34a+18b-15c+27d.$$

2°. Soustraire de $5ac-8ab+9bc-4am$
la quantité $8am-2ab+11ac-7cd$.

Résultat $5ac-8ab+9bc-4am$
$-8am+2ab-11ac+7cd$.

Opérant la réduction, il vient

$$-6ac-6ab+9bc-12am+7cd,$$

ou $$9bc-6ac-6ab-12am+7cd.$$

De la multiplication des quantités algébriques.

21. Tant qu'on n'envisage dans les lettres que les valeurs numériques des quantités dont elles tiennent la place, on doit se former de la multiplication algébrique la même idée que de la multiplication arithmétique (*Arithm.* 21, 74). Ainsi, *multiplier* a *par* b, *c'est composer avec la quantité représentée par* a, *une autre quantité, de la même manière que la quantité représentée par* b *l'est avec l'unité.*

On a déjà fait connaître dans les numéros 2 et 7, les

signes dont on est convenu pour indiquer la multiplication ; et le produit de a par b s'écrirait en conséquence soit par $a \times b$, ou par $a \,.\, b$, ou enfin par ab.

On a le plus souvent besoin d'indiquer plusieurs multiplications successives, comme celle de a par b, puis du produit ab par c, puis de ce dernier produit par d, et ainsi de suite. Dans ce cas il est évident que le dernier résultat est un nombre ayant pour *facteurs* les nombres a, b, c, d (*Arithm.* 22) ; et, en généralisant la dernière des conventions rappelées ci-dessus, *on indique ce produit en écrivant à la suite l'un de l'autre, et sans aucune interposition de signe, les facteurs dont il est formé;* on a de cette manière l'expression $abcd$.

Réciproquement, toute expression telle que $abcd$, formée de plusieurs lettres écrites immédiatement à la suite les unes des autres, désigne toujours le produit des nombres représentés par ces lettres.

J'ai déjà fait tacitement usage de ces conventions, dans lesquelles les coefficiens numériques sont aussi exceptés, puisque devant évidemment être facteurs de la quantité proposée. En effet, $15abcd$, désignant la quantité $abcd$ prise 15 fois, exprime aussi le produit des cinq facteurs $15, a, b, c, d$.

22. Il suit de là que pour indiquer la multiplication de plusieurs monomes, tels que $4abc$, $5def$, $3mn$, il faut écrire ces quantités à la suite les unes des autres, sans interposition de signe, et il viendra

$$4abc5def3mn;$$

mais comme on a fait voir en Arithmétique, n° 70, qu'on pouvait intervertir comme on voulait l'ordre des facteurs d'un produit, sans que la valeur de ce produit changeât, on profite de cette circonstance pour rapprocher les facteurs numériques, dont la multiplication peut s'effectuer par les règles de l'Arithmétique : on

conçoit donc le produit comme indiqué dans l'ordre $4.5.3abcdefmn$; et effectuant la multiplication des nombres 4, 5, 3, on aura seulement

$$60abcdefmn \quad (*).$$

23. L'expression d'un produit s'abrège beaucoup lorsqu'il contient des facteurs égaux. Au lieu d'écrire plusieurs fois de suite la lettre qui représente un de ces facteurs, on ne la met qu'une fois, et *on marque par un nombre combien de fois elle aurait dû être écrite comme facteur*; mais parce que ce nombre indique des multiplications successives, il doit être soigneusement distingué du coefficient, qui n'indique que des additions; c'est pourquoi on le place à la droite de la lettre, et un peu au-dessus, tandis que le coefficient est toujours écrit à la gauche de la lettre et sur la même ligne.

D'après cette convention, le produit de a par a, qui serait indiqué, suivant le numéro 21, par aa, devient a^2. Le 2 supérieur marque que le nombre désigné par la lettre a est deux fois facteur dans l'expression proposée, qu'il ne faut par conséquent pas confondre avec $2a$, qui n'est que l'abréviation de $a+a$. Pour bien sentir l'erreur que l'on commettrait en prenant l'une pour l'autre, il suffit de substituer des nombres aux lettres. Si l'on avait, par exemple, $a=5$, $2a$ deviendrait $2.5=10$, et $a^2=a\times a=5.5=25$.

En continuant cette marche, on verra que pour dési-

(*) L'usage des symboles algébriques abrégeant beaucoup la démonstration de cette proposition, j'ai cru devoir la rappeler ici au moyen de ces symboles.

Si l'on écrit le produit $abcdef$ comme il suit : $abc\times de\times f$, et qu'on change l'ordre des deux facteurs du produit de pour avoir ed (*Arithm.* 27), il viendra $abc\times ed\times f$ ou $abcedf$. Il est évident qu'on pourra, par de nouvelles décompositions, amener tel changement qu'on voudra dans l'ordre des facteurs du produit proposé.

gner un produit dans lequel a serait trois fois facteur, il faudrait écrire a^3, au lieu de aaa; de même a^5 équivalent de $aaaaa$, représente un produit dans lequel a est cinq fois facteur.

24. Les produits formés ainsi par des multiplications successives d'une quantité, sont appelés en général *puissances* de cette quantité.

La quantité elle-même, ou a, se nomme la première puissance.

La quantité multipliée par elle-même, ou aa, ou bien a^2, est la seconde puissance, qu'on appelle aussi le *quarré*.

La quantité multipliée deux fois de suite par elle-même, ou aaa, ou bien a^3, est la troisième puissance, qu'on appelle aussi *cube* (*).

En général, une puissance quelconque se désigne par le nombre de facteurs égaux dont elle est formée : a^5 ou bien $aaaaa$, est la *cinquième* puissance de a.

Pour montrer l'application de ces dénominations, je prendrai le nombre 3, et j'aurai

1re puissance	3
2e.....	3.3= 9
3e.....	3.3.3= 9.3= 27
4e.....	3.3.3.3=27.3= 81
5e.....	3.3.3.3.3=81.3=243
etc.	

Le nombre qui marque la puissance d'un autre se nomme *exposant* de cet autre.

(*) Les dénominations de *quarré* et de *cube*, tenant à des considérations géométriques, et rompant l'uniformité dans la nomenclature de produits formés par des facteurs égaux, sont très impropres en Algèbre; mais on les emploie fréquemment à cause de leur brièveté.

L'exposant, lorsqu'il est égal à l'unité, ne s'écrit point : a est la même chose que a^1.

On voit par ce qui précède, que, *pour former une puissance d'un nombre, il faut multiplier ce nombre par lui-même une fois de moins qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de la puissance.*

25. Puisque l'exposant marque le nombre de facteurs égaux qui forment l'expression dont il fait partie, et que le produit de deux quantités doit avoir pour facteurs tous ceux qui forment chacune de ces quantités, il s'ensuit que l'expression a^5, dans laquelle a est 5 fois facteur, multipliée par l'expression a^3, dans laquelle a est 3 fois facteur, doit donner un produit dans lequel a soit 8 fois facteur, par conséquent exprimé par a^8, et qu'en général *le produit de deux puissances du même nombre doit avoir pour exposant la somme de ceux du multiplicande et du multiplicateur.*

26. Il suit de là que *lorsque deux monomes ont des lettres communes, on peut abréger l'expression du produit de ces quantités, en ajoutant tout de suite les exposans des lettres semblables du multiplicande et du multiplicateur.*

Par exemple, l'expression du produit des quantités $a^2 b^3 c$ et $a^4 b^5 c^2 d$, qui serait $a^2 b^3 c\, a^4 b^5 c^2 d$, suivant les conventions du numéro 21, s'abrège en assemblant les facteurs désignés par la même lettre, ce qui donne

$$a^2 a^4 b^3 b^5 c c^2 d,$$

d'où l'on conclut

$$a^6 b^8 c^3 d,$$

en écrivant

a^6 au lieu de $a^2 a^4$,
b^8 au lieu de $b^3 b^5$,
c^3 au lieu de $c c^2$ ou de $c^1 c^2$.

27. De même qu'on distingue les puissances par le nombre de facteurs égaux dont elles sont formées, on classe aussi les produits quelconques par le nombre des facteurs simples ou *premiers* qui les forment; et je donnerai à ces classes le nom de *degrés*. Le produit $a^2\,b^3\,c$ sera, par exemple, du 6e degré, parce qu'il renferme 6 facteurs simples, savoir : 2 facteurs a, 3 facteurs b et 1 facteur c. Il est évident que les facteurs a, b et c, regardés ici comme premiers, ne le sont qu'eu égard à l'Algèbre, qui ne permet pas de les décomposer; mais ils peuvent représenter d'ailleurs des nombres composés : il ne s'agit ici que de leur état général (*).

Les *coefficiens* exprimés en nombres ne comptent point dans l'estimation du degré des quantités algébriques; on n'a égard qu'aux lettres.

Il est évident (21, 25) que lorsqu'on multiplie deux monomes l'un par l'autre, le nombre qui marque le degré du produit est la somme de ceux qui marquent le degré de chacun de ces monomes.

28. La multiplication des quantités complexes se ramène à celle des quantités monomes, en considérant à part chaque terme du multiplicande et du multiplicateur, de même qu'en Arithmétique, on opère en particulier sur chaque chiffre des nombres qu'on se propose de multiplier (*Arithm.* 33); la réunion des produits par-

(*) Par une suite de l'analogie indiquée dans la note de la page 40, on appelle communément *dimensions* ce que je nomme *degrés*. L'expression rapportée ci-dessus aurait, dans le langage ordinaire, 6 dimensions. Cet exemple prouve bien l'absurdité de l'ancienne nomenclature, établie sur ce que les produits de 2 ou de 3 facteurs mesurent les aires des surfaces et les volumes des corps, qui ont deux ou trois dimensions; mais passé ce terme, la correspondance entre les expressions algébriques et les figures géométriques cesse, puisque l'étendue ne peut avoir plus de trois dimensions.

tiels compose le produit total : mais l'Algèbre présente une circonstance qui ne se trouve pas dans les nombres. Ceux-ci n'ont point de termes à retrancher, ou de parties soustractives ; les unités, dixaines, centaines, etc. qui les forment, sont toujours censées ajoutées entre elles, et alors il est bien évident que le produit total doit se former de la somme des produits de chaque partie du multiplicande par chaque partie du multiplicateur.

Il en est de même lorsqu'il s'agit des expressions littérales dont tous les termes sont assemblés par le signe $+$.

Le produit de $a+b$
multiplié par c
est $ac+bc$,
et s'obtient en multipliant chaque partie du multiplicande par le multiplicateur, et en ajoutant les deux produits partiels ac et bc. Si le multiplicande contenait plus de deux parties, l'opération serait toujours la même.

Lorsque le multiplicateur est la somme de plusieurs termes, il est visible que le produit se compose de la somme des produits du multiplicande par chaque terme du multiplicateur.

Le produit de $a+b$
multiplié par $c+d$
est $\begin{cases} ac+bc \\ +ad+bd; \end{cases}$
car en multipliant d'abord $a+b$ par c, on obtient $ac+bc$, puis en multipliant $a+b$ par le second terme d du multiplicateur, on trouve $ad+bd$, et la somme de ces deux résultats donne $ac+bc+ad+bd$ pour le produit total.

29. Lorsque le multiplicande contient des parties

soustractives, les produits de ces parties par le multiplicateur doivent être retranchés des autres, c'est-à-dire affectés du signe —. Par exemple,

le produit de $a-b$
multiplié par c
est $ac-bc$;

car chaque fois qu'on prendra tout entière la quantité a, qui aurait dû être diminuée de b avant la multiplication, on prendra de trop la quantité b; le produit ac, dans lequel a tout entier est pris autant de fois que le marque le nombre c, surpassera par conséquent le produit cherché de la quantité b, prise autant de fois que le marque le nombre c, ou du produit bc: il faudra donc retrancher bc de ac, ce qui donnera, comme ci-dessus,

$$ac - bc.$$

Le même raisonnement s'appliquerait à chacune des parties soustractives du multiplicande, quel qu'en fût le nombre, et quel que fût celui des termes du multiplicateur, pourvu qu'ils fussent tous affectés du signe +. En observant que les termes qui n'ont pas de signe sont censés avoir le signe +, on voit par ces exemples que les termes du multiplicande affectés du signe +, donnent un produit partiel affecté du signe +, tandis que ceux qui sont affectés du signe —, en donnent un affecté du signe —. Il suit de là que *lorsque le multiplicateur partiel a le signe +, le produit partiel a le même signe que le multiplicande partiel.*

30. Le contraire a lieu quand le multiplicateur contient des parties soustractives; les produits formés par ces parties doivent être pris avec un signe contraire à celui qu'ils auraient, d'après la règle précédente. On s'en convaincra par l'exemple suivant.

Soit le multiplicande $a - b$

le multiplicateur $c - d$

le produit sera $\begin{cases} ac - bc \\ -ad + bd; \end{cases}$

car le produit du multiplicande par le premier terme c du multiplicateur sera, par l'exemple précédent, $ac - bc$; mais en prenant c tout entier pour multiplicateur, au lieu de c diminué de d, on prend la quantité $a - b$ autant de fois de trop que le marque le nombre d; ainsi, le produit $ac - bc$ surpasse celui qu'on cherche, du produit de $a - b$ par d. Or ce dernier est, par ce qui précède, $ad - bd$; et pour le retrancher du premier, il faut en changer les signes (20) : on aura donc $ac - bc - ad + bd$ pour le résultat demandé.

31. En résumant les conséquences des exemples ci-dessus, on en conclura que *la multiplication des polynomes s'effectue en multipliant successivement, selon les règles données pour les monomes* (n°s 21—26), *tous les termes du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, et en observant que si le multiplicateur partiel a le signe +, le produit partiel doit avoir le même signe que le multiplicande partiel, et le signe contraire, si le multiplicateur partiel a le signe —.*

Si l'on développe les différens cas de cette dernière règle, on trouvera,

1°. Qu'un terme ayant le signe +, multiplié par un terme ayant le signe +, donne un produit qui a le signe +;

2°. Qu'un terme ayant le signe —, multiplié par un terme ayant le signe +, donne un produit qui a le signe —;

3°. Qu'un terme ayant le signe +, multiplié par un terme ayant le signe —, donne un produit qui a le signe —;

4°. Qu'un terme ayant le signe —, multiplié par un terme ayant le signe —, donne un produit qui a le signe +.

Ce tableau fait voir que *lorsque le multiplicande et le multiplicateur partiels ont le même signe, le produit a le signe +, et que s'ils ont des signes différens, le produit a le signe —.*

Afin de faciliter la pratique de la multiplication des polynomes, voici la récapitulation des règles qu'il faut suivre dans cette opération.

1°. *Déterminer le signe de chaque produit partiel, d'après la règle ci-dessus* : c'est la règle des signes.

2°. *Former le coefficient, en faisant le produit de ceux du multiplicande et du multiplicateur partiels* (22) : c'est la règle des coefficiens.

3°. *Ecrire à la suite les unes des autres toutes les lettres différentes, contenues dans le multiplicande et dans le multiplicateur partiels* (21) : c'est la règle des lettres.

4°. *Donner aux lettres communes au multiplicande et au multiplicateur partiels, un exposant égal à la somme de ceux qu'elles ont dans ce multiplicande et dans ce multiplicateur* (25) : c'est la règle des exposans.

32. L'exemple ci-dessous offre l'application de toutes ces règles.

Multiplicande $5a^4-2a^3b+4a^2b^2$

Multiplicateur $a^3-4a^2b+2b^3$

Produits partiels
$$\begin{cases} 5a^7-2a^6b+4a^5b^2 \\ -20a^6b+8a^5b^2-16a^4b^3 \\ +10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5. \end{cases}$$

Résultat réduit $5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$.

La première ligne des produits partiels contient ceux de tous les termes du multiplicande par le premier terme

a^3 du multiplicateur ; ce terme étant censé avoir le signe +, les produits qu'il donne ont les mêmes signes que les termes correspondans du multiplicande (31).

Le premier terme $5a^4$ du multiplicande ayant le signe +, on n'écrit pas celui du premier produit partiel, qui serait aussi + ; le coefficient 5 de a^4 étant multiplié par le coefficient 1 de a^3, donne 5 pour celui du produit partiel ; la somme des deux exposans de la lettre a est $4+3$ ou 7 : le premier produit partiel est donc $5a^7$.

Le second terme $-2a^3b$ du multiplicande ayant le signe —, le produit a le signe — ; le coefficient 2 de a^3b, multiplié par le coefficient 1 de a^3, donne 2 pour coefficient du produit ; l'exposant de la lettre a, commune aux termes qu'on multiplie, est $3+3$ ou 6, et on écrit à la suite la lettre b, qui ne se trouve que dans le multiplicande partiel : le second produit partiel est donc $-2a^6b$.

Le troisième terme $+4a^2b^2$ donne un produit partiel affecté du signe +, et par les règles appliquées aux deux termes précédens, on trouve $+4a^5b^2$.

La seconde ligne contient les produits de tous les termes du multiplicande par le second terme $-4a^2b$ du multiplicateur ; ce dernier ayant le signe —, tous les produits qu'il donne doivent avoir des signes contraires à ceux des termes correspondans du multiplicande : les coefficiens, les lettres et les exposans se forment comme dans la ligne précédente.

La troisième ligne enfin renferme les produits de tous les termes du multiplicande par le troisième terme $+2b^3$ du multiplicateur ; ce terme ayant le signe +, tous les produits qu'il donne ont le même signe que les termes correspondans du multiplicande.

Après avoir formé tous les produits partiels dont se compose le produit total, on examine attentivement ce dernier, pour voir s'il ne renferme pas des termes sem-

blables. Lorsqu'il en offre de tels, on les réduit, suivant la règle du numéro 19, en observant que deux termes, pour être semblables, doivent contenir non-seulement les mêmes lettres, mais encore affectées des mêmes exposans. Dans l'exemple ci-dessus, il y a trois réductions, savoir :

$-2a^6b$ et $-20a^6b$, ce qui donne $-22a^6b$;
$+4a^5b^2$ et $+8a^5b^2$, ce qui donne $+12a^5b^2$;
$-16a^4b^3$ et $+10a^4b^3$, ce qui donne $-6a^4b^3$.

Ces réductions étant effectuées, on a pour résultat la dernière ligne de l'exemple.

Voici encore, pour exercer le lecteur, un exemple de multiplication, qu'il est facile d'effectuer d'après ce qui précède.

Multiplicande. $5a^4b^3+7a^3b^3-15a^5c+23b^5d^4-17bc^3d^2-9abcdm^2$

Multiplicateur. $11b^3-8c^3+5abc-2bdm$

Produits partiels.

$$\begin{cases} 55a^4b^5+77a^3b^6-165a^5b^3c+253b^5d^4-187b^4c^3d^2-99ab^4cdm^2 \\ -40a^4b^2c^3-56a^3b^3c^3+120a^5c^4-184b^2c^3d^4+136bc^6d^2+72abc^4dm^2 \\ +25a^5b^3c+35a^4b^4c-75a^5bc^2+115ab^3cd^4-85ab^2c^4d^2-45a^2b^2c^2dm^2 \\ -10a^4b^3dm-14a^3b^4dm+30a^5bcdm-46b^3d^5m+34b^2c^3d^3m+18ab^2cd^2m^3 \end{cases}$$

Résultat simplifié.

$$\begin{cases} 55a^4b^5+77a^3b^6-140a^5b^3c+253b^5d^4-187b^4c^3d^2-99ab^4cdm^2-40a^4b^2c^3-56a^3b^3c^3 \\ +120a^5c^4-184b^2c^3d^4+136bc^6d^2+72abc^4dm^2+35a^4b^4c-75a^5bc^2+115ab^3cd^4-85ab^2c^4d^2 \\ -45a^2b^2c^2dm^2-10a^4b^3dm-14a^3b^4dm+30a^5bcdm-46b^3d^5m+34b^2c^3d^3m+18ab^2cd^2m^3. \end{cases}$$

33. Les procédés de la multiplication font voir que si tous les termes du multiplicande sont du même degré (27), et que ceux du multiplicateur soient aussi du même degré, tous les termes du produit seront du degré marqué par la somme des nombres qui désignent le degré des termes de chacun des facteurs.

Dans le premier exemple, le multiplicande est du quatrième degré, le multiplicateur du troisième, le produit est du septième.

Dans le second exemple, le multiplicande est du sixième degré, le multiplicateur du troisième; le produit est du neuvième.

Les expressions comme celles qu'on vient de rappeler, dont tous les termes sont du même degré, se nomment expressions *homogènes*; et la remarque qu'on a faite sur leurs produits, est utile pour prévenir les erreurs qu'on pourrait commettre en oubliant quelques-uns des facteurs dans les multiplications partielles.

34. Les opérations algébriques effectuées sur des quantités littérales, laissant voir comment les diverses parties de ces quantités concourent à la formation des résultats, font souvent connaître des propriétés générales des nombres, indépendantes d'aucun système de numération. Les multiplications ci-après conduisent à des conséquences de ce genre, très remarquables et d'une application fréquente dans la suite.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \end{array}$$

La première, de laquelle il résulte que la quantité $a+b$, multipliée par $a-b$, donne a^2-b^2, fait voir que *si l'on multiplie la somme de deux nombres par leur différence, le produit sera la différence des quarrés de ces nombres.*

Si l'on prend, par exemple, la somme 11 des nombres 7 et 4, qu'on la multiplie par la différence 3 de ces nombres, le produit 3×11 ou 33 sera égal à la différence entre 49, quarré de 7, et 16, quarré de 4.

Par le second exemple, dans lequel $a+b$ est deux fois facteur, on apprend que *la seconde puissance, ou le quarré, d'une quantité composée de deux parties*, a et b, *contient le quarré de la première partie, plus le double du produit de la première partie par la seconde, plus le quarré de la seconde.*

Le troisième exemple, où l'on a multiplié la seconde puissance de $a+b$ par la première, montre que, *la troisième puissance, ou le cube, d'une quantité composée de deux parties, renferme le cube de la première, plus trois fois le quarré de la première multiplié par la seconde, plus trois fois la première multipliée par le quarré de la seconde, plus enfin le cube de la seconde.*

35. Comme il est souvent nécessaire de décomposer une quantité dans ses facteurs, et de laisser toujours en évidence, le plus qu'il est possible, la formation des quantités que l'on considère, on n'effectue les opérations algébriques que lorsqu'on ne peut s'en dispenser absolument; et il faut, pour cette raison, établir des signes propres à indiquer la multiplication entre des quantités complexes.

On se sert à cet effet de parenthèses ou crochets, entre lesquels on renferme les différens facteurs du produit indiqué. L'expression

$$(5a^4-3a^2b^2+b^4)(4ab^2-ac^2+d^3)(b^2-c^2),$$

par exemple, indique le produit des quantités complexes

$$5a^4-3a^2b^2+b^4,\quad 4ab^2-ac^2+d^3 \text{ et } b^2-c^2.$$

Quelques auteurs déjà un peu anciens, ont mis des barres au-dessus des facteurs, comme on le voit ci-dessous,

$$\overline{5a^4-3a^2b^2+b^4}\times\overline{4ab^2-ac^2+d^3}\times\overline{b^2-c^2};$$

mais les barres pouvant être prolongées plus ou moins qu'il ne faut, ce signe est moins précis que les parenthèses, qui ne laissent jamais d'équivoque sur la totalité des quantités comprises dans chaque facteur : aussi ont-elles prévalu.

De la division des quantités algébriques.

36. La division algébrique doit être considérée, ainsi que la division arithmétique, comme une opération servant à découvrir l'un des facteurs d'un produit donné lorsqu'on connaît l'autre. D'après cette définition, le quotient, multiplié par le diviseur, doit reproduire le dividende.

En appliquant ces notions aux quantités monomes, on verra par le n° 21, que le dividende est formé des

facteurs du diviseur et de ceux du quotient ; donc, *en supprimant dans le dividende tous les facteurs qui composent le diviseur, le résultat sera le quotient cherché.*

Soit, par exemple, le monome $72\,a^5b^3c^2d$ à diviser par le monome $9\,a^3\,b\,c^2$; il faut, suivant la règle énoncée ci-dessus, supprimer dans la première de ces quantités, les facteurs de la seconde, qui sont

$$9,\quad a^3,\quad b,\quad \text{et}\quad c^2 :$$

il faut donc, pour que la division puisse s'effectuer, que ces facteurs soient dans le dividende. En les prenant par ordre, on voit d'abord que le coefficient 9 du diviseur doit être facteur du coefficient 72 du dividende, ou que 9 doit diviser exactement 72 ; c'est ce qui a lieu en effet, puisque $72 = 9 \times 8$: en supprimant donc le facteur 9, il restera le facteur 8 pour coefficient du quotient.

Il suit encore des règles de la multiplication (25), que l'exposant 5 de la lettre a dans le dividende, est la somme des exposans qu'elle a dans le diviseur et dans le quotient ; ce dernier exposant sera par conséquent la différence entre les deux autres, ou $5-3=2$: ainsi la lettre a aura, dans le quotient, l'exposant 2. Par la même raison, la lettre b aura, dans le quotient, un exposant égal à $3-1$, ou 2. Enfin le facteur c^2 étant commun au dividende et au diviseur, doit être supprimé ; et l'on aura par conséquent

$$8\,a^2\,b^2d$$

pour le quotient demandé.

On raisonnerait de même sur tout autre exemple ; et on conclura de ce qui précède, que, *pour effectuer la division des quantités monomes, il faut diviser le coefficient du dividende par celui du diviseur ;*

Supprimer dans le dividende les lettres qui lui sont

communes avec le diviseur, lorsqu'elles ont le même exposant; et lorsque l'exposant n'est pas le même, retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende, le reste étant l'exposant que doit avoir la lettre dans le quotient;

Enfin écrire au quotient les lettres du dividende qui ne sont pas dans le diviseur.

37. En appliquant la règle donnée ci-dessus pour former l'exposant des lettres du quotient, à une lettre qui aurait le même exposant dans le dividende et dans le diviseur, on trouverait zéro pour l'exposant qu'elle devrait avoir au quotient : a^3 divisé par a^3, par exemple, donnerait a^0. Pour savoir ce que peut signifier une pareille expression, il faut remonter à son origine, et considérer que, représentant le quotient de la division de la quantité a^3 par elle-même, elle doit répondre à l'unité, qui marque combien de fois une quantité quelconque se contient elle-même. Il suit de là que *l'expression* a^0 *est un symbole équivalent à l'unité, et qu'on doit remplacer par conséquent par* 1. On peut donc se dispenser d'écrire les lettres qui ont zéro pour exposant, puisqu'alors chacune d'elles ne représente que l'unité. Ainsi, $a^3 b c^2$ divisé par $a^3 b c^2$, donnant $a^0 b^0 c^0$, revient à a, comme on peut aussi s'en assurer en effectuant la suppression des facteurs communs au dividende et au diviseur.

On voit par là que cette proposition : *Toute quantité qui a zéro pour exposant, vaut alors* 1, n'est, à proprement parler, que l'explication d'un résultat auquel conduit la convention faite sur la manière d'écrire les puissances des quantités par les exposans.

Pour que la division puisse s'effectuer, il faut, 1°. que le diviseur ne renferme aucune lettre qui ne se trouve dans le dividende; 2°. que l'exposant des lettres, dans le diviseur, ne surpasse point celui qu'elles ont dans le

dividende; 3°. enfin, que le coefficient du diviseur divise exactement celui du dividende.

38. Lorsque ces conditions n'ont pas lieu, la division ne peut que s'indiquer sous la forme d'une fraction, d'après la convention du numéro 2; et il faut chercher ensuite à simplifier cette fraction, en supprimant les facteurs qui sont communs en même temps au dividende et au diviseur, s'il y en a de tels; car (*Arithm.* 57) il est visible que les principes sur lesquels repose la théorie des fractions arithmétiques, étant indépendans de toute valeur particulière de leurs termes, conviennent aux fractions représentées par des lettres, comme à celles qui sont exprimées par des nombres.

D'après ces principes, *on supprime d'abord les facteurs numériques communs aux coefficiens du dividende et du diviseur, puis les lettres qui sont communes au dividende et au diviseur, et qui ont le même exposant dans l'un et dans l'autre. Lorsque l'exposant n'est pas le même, on retranche le plus petit du plus grand, et on donne le reste pour exposant à la lettre, qu'on n'écrit que dans celui des deux termes de la fraction où elle avait le plus haut exposant.*

L'exemple suivant éclaircira cette règle.

Soit $48\,c^3b^5c^2d$ à diviser par $64\,a^3b^3c^4e$; le quotient ne peut que s'indiquer sous la forme fractionnaire

$$\frac{48\,a^3b^5c^2d}{64\,a^3b^3c^4e};$$

mais les coefficiens 48 et 64 étant tous deux divisibles par 16, en supprimant ce facteur commun, le coefficient du numérateur deviendra 3, et celui du dénominateur 4.

La lettre a ayant le même exposant 3 dans les deux termes de la fraction, il s'ensuit que a^3 est un facteur commun au dividende et au diviseur, et qu'on peut aussi le supprimer.

Passant ensuite à la lettre b, il faut diviser la puissance la plus élevée, qui est b^5, par b^3, suivant la règle donnée plus haut, et le quotient b^2 nous apprend que $b^5 = b^3 \times b^2$. Supprimant donc le facteur commun b^3, il restera dans le numérateur le facteur b^2.

Par rapport à la lettre c, le facteur le plus élevé étant c^4 au dénominateur, si on le divise par c^2, on le décomposera en $c^2 \times c^2$; et supprimant le facteur c^2, commun aux deux termes, cette lettre disparaîtra du numérateur, mais restera au dénominateur avec l'exposant 2.

Enfin les lettres d et e resteront à leurs places respectives, puisque dans l'état où elles sont, elles n'indiquent aucun facteur qui soit commun aux deux termes de la fraction.

Par ces diverses opérations, la fraction proposée se réduit à

$$\frac{3\,b^2\,d}{4\,c^2\,e},$$

c'est sa plus simple expression, tant qu'on ne donne aucune valeur numérique aux lettres; car elle pourrait se réduire encore si ces lettres étaient remplacées par des nombres contenant des facteurs communs.

39. Une observation qu'il ne faut pas manquer de faire, c'est que si tous les facteurs du dividende entraient dans le diviseur, qui, de plus, en contiendrait encore d'autres qui lui seraient particuliers, il faudrait, après la suppression des premiers facteurs, mettre l'unité à la place du dividende, au numérateur de la fraction. En effet, dans ce cas on peut supprimer dans les deux termes de la fraction, tous les facteurs du numérateur, c'est-à-dire diviser les deux termes de la fraction par le numérateur; mais celui-ci étant divisé par lui-même, doit donner l'unité pour le quotient dont il faut faire le nouveau numérateur.

Soit pour exemple la fraction

$$\frac{4a^2bc}{12a^2b^3cd};$$

les facteurs 4, a^2, b^3 et c, se divisant respectivement par les facteurs 4, a^2, b et c, c'est comme si l'on divisait les deux termes de la fraction proposée par le numérateur $4a^2bc$; or la quantité $4a^2bc$ divisée par elle-même, donne 1 pour quotient, et la quantité $12a^2b^3cd$ divisée par la première, donne, par les règles ci-dessus, $3b^2d$: la nouvelle fraction est donc

$$\frac{1}{3b^2d}.$$

40. Il suit des règles de la multiplication, que lorsqu'une quantité monome multiplie une quantité polynome, elle devient facteur commun de tous les termes de celle-ci. On profite de cette observation pour simplifier les fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des polynomes ayant des facteurs communs à tous leurs termes.

Soit l'expression

$$\frac{6a^4-3a^2bc+12a^2c^2}{9a^2b-15a^2c+24a^3};$$

en examinant la quantité $6a^4-3a^2bc+12a^2c^2$, on voit que le facteur a^2 est commun à tous ses termes, puisque $a^4=a^2\times a^2$, et qu'en outre les nombres 6, 3 et 12 sont tous divisibles par 3; en sorte que

$$6a^4-3a^2bc+12a^2c^2=2a^2\times3a^2-bc\times3a^2+4c^2\times3a^2.$$

De même le dénominateur a pour facteur commun $3a^2$; car les facteurs a^2 et 3 entrent dans tous ses termes, et l'on a

$$9a^2b-15a^2c+24a^3=3b\times3a^2-5c\times3a^2+8a\times3a^2.$$

Supprimant donc le facteur $3a^2$, tant dans le numérateur que dans le dénominateur, la fraction proposée deviendra

$$\frac{2a^2-bc+4c^2}{3b-5c+8a}.$$

41. Je passe maintenant au cas où le dividende et le diviseur sont tous deux complexes, et dans lequel on ne peut plus reconnaître, à la première vue, si le diviseur est ou n'est pas facteur du dividende.

Puisque le diviseur, multiplié par le quotient, doit reproduire le dividende, il faut que ce dernier contienne tous les produits partiels de chaque terme du diviseur par chaque terme du quotient; et si l'on pouvait retrouver les produits formés par chaque terme du diviseur en particulier, en les divisant par ce terme qui est connu, on obtiendrait ceux du quotient, de la même manière qu'en Arithmétique on découvre tous les chiffres du quotient en divisant successivement par le diviseur, des nombres qu'on regarde comme les produits partiels de ce diviseur par les divers chiffres du quotient. Mais dans les nombres, ces produits partiels se présentent par ordre, en commençant par les unités placées au dernier rang sur la gauche, à cause de la subordination établie entre les unités de chaque chiffre du dividende, d'après le rang qu'ils occupent. Il n'en est pas de même en Algèbre; mais on y supplée en rangeant tous les termes du dividende et du diviseur, de manière que les exposans des puissances de la même lettre diminuent dans chaque terme, en allant de gauche à droite, ainsi qu'on le voit, par rapport à la lettre a, dans les quantités

$$5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5,$$
$$5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2,$$

dont l'une est le produit, et l'autre le multiplicande, dans l'opération du numéro 32: c'est ce qu'on appelle *ordonner* les quantités proposées.

Lorsqu'elles sont rangées ainsi, il est visible que, quel que soit le facteur par lequel il faille multiplier la seconde pour obtenir la première, le terme $5a^7$, qui commence celle-ci, résulte du terme $5a^4$, qui commence l'autre, multiplié par le terme où a aurait le plus haut expo-

sant dans le facteur cherché, et qui se trouve le premier de ce facteur lorsqu'il est ordonné par rapport à a. En divisant donc le monome $5a^7$ par le monome $5a^4$, le quotient a^3 sera le premier terme du facteur cherché. Or, par les règles de la multiplication, le produit total devant contenir les divers produits partiels résultant de la multiplication de tout le multiplicande par chaque terme du multiplicateur, il s'ensuit que la quantité prise ici pour dividende, doit contenir les produits de tous les termes du diviseur $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$ par a^3, premier terme du quotient; et par conséquent si l'on retranche du dividende ces produits, qui sont $5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2$, le reste $-20a^6b + 8a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$, ne contiendra plus que ceux qui résultent de la multiplication du diviseur par le second, le troisième, etc., termes du quotient.

Ce reste peut donc être considéré comme un dividende partiel; et son premier terme, dans lequel a a l'exposant le plus haut, n'a pu provenir que de la multiplication du premier terme du diviseur par le second du quotient. Mais le premier terme du dividende partiel ayant le signe —, il faut assigner celui que doit avoir le terme correspondant du quotient: or cela est facile par la 1re règle du n° 31; car la quantité $-20a^6b$, regardée comme un produit partiel, ayant un signe contraire à celui du multiplicande partiel $5a^4$, il en résulte que le multiplicateur partiel a dû être affecté du signe —. La division étant donc opérée sur les monomes $-20a^6b$ et $5a^4$, donnera $-4a^2b$ pour ce second terme. Si on le multiplie par tous ceux du diviseur, et que l'on retranche le produit du dividende partiel, le reste $+10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$, ne contiendra plus que les produits du diviseur par le troisième, etc., termes du quotient.

En le regardant comme un nouveau dividende partiel,

son premier terme $10\,a^4b^3$ ne peut être que le produit du premier terme du diviseur par le troisième du quotient; et par conséquent ce dernier s'obtiendra en divisant, l'un par l'autre, les monomes $10\,a^4b^3$ et $5\,a^4$. Le quotient $2b^3$, étant multiplié par tout le diviseur, fournit des produits dont la soustraction, épuisant le dividende partiel, prouve que le quotient n'a que trois termes.

S'il avait dû en avoir un plus grand nombre, on les aurait évidemment trouvés comme les précédens; et si, comme on le suppose, le dividende a pour facteur le diviseur, la soustraction du produit de ce diviseur par le dernier terme du quotient, doit toujours épuiser le dernier dividende partiel.

42. Pour faciliter la pratique des règles trouvées ci-dessus, 1°. *On dispose le dividende et le diviseur comme pour la division des nombres, en les ordonnant l'un et l'autre par rapport à une même lettre, c'est-à-dire en écrivant leurs termes de manière que les exposans de cette lettre aillent en décroissant;*

2°. *On divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, et on écrit le résultat à la place marquée pour le quotient;*

3°. *On multiplie tout le diviseur par le quotient partiel qu'on vient de trouver, on le retranche du dividende, et on fait la réduction des termes semblables;*

4°. *On regarde ce reste comme un nouveau dividende dont on divise le premier terme par le premier terme du diviseur; on écrit le résultat comme un second terme du quotient, et on poursuit l'opération sur ce terme comme ci-dessus, jusqu'à ce que tous les termes du dividende soient épuisés.*

En observant qu'un produit a le même signe que le multiplicande, lorsque le multiplicateur a le signe +, et qu'il a, dans le cas contraire, le signe — (31), on en con-

clut *que lorsque le dividende partiel et le premier terme du diviseur ont le même signe, le quotient doit avoir le signe* +; *et s'ils ont des signes contraires, le quotient doit avoir le signe* — : c'est la règle des signes.

Les divisions partielles s'effectuent par les règles données pour les quantités monomes.

On divise le coefficient du dividende par celui du diviseur : c'est la règle des coefficiens.

On écrit [illegible] *et les lettres communes au dividende et au diviseur, avec un exposant égal à la différence de ceux dont elles sont affectées dans ces deux termes, et enfin les lettres qui ne sont qu'au dividende* : ce sont là les règles des lettres et des exposans.

43. Pour appliquer ces règles aux quantités

$$5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5,$$
$$5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2,$$

qui m'ont servi d'exemple, plus haut, on les dispose comme s'il s'agissait d'effectuer la division arithmétique.

Dividende.	*Diviseur.*
$5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$	$5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$
$-5a^7 + 2a^6b - 4a^5b^2$	*Quotient.*
	$a^3 - 4a^2b + 2b^3$

Reste $-20a^6b + 8a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$
$+20a^6b - 8a^5b^2 + 16a^4b^3$

Reste $+10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$
$-10a^4b^3 + 4a^3b^4 - 8a^2b^5$

Reste 0.

Le signe du premier terme $5a^7$ du dividende étant le même que celui de $5a^4$, premier terme du diviseur, on

devrait mettre + au quotient; mais comme il s'agit du premier terme, on omet ce signe.

En divisant $5a^7$ par $5a^4$, on a pour quotient a^3, que l'on écrit sous le diviseur.

Multipliant successivement les trois termes du diviseur par le premier terme a^3 du quotient, et écrivant les produits sous les termes correspondans du dividende, après avoir changé les signes de ces produits pour les retrancher (20), on forme la quantité

$$-5a^7 + 2a^5 b - 4a^4 b^2,$$

dont on fait la réduction avec le dividende; et on obtient pour reste

$$-20a^6 b + 8a^5 b^2 - 6a^4 b^3 - 4a^3 b^4 + 8a^2 b^5.$$

En continuant la division sur ce reste, le premier terme $-20a^6 b$, divisé par $5a^4$, donne pour quotient $-4a^2 b$, ce quotient ayant le signe —, à cause que le dividende et le diviseur sont de signes différens. En le multipliant par tous les termes du diviseur, et changeant les signes, on forme la quantité

$$+20a^6 b - 8a^5 b^2 + 16a^4 b^3,$$

dont on fait la réduction avec le dividende, et on obtient pour reste

$$+10a^4 b^3 - 4a^3 b^4 + 8a^2 b^5.$$

Divisant le premier terme de ce nouveau dividende partiel, $10a^4 b^3$, par le premier terme $5a^4$ du diviseur; multipliant par le résultat $+2b^3$, tout le diviseur; écrivant les produits sous le dividende partiel, en observant de changer leur signe, et faisant la réduction, il ne reste rien, ce qui montre que $+2b^3$ est le dernier terme du quotient cherché, lequel a par conséquent pour expression $a^3 - 4a^2 b + 2b^3$.

44. Il est à propos de remarquer que dans la division, les multiplications des différens termes du quotient par

le diviseur, produisent souvent des termes qui ne se trouvent pas dans le dividende, et qu'il faut diviser ensuite par le premier terme du diviseur. Ces termes sont ceux qui se sont détruits lorsqu'on a formé le dividende par la multiplication de ses deux facteurs, le quotient et le diviseur. Voici un exemple remarquable de ces réductions :

Soit $a^3 - b^3$ à diviser par $a - b$:

Division.

$$\begin{array}{r|l} a^3 - b^3 & a - b \\ -a^3 + a^2 b & a^2 + ab + b^2 \\ \hline + a^2 b - b^3 & \\ - a^2 b + ab^2 & \\ \hline + ab^2 - b^3 & \\ - ab^2 + b^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Multiplication.

$$\begin{array}{r} a - b \\ a^2 + ab + b^2 \\ \hline a^3 - a^2 b \\ + a^2 b - ab^2 \\ + ab^2 - b^3 \\ \hline \text{résultat } a^3 - b^3. \end{array}$$

Le premier terme a^3 du dividende, divisé par le premier terme a du diviseur, donne pour quotient a^2; en multipliant ce quotient par le diviseur, et changeant les signes des produits, on trouve $-a^3 + a^2 b$: le terme $-a^3$ détruit le premier terme du dividende; mais il reste le terme $a^2 b$, qui ne se trouvait pas d'abord dans le dividende. Puisqu'il contient la lettre a, on peut le diviser par le premier terme du diviseur, et on obtient $+ ab$. Multipliant ce quotient par le diviseur, et changeant les signes des produits, il vient $-a^2 b + ab^2$: le terme $-a^2 b$ détruit le précédent; mais il reste le terme $+ ab^2$, qui n'était pas non plus dans le dividende. Qu'on le divise par a, on aura pour quotient $+ b^2$; multipliant ce quotient partiel par le diviseur, on aura, en changeant les signes, $-ab^2 + b^3$: le premier terme $-ab^2$ détruira le

précédent, et le second $+b^3$ détruira le dernier terme $-b^3$ qui restait du dividende.

Pour bien comprendre le mécanisme de la division, il suffit de jeter les yeux sur la multiplication du quotient a^2+ab+b^2 par le diviseur $a-b$, placée à côté de la division précédente ; on verra que tous les termes reproduits dans les divisions partielles sont ceux qui se détruisent dans le résultat de la multiplication.

45. Il arrive quelquefois que la quantité par rapport à laquelle on ordonne, se trouve à la même puissance dans plusieurs termes, soit du dividende, soit du diviseur. Dans ce cas, il faut ranger dans une même colonne, ou bien écrire immédiatement à la suite les uns des autres, ces termes, en observant de les ordonner entre eux par rapport à une autre lettre.

Soit $-a^4b^2+b^2c^4-a^2c^4-a^6+2a^4c^2+b^6+2b^4c^2+a^2b^4$ à diviser par $a^2-b^2-c^2$.

En ordonnant la première de ces quantités par rapport à la lettre a, on placera dans une même colonne les termes $-a^4b^2$ et $+2a^4c^2$, dans une autre les termes $+a^2b^4$ et $-c^2c^4$; enfin dans une dernière colonne les trois termes $+b^6$, $+2b^4c^2$, $+b^2c^4$, en les ordonnant par rapport à la lettre b, comme on le voit à la page suivante.

Le premier terme $-a^6$ du dividende étant divisé par le premier terme a^2 du diviseur, donne $-a^4$ pour le premier terme du quotient; formant ensuite les produits de ce quotient par tous les termes du diviseur, changeant les signes de ces produits pour les retrancher du dividende, en plaçant dans une même colonne les termes affectés de la même puissance de a, il vient, après la réduction des termes semblables, le 1er reste, qu'on prendra pour second dividende partiel.

Le premier terme $-2a^4b^2$ de ce nouveau dividende étant divisé par a^2, donne pour le second terme du quotient, $-2a^2b^2$; formant ensuite les produits de ce quo-

tient par tous les termes du diviseur, changeant les signes de ces produits pour les retrancher du dividende partiel, en plaçant dans une même colonne les termes affectés de la même puissance de a, il vient, après la réduction des termes semblables, le 2e reste, qu'on prendra pour un troisième dividende partiel.

L'opération se continuant de la même manière sur le 2e reste et sur les suivans, on trouvera encore trois termes au quotient. Le dernier étant multiplié par tous les termes du diviseur, donne des produits qui, retranchés du 4e reste, le détruisent en entier; la division se fait donc exactement, et par conséquent le diviseur est facteur du dividende.

$$
\begin{array}{l|l}
-a^6 - a^4b^2 + a^2b^4 + b^6 & a^2 - b^2 - c^2 \\
\quad + 2a^4c^2 - a^2c^4 + 2b^4c^2 & \overline{-a^4 - 2a^2b^2 - b^4} \\
\quad\quad + b^2c^4 & \quad + a^2c^2 - b^2c^2 \\
+a^6 - a^4b^2 & \\
\quad -a^4c^2 & \\
\hline
1^{er}\text{ reste} -2a^4b^2 + a^2b^4 + b^6 & \\
\quad + a^4c^2 - a^2c^4 + 2b^4c^2 & \\
\quad\quad + b^2c^4 & \\
\quad +2a^4b^2 - 2a^2b^4 & \\
\quad\quad -2a^2b^2c^2 & \\
\hline
2^e\text{ reste} +a^4c^2 - a^2b^4 + b^6 & \\
\quad -2a^2b^2c^2 + 2b^4c^2 & \\
\quad - a^2c^4 + b^2c^4 & \\
-a^4c^2 + a^2b^2c^2 & \\
\quad + a^2c^4 & \\
\hline
3^e\text{ reste} \quad -a^2b^4 + b^6 & \\
\quad -a^2b^2c^2 + 2b^4c^2 & \\
\quad\quad + b^2c^4 & \\
\quad +a^2b^4 - b^6 & \\
\quad\quad - b^4c^2 & \\
\hline
4^e\text{ reste} \quad -a^2b^2c^2 + b^4c^2 & \\
\quad\quad +b^2c^4 & \\
\quad +a^2b^2c^2 - b^4c^2 & \\
\quad\quad -b^2c^4 & \\
\hline
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

46. On facilite quelquefois la division en décomposant à vue une quantité dans ses facteurs. Si l'on avait, par exemple, $8a^6 - 4a^3b^2 + 4a^3 + 2a^3 - b^2 + 1$ à diviser par $2a^3 - b^2 + 1$, ce diviseur formant les trois derniers termes du dividende, il suffirait de chercher s'il est facteur des trois premiers; mais ceux-ci ont visiblement pour facteur commun $4a^3$, car $8a^6 - 4a^3b^2 + 4a^3 = 4a^3(2a^3 - b^2 + 1)$. Par cette observation, le dividende deviendrait

$$4a^3(2a^3 - b^2 + 1) + 2a^3 - b^2 + 1,$$

ou

$$(2a^3 - b^2 + 1)(4a^3 + 1):$$

la division s'effectuerait donc sur-le-champ, en supprimant le facteur $2a^3 - b^2 + 1$ égal au diviseur, et le quotient serait $4a^3 + 1$.

L'habitude du calcul algébrique suggère une foule de remarques de ce genre, par lesquelles on abrège les opérations, et l'on parvient aisément à reconnaître les décompositions en facteurs. On rend souvent ces décompositions très évidentes, lorsqu'au lieu d'effectuer les multiplications qui se présentent, on ne fait que les indiquer.

Des fractions algébriques.

47. Lorsqu'on applique le procédé de la division algébrique à deux quantités dont l'une n'est pas facteur de l'autre, on reconnaît l'impossibilité de l'effectuer, parce qu'on parvient, dans la suite des opérations, à un reste dont le premier terme ne peut être divisé par celui du diviseur. En voici un exemple :

$$\begin{array}{r|l} a^3 + a^2b + 2b^3 & a^2 + b^2 \\ -a^3 - ab^2 & \overline{a + b} \\ \hline \text{1er reste} \quad a^2b - ab^2 + 2b^3 & \\ -a^2b - b^3 & \\ \hline \text{2e reste} \quad -ab^2 + b^3. & \end{array}$$

Le premier terme $-ab^2$ du second reste, ne peut se diviser par a^2, premier terme du diviseur; ainsi la di-

vision s'arrête à ce point. On pourrait, comme en Arithmétique, joindre au quotient $a+b$, la fraction $\frac{-ab^2+b^3}{a^2+b^2}$, ayant pour numérateur le reste, et pour dénominateur le diviseur; et le quotient serait

$$a+b+\frac{b^3-ab^2}{a^2+b^2}.$$

On voit aisément que la *division doit s'arrêter quand on parvient à un reste dont le premier terme ne contient la lettre par rapport à laquelle on a ordonné, qu'à une puissance inférieure à celle de la même lettre dans le premier terme du diviseur.*

48. Lorsque la division algébrique de deux quantités ne peut s'effectuer, l'expression du quotient reste indiquée sous une forme fractionnaire, en prenant le dividende pour le numérateur et le diviseur pour le dénominateur; et pour l'amener au plus haut degré de simplicité possible, il faut chercher si le dividende et le diviseur n'ont pas des facteurs communs, pour les supprimer (38). Mais quand il s'agit de polynomes, les facteurs communs ne se découvrent pas avec la même facilité que dans les monomes; on ne les trouve en général qu'en cherchant, par une méthode analogue à celle qu'on a donnée en Arithmétique pour les nombres, le *plus grand commun diviseur* des deux quantités proposées.

On ne saurait assigner les grandeurs relatives des expressions algébriques, tant qu'on ne donne point des valeurs aux lettres qu'elles renferment; la dénomination de *plus grand commun diviseur*, appliquée à ces expressions, ne doit donc pas être prise tout-à-fait dans le même sens qu'en Arithmétique.

En Algèbre, il faut entendre par le *plus grand commun diviseur* de deux expressions, celui de leurs diviseurs communs qui renferme le plus de facteurs dans tous ses termes, ou qui est du degré le plus élevé (27). Sa dé-

termination repose, comme en Arithmétique, sur ce principe : *Tout diviseur commun à deux quantités, doit diviser le reste de leur division.*

La démonstration qu'on en a donnée dans le n° 61 de l'Arithmétique, devient plus facile à saisir lorsqu'on y emploie les symboles algébriques. En effet, soient A et B les deux quantités proposées, D leur diviseur commun, Q le quotient de la division de A par B et R le reste, on aura

$$A = BQ + R;$$

puis divisant les deux membres de cette équation par le diviseur commun D, il viendra

$$\frac{A}{D} = \frac{BQ}{D} + \frac{R}{D},$$

et si l'on fait $\frac{A}{D} = a$, $\frac{B}{D} = b$, quotiens exacts par l'hypothèse, on changera l'équation ci-dessus en

$$a = bQ + \frac{R}{D}, \quad \text{d'où} \quad a - bQ = \frac{R}{D},$$

en passant le terme bQ dans le premier membre. Or, puisque le premier membre, qui dans ce cas doit être composé des mêmes termes que le second, est maintenant un entier, il faut que R soit divisible par D.

Réciproquement, tout diviseur commun aux quantités B et R doit diviser A; car si l'on fait $\frac{B}{D} = b$, $\frac{R}{D} = r$, l'équation $\frac{A}{D} = \frac{BQ}{D} + \frac{R}{D}$ devenant

$$\frac{A}{D} = bQ + r,$$

il s'ensuit que A est nécessairement divisible par D, quand b et r sont des entiers.

D'après ces principes, *on commencera*, comme en Arithmétique, *par chercher si l'une des quantités n'est pas elle-même diviseur de l'autre ; si la division ne se fait pas exactement, on divisera le premier diviseur par le reste*,

et ainsi de suite ; et celui des restes qui divisera exactement le précédent, sera le plus grand commun diviseur des deux quantités proposées : mais il sera nécessaire d'apporter dans les divisions indiquées, des attentions qui tiennent à la nature des quantités algébriques.

On ne doit d'abord chercher le diviseur commun de deux expressions algébriques, que lorsqu'elles ont des lettres communes ; il faut en choisir une, par rapport à laquelle on ordonnera les expressions proposées, et on prendra pour dividende celle où cette lettre aura le plus haut exposant : l'autre sera le diviseur.

Soient les deux quantités

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3,$$
$$4a^2b - 5ab^2 + b^3,$$

qui sont déjà ordonnées par rapport à la lettre a ; on prendra la première pour dividende, et la seconde pour diviseur. Il se présente, dès le commencement de l'opération, une difficulté qu'on ne rencontre point dans les nombres, c'est que le premier terme du diviseur ne peut diviser exactement celui du dividende, à cause des facteurs 4 et b de l'un, qui ne sont pas dans l'autre. Mais la lettre b étant commune à tous les termes du diviseur, sans l'être à tous ceux du dividende, il s'ensuit (40) que b est facteur du diviseur et ne l'est point du dividende ; or tout diviseur commun à deux quantités ne peut se composer que des facteurs qui sont communs à l'une et à l'autre ; donc, s'il existe un tel diviseur entre les deux quantités proposées, il ne peut se trouver que parmi les facteurs de la quantité $4a^2 - 5ab + b^2$ qui reste quand on a supprimé b, de la quantité $4a^2b - 5ab^2 + b^3$: ainsi la question se réduit à chercher le plus grand commun diviseur des deux quantités

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3,$$
$$4a^2 - 5ab + b^2.$$

Par la même raison qu'on a pu supprimer dans l'une

des quantités proposées, le facteur b qui n'entrait pas dans l'autre, on peut aussi introduire dans celle-ci un nouveau facteur, pourvu qu'il ne soit point facteur de la première. Par cette opération, le plus grand commun diviseur de ces quantités, qui n'est formé que des facteurs communs à toutes deux, ne sera point altéré. Je profiterai de cette remarque pour multiplier la quantité $3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3$ par 4, qui n'est point facteur de la quantité $4a^2 - 5ab + b^2$, afin de rendre possible la division du premier terme de l'une par le premier terme de l'autre.

J'aurai de cette manière pour dividende la quantité

$$12a^3 - 12a^2b + 4ab^2 - 4b^3,$$

pour diviseur la quantité

$$4a^2 - 5ab + b^2,$$

et le quotient partiel sera $3a$.

Multipliant le diviseur par ce quotient, et retranchant le produit du dividende, il viendra pour reste

$$3a^2b + ab^2 - 4b^3,$$

quantité qui, d'après le principe posé au commencement de cet article, doit encore avoir avec $4a^2 - 5ab + b^2$, le même plus grand commun diviseur que la première.

Profitant des remarques faites plus haut, je supprime le facteur b, commun à tous les termes du reste ci-dessus, et je le multiplie par 4, afin de rendre possible la division de son premier terme par celui du diviseur. J'ai alors pour dividende la quantité

$$12a^2 + 4ab - 16b^2,$$

et pour diviseur la quantité

$$4a^2 - 5ab + b^2;$$

le quotient partiel est 3.

Multipliant le diviseur par le quotient, et retranchant le produit du dividende, on a pour reste

$$19ab - 19b^2,$$

et la question est réduite à chercher le plus grand com-

mun diviseur entre cette quantité et

$$4a^2 - 5ab + b^2.$$

Mais la lettre a, par rapport à laquelle se fait la division, n'étant plus dans le reste qu'au premier degré, tandis qu'elle est au second dans le diviseur, c'est celui-ci qu'il faut prendre pour dividende, et on doit faire du reste le diviseur.

Avant de commencer cette nouvelle division, je supprime du diviseur $19ab - 19b^2$ le facteur $19b$, commun à tous ses termes, et qui n'est point facteur du dividende; j'ai donc pour dividende la quantité

$$4a^2 - 5ab + b^2,$$

et pour diviseur

$$a - b.$$

La division s'opère exactement; ainsi, $a - b$ est le plus grand commun diviseur demandé.

En remontant depuis la dernière division jusqu'à la première, on prouverait aussi *à posteriori*, que la quantité $a-b$ doit diviser exactement les deux quantités proposées, et qu'elle doit être la plus composée de celles qui peuvent le faire; et en divisant par $a - b$ les deux quantités proposées,

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3, \qquad 4a^2b - 5ab^2 + b^3,$$

on les décompose ainsi qu'il suit :

$$(3a^2 + b^2)(a - b), \qquad (4ab - b^2)(a - b).$$

49. Lorsque la quantité qu'on prend pour diviseur contient plusieurs termes où la lettre par rapport à laquelle on a ordonné, se trouve au même degré, il y a une attention à avoir, sans laquelle l'opération ne saurait se terminer. En voici un exemple.

Soient les quantités

$$a^2b + ac^2 - d^3, \qquad ab - ac + d^2;$$

si l'on prépare l'opération comme pour une division ordinaire,

$$\begin{array}{r|l} a^2b + ac^2 - d^3 & ab - ac + d^2 \\ -a^2b + a^2c - ad^2 & \hline & a \end{array}$$

reste $a^2c + ac^2 - ad^2 - d^3$,

en divisant d'abord a^2b par ab, on trouve pour quotient a; multipliant le diviseur par ce quotient, et retranchant les produits, du dividende, le reste contiendra un nouveau terme, où a sera au second degré, savoir, a^2c provenant du produit de $-ac$ par a. L'opération n'aura fait de cette manière aucun progrès; car en prenant le reste $a^2c + ac^2 - ad^2 - d^3$ pour dividende, et le multipliant par b, pour rendre possible la division par ab, on aura

$$\begin{array}{r|l} a^2bc + abc^2 - abd^2 - bd^3 & ab - ac + d^2 \\ -a^2bc + a^2c^2 - acd^2 & \hline & ac \end{array}$$

reste $a^2c^2 + abc^2 - ad^3 - abd^2 - bd^3$,

et le terme $-ac$ reproduira encore un terme a^2c^2, où a sera au 2e degré.

Pour éviter cet inconvénient, il faut observer que le diviseur $ab - ac + d^2 = a(b - c) + d^2$, en réunissant les termes $ab - ac$ en un seul; et faisant, pour abréger les calculs, $b - c = m$, on aura pour diviseur $am + d^2$; mais alors il faudra multiplier tout le dividende $a^2b + ac^2 - d^3$ par le facteur m, afin d'avoir un nouveau dividende dont le premier terme soit divisible par la quantité am formant le premier terme du diviseur: l'opération deviendra

$$\begin{array}{r|l} a^2bm + ac^2m - d^3m & am + d^2 \\ -a^2bm - abd^2 & \hline & ab + c^2 \end{array}$$

1er reste $-abd^2 + ac^2m - d^3m$
$-ac^2m - c^2d^2$

2e reste $-abd^2 - c^2d^2 - d^3m$.

Cette fois, les termes affectés de a^2 sont ôtés du divi-

dende, et il n'y reste plus que les termes affectés de la première puissance de a. Pour les faire disparaître, on divisera d'abord le terme ac^2m par am, et il viendra pour quotient c^2; multipliant le diviseur par le quotient, et retranchant les produits, du dividende, on aura le 2e reste; prenant ce 2e reste pour un nouveau dividende, on y supprimera le facteur d^2, qui n'est point dans le diviseur; il viendra

$$-ab-c^2-dm,$$

qu'on multipliera de nouveau par m, et on aura

$$\begin{array}{l|l} -abm-c^2m-dm^2 & am+d^2 \\ \hline +abm+bd^2 & -b \\ \hline \text{reste } +bd^2-c^2m-dm^2 & \end{array}$$

Le reste $bd^2-c^2m-dm^2$ de cette dernière division ne contenant plus a, il s'ensuit que s'il existe entre les deux quantités proposées un commun diviseur, il est indépendant de la lettre a.

Parvenu à ce point, on ne peut plus continuer la division par rapport à la lettre a; mais on observera que s'il existe un commun diviseur indépendant de a entre les quantités $bd^2-c^2m-dm^2$ et $am+d^2$, il faut qu'il divise séparément les deux parties am et d^2 du diviseur; car en général, si une quantité est ordonnée par rapport aux puissances de la lettre a, tout diviseur de cette quantité, indépendant de a, doit diviser séparément les quantités qui multiplient les diverses puissances de cette lettre.

Pour s'en convaincre, il suffit de faire attention que, dans ce cas, chacune des quantités proposées doit être le produit d'une quantité dépendante de a, et du diviseur commun qui n'en dépend point. Or, si l'on a, par exemple, l'expression

$$Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E,$$

dans laquelle les lettres A, B, C, D, E, désignent des

quantités quelconques indépendantes de a, et qu'on la multiplie par une quantité M aussi indépendante de a, le produit

$$MAa^4+MBa^3+MCa^2+MDa+ME,$$

ordonné par rapport à a, contiendra encore les mêmes puissances de a qu'auparavant; mais le coefficient de chacune de ces puissances sera un multiple de M.

Cela posé, si l'on remet pour m la quantité $b-c$ que cette lettre représente, on aura les quantités

$$bd^2-c^2(b-c)-d(b-c)^2,$$
$$a(b-c)+d^2;$$

or il est visible que $b-c$ et d^2 n'ont aucun facteur commun: donc les deux quantités proposées n'ont point de diviseur commun.

Si l'on n'avait pu reconnaître à la seule inspection qu'il n'existait pas de diviseur commun entre $b-c$ et d^2, il aurait fallu chercher leur plus grand commun diviseur, en les ordonnant par rapport à une même lettre, et s'assurer ensuite s'il pouvait diviser aussi la quantité

$$bd^2-c^2(b-c)-d(b-c)^2.$$

50. Au lieu de remettre à la fin de l'opération à découvrir le plus grand commun diviseur, indépendant de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné les deux quantités, il est plus commode de le chercher d'abord, parce que le plus souvent les restes de chaque opération partielle se compliquent à mesure qu'on avance, et le calcul devient de plus en plus pénible.

Soient, par exemple, les quantités

$$a^4b^2+a^3b^3+b^4c^2-a^4c^2-a^3bc^2-b^2c^4,$$
$$a^2b+ab^2+b^3-a^2c-abc-b^2c;$$

après les avoir ordonnées par rapport à la lettre a, ce qui donnera

$$(b^2-c^2)a^4+(b^3-bc^2)a^3+b^4c^2-b^2c^4,$$
$$(b-c)a^2+(b^2-bc)a+b^3-b^2c,$$

j'observe d'abord, que si elles ont un diviseur commun qui soit indépendant de a, il faut qu'il divise en particulier chacune des quantités qui multiplient les diverses puissances de a (49), ainsi que les quantités $b^4c^2 - b^2c^4$ et $b^3 - b^2c$, qui ne renferment point cette lettre.

La question est donc ramenée à trouver les diviseurs communs aux deux quantités $b^2 - c^2$ et $b - c$, et à vérifier ensuite si, parmi ces diviseurs, il s'en trouve qui puissent diviser en même temps

$$b^3 - bc^2 \text{ et } b^2 - bc, \qquad b^4c^2 - b^2c^4 \text{ et } b^3 - b^2c.$$

En divisant $b^2 - c^2$ par $b - c$, on trouve un quotient exact $b + c$; $b - c$ est donc diviseur commun des quantités $b^2 - c^2$ et $b - c$, qui visiblement n'en peuvent avoir d'autres, puisque la quantité $b - c$ n'est divisible que par elle-même et par l'unité. Il faut donc s'assurer si $b - c$ divise les autres quantités rapportées ci-dessus, ou bien s'il divise en même temps les deux quantités proposées; c'est ce qui arrive en effet, et il vient

$$(b+c)\,a^4 + (b^2 + bc)\,a^3 + b^3c^2 + b^2c^3,$$
$$a^2 + ba + b^2.$$

Pour amener ces dernières expressions au plus haut degré de simplicité possible, il convient d'essayer si la première n'est pas divisible par $b + c$; cette division étant effectuée, réussit, et l'on n'a plus qu'à chercher le plus grand commun diviseur des quantités fort simples

$$a^4 + ba^3 + b^2c^2,$$
$$a^2 + ba + b^2.$$

En opérant sur celles-ci, comme le prescrit la règle, on parvient, après la seconde division, à un reste contenant la lettre a à la première puissance seulement; et comme ce reste n'est pas diviseur commun, on en conclut que la lettre a ne fait point partie du plus grand commun divi-

seur cherché, qui n'est composé par conséquent que du seul facteur $b - c$.

Si, outre ce diviseur, on en eût trouvé un autre dans lequel fût entrée la quantité a, il aurait fallu multiplier ces deux diviseurs l'un par l'autre pour obtenir le plus grand commun diviseur cherché.

Ces remarques suffiront, dès qu'on aura acquis un peu d'habitude dans l'analyse, pour parvenir, dans tous les cas, au plus grand commun diviseur; et on trouvera sans peine que les quantités

$$6a^5 + 15a^4b - 4a^3c^2 - 10a^2bc^2,$$
$$9a^3b - 27a^2bc - 6ab^2c^2 + 18bc^3,$$

ont pour plus grand commun diviseur la quantité $3a^2 - 2c^2$.

51. Les quatre *opérations fondamentales*, c'est-à-dire l'addition, la soustraction, la multiplication et la division, s'effectuent sur les fractions algébriques comme sur les fractions arithmétiques, en observant seulement de suivre, dans les opérations prescrites par les règles de l'Arithmétique, les procédés indiqués ci-dessus à l'égard des quantités algébriques. Je me bornerai donc à rappeler ici ces règles, en donnant un exemple de l'application de chacune.

La somme des fractions

$$\frac{a}{d}, \quad \frac{b}{d}, \quad \frac{c}{d},$$

qui ont le même dénominateur, ou

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{d} \text{ (\textit{Arithm.} 65)}.$$

La différence des fractions

$$\frac{a}{d} \text{ et } \frac{b}{d},$$

qui ont le même dénominateur, ou

$$\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}.$$

L'entier a joint à la fraction $\frac{b}{c}$, ou l'expression

$$a+\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}\ (\textit{Arithm.}\ 67).$$

De même l'expression

$$a-\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}.$$

Réciproquement

l'expression $\frac{ac+b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=a+\frac{b}{c}$,

l'expression $\frac{ac-b}{c}=\frac{ac}{c}-\frac{b}{c}=a-\frac{b}{c}$ (*Arith.* 66).

52. Les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, étant réduites au même dénominateur, deviennent respectivement

$$\frac{ad}{bd},\quad\frac{bc}{bd}\ (\textit{Arithm.}\ 68).$$

Quand les fractions proposées sont égales, on trouve $ad=bc$; divisant alors les deux membres par cd et en nommant q le quotient, il vient

$$\frac{ad}{cd}=\frac{a}{c}=q,\ \frac{bc}{cd}=\frac{b}{d}=q,\ \text{d'où}\ a=cq,\ b=dq;$$

ainsi, les deux termes de l'une des fractions ne sont que ceux de l'autre multipliés par un facteur commun.

Les fractions

$$\frac{a}{b},\quad\frac{c}{d},\quad\frac{e}{f},\quad\frac{g}{h},$$

par la même réduction, deviennent respectivement

$$\frac{adfh}{bdfh},\quad \frac{cbfh}{bdfh},\quad \frac{ebdh}{bdfh},\quad \frac{gbdf}{bdfh}$$ (*Arithm.* 69).

J'ai donné dans le numéro 69 de l'Arithmétique, un procédé pour parvenir dans certains cas à un dénominateur plus simple que celui qui résulte de la règle générale; les symboles algébriques en facilitent beaucoup l'application, ainsi qu'on va le voir.

Par exemple, si l'on a les deux fractions $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$, il est facile de voir que les deux dénominateurs seraient les mêmes, si f était facteur du premier, et c facteur du second: on multipliera donc les deux termes de la première fraction par f, et les deux termes de la seconde par c, ce qui donnera les fractions $\frac{af}{bcf}$ et $\frac{cd}{bcf}$, plus simples que $\frac{abf}{bbcf}$ et $\frac{bcd}{bbcf}$, qu'on aurait en multipliant par les dénominateurs primitifs.

En général, *on rassemble en un seul produit, pour en composer le dénominateur commun, tous les facteurs différens élevés à la plus haute des puissances où ils se trouvent dans les dénominateurs des fractions proposées; et il ne reste plus qu'à multiplier le numérateur de chaque fraction par les facteurs de ce produit, qui manquent dans le dénominateur de la fraction.*

Ayant, par exemple, les fractions $\frac{a}{b^2c}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{e}{cg}$, je forme le produit b^2cfg; je multiplie le numérateur de la première fraction par fg, celui de la seconde par bcg, celui de la troisième par b^2f, et j'obtiens

$$\frac{afg}{b^2cfg},\quad \frac{bcdg}{b^2cfg},\quad \frac{b^2ef}{b^2cfg}.$$

53. Pour la multiplication, on a

$$\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}\ (\textit{Arithm.}\ 53),$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\ (\textit{Arithm.}\ 76).$$

Pour la division,

$\frac{a}{b}$ à diviser par c, donne $\frac{a}{bc}$ ou $\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}$ (*Arithm.* 54, 76);

$\frac{a}{b}$ à diviser par $\frac{c}{d}$, donne $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ (*Arithm.* 79).

Les termes des fractions précédentes étaient monomes; mais si on avait des fractions dont les termes fussent des polynomes, il n'y aurait qu'à effectuer par les règles données pour les quantités complexes, les opérations indiquées sur les monomes : c'est ainsi que l'on a

$$\frac{a^2+b^2}{c+d}\times\frac{a-b}{c-d}=\frac{(a^2+b^2)\ (a-b)}{(c+d)\ (c-d)}$$
$$=\frac{a^3+ab^2-a^2b-b^3}{c^2-d^2}.$$

Le quotient de la fraction

$$\frac{a^2+b^2}{c+d}\text{ divisée par }\frac{a-b}{c-d}$$

est
$$\frac{a^2+b^2}{c+d}\times\frac{c-d}{a-b}=\frac{(a^2+b^2)\ (c-d)}{(c+d)\ (a-b)}$$
$$=\frac{a^2c+b^2c-a^2d-b^2d}{ac+ad-bc-bd};$$

et ainsi des autres opérations.

54. Lorsqu'on possède bien tout ce qui précède, on peut résoudre une équation du premier degré, quelque compliquée qu'elle soit.

Si l'on avait, par exemple, l'équation

$$\frac{(a+b)(x-c)}{a-b}+4b=2x-\frac{ac}{3a+b},$$

on commencerait par faire disparaître les dénominateurs, en indiquant seulement les opérations; il viendrait alors

$$(a+b)(x-c)(3a+b)+4b(a-b)(3a+b)$$
$$=2x(a-b)(3a+b)-ac(a-b);$$

puis effectuant les multiplications, on trouverait

$$3a^2x+4abx+b^2x-3a^2c-4abc-b^2c$$
$$+12a^2b-8ab^2-4b^3=$$
$$6a^2x-4abx-2b^2x-a^2c+abc:$$

transposant dans un seul membre tous les termes affectés de x, on obtiendrait

$$-3a^2x+8abx+3b^2x$$
$$=2a^2c+5abc+b^2c-12a^2b+8ab^2+4b^3,$$

d'où l'on conclurait enfin

$$x=\frac{2a^2c+5abc+b^2c-12a^2b+8ab^2+4b^3}{-3a^2+8ab+3b^2}.$$

Des questions à deux inconnues, et des quantités négatives.

55. Dans les questions résolues précédemment, on n'a fait entrer qu'une seule inconnue, au moyen de laquelle on a exprimé, avec les quantités connues, toutes les conditions de la question. Il est souvent plus commode pour quelques-unes de ces questions, d'employer deux inconnues; mais alors il faut qu'il y ait, explicitement ou implicitement, deux conditions pour former deux équations, sans quoi, on ne pourrait déterminer en même temps les deux inconnues.

La question du numéro 3, surtout comme elle est énoncée dans le numéro 4, se présente naturellement

avec deux inconnues; savoir, l'un et l'autre des nombres cherchés. En effet, si l'on désigne

le plus petit par x,
le plus grand par y,
leur somme par a,
leur différence par b,

on aura, par l'énoncé de la question,

$$x+y=a,$$
$$y-x=b.$$

Chacune de ces deux équations, considérée seule, ne peut déterminer absolument l'une des inconnues. Si de la seconde, par exemple, on tire la valeur de y, elle donnera

$$y=b+x,$$

valeur qui semble d'abord ne rien apprendre sur ce qu'on cherche, puisqu'elle contient la quantité x, qui n'est pas donnée; mais si, à la place de l'inconnue y qu'elle représente, on la met dans la première équation, cette équation, ne renfermant plus alors que la seule inconnue x, en donnera la valeur par les procédés déjà enseignés.

On aura en effet, par cette substitution,

$$x+b+x=a,$$

ou

$$2x+b=a,$$

ou enfin

$$x=\frac{a-b}{2};$$

et mettant cette valeur de x dans celle de y, qui est $b+x$, on obtiendra

$$y=b+x=b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}:$$

on aura donc, pour les deux nombres inconnus, les mêmes expressions que dans le numéro 3.

Il est facile de voir, en effet, que la solution ci-dessus ne diffère point, quant au fond, de celle du n° 3;

seulement j'ai posé et résolu la seconde équation $y - x = b$, que je m'étais contenté d'énoncer en langage ordinaire dans le numéro cité, et dont j'avais conclu, sans calcul algébrique, que le plus grand nombre était $x + b$.

56. Soit encore cette question :

Un ouvrier travaillant chez un particulier pendant 12 *jours, et ayant eu avec lui, pendant les* 7 *premiers jours, sa femme et son fils, a reçu* 74 *francs; il a travaillé ensuite chez le même particulier* 8 *autres jours, sur* 5 *desquels il a eu avec lui sa femme et son fils, et il a reçu pour ce temps* 50 *francs. On demande combien il gagnait par jour pour sa part, et combien gagnaient ensemble dans le même temps, sa femme et son fils.*

Soit x le gain journalier du mari,
y celui de la femme et du fils;

12 jours d'ouvrage du mari produiront $12x$,
7 de la femme et du fils vaudront $7y$;
on aura donc, par la première circonstance du problème,

$$12x + 7y = 74 :$$

8 jours d'ouvrage du mari produiront $8x$,
5 jours de la femme et du fils vaudront $5y$;
on aura donc, par la seconde circonstance du problème,

$$8x + 5y = 50.$$

En raisonnant ici de même que dans la question précédente, on prendra la valeur de y dans la première équation, et on aura

$$y = \frac{74 - 12x}{7};$$

on mettra cette valeur dans la seconde, en la multipliant par 5, puisqu'il y a $5y$, et il viendra

$$8x+\frac{370-60x}{7}=50,$$

équation qui ne renferme plus que la seule inconnue x.

En la résolvant, on aura successivement

$$56x+370-60x=350,$$
$$370-4x=350;$$

passant $-4x$ dans le second membre, et 350 dans le premier, on obtiendra

$$370-350=4x$$
$$20=4x$$
$$\frac{20}{4}=x$$
$$5=x.$$

Connaissant x, qu'on vient de trouver égal à 5, si on met cette valeur dans la formule

$$y=\frac{74-12x}{7},$$

le second membre deviendra connu, et l'on aura

$$y=\frac{74-12\times5}{7}=\frac{74-60}{7}=\frac{14}{7}=2;$$

ainsi $y=2$.

L'homme gagnait donc 5 francs par jour, tandis que la femme et le fils n'en gagnaient que 2.

57. Le lecteur aura peut-être remarqué qu'en résolvant plus haut l'équation $370-4x=350$, j'ai fait passer $4x$ dans le second membre : j'en ai usé ainsi pour éluder une petite difficulté qui aurait eu lieu sans cela, et dont je vais donner l'éclaircissement.

En laissant $4x$ dans le premier membre, et passant 370 dans le second, on aurait

$$-4x=350-370;$$

et réduisant le second membre suivant la règle du n° 19, il en serait résulté

$$-4x=-20.$$

Mais puisqu'on a évité dans le numéro précédent le signe — qui affecte la quantité $4x$, en passant cette quantité dans l'autre membre; que pareillement la quantité $350-370$ est devenue $370-350$ en changeant de membre, et enfin qu'une quantité en passant ainsi d'un membre dans un autre, change de signe (10), il est évident qu'on peut parvenir aux mêmes résultats, en changeant immédiatement le signe des quantités $-4x$, $+350-370$, ce qui donnera

$$4x=-350+370,$$

ou

$$4x=370-350,$$

équation qui est bien la même chose que

$$370-350=4x.$$

On peut même n'opérer le changement de signe que sur le dernier résultat

$$-4x=-20;$$

et il vient alors, comme plus haut,

$$4x=20.$$

Il suit de là qu'*on pourra transposer indifféremment dans un membre ou dans l'autre, toutes les quantités affectées de l'inconnue; on observera seulement de changer en même temps les signes dans les deux membres du dernier résultat, lorsque l'inconnue sera affectée du signe —.*

58. Avant d'entreprendre, par le moyen des lettres, la résolution générale du problème du numéro 56, je vais examiner encore un cas particulier. Je suppose que la première somme reçue par l'ouvrier soit 46 fr., et la se-

conde 30 fr., les autres circonstances demeurant d'ailleurs les mêmes; les équations de la question seront

$$12x+7y=46,$$
$$8x+5y=30.$$

La première donne

$$y=\frac{46-12x}{7};$$

multipliant cette valeur par 5 pour mettre le résultat à la place de $5y$ dans la seconde, on aura

$$8x+\frac{230-60x}{7}=30;$$

faisant disparaître les dénominateurs, on obtiendra

$$56x+230-60x=210,$$
ou $$56x-60x=210-230,$$
ou $$-4x=-20;$$

et changeant les signes des deux membres, d'après la remarque du numéro précédent, on trouvera enfin

$$4x=20,$$
$$x=\tfrac{20}{4}=5.$$

Si l'on substitue, dans l'expression de y, à la place de x sa valeur 5, il viendra

$$y=\frac{46-60}{7},$$

et réduisant le numérateur de la valeur de y, on aura

$$y=\frac{-14}{7}.$$

Maintenant, comment faut-il interpréter le signe — qui affecte la quantité isolée 14? On conçoit bien ce que c'est que l'assemblage de deux quantités séparées par le signe —, lorsque la quantité à soustraire est plus petite que celle dont *on doit la* retrancher; mais de quoi peut-on retrancher une quantité qui n'est jointe à aucune

autre dans le membre où elle se trouve? Pour éclaircir cette espèce de paradoxe, le meilleur moyen qui s'offre, c'est de remonter aux équations mêmes qui expriment les conditions de la question; car tenant de plus près à son énoncé, on y lira mieux les circonstances qui ont amené la difficulté présente.

Je reprends donc l'équation

$$12x+7y=46;$$

je mets à la place de x sa valeur 5, et il vient

$$60+7y=46.$$

La seule inspection de cette équation y fait reconnaître une absurdité. En effet, il n'est pas possible de former le nombre 46 en ajoutant quelque chose au nombre 60, qui seul surpasse déjà 46.

Je prends aussi la seconde équation

$$8x+5y=30,$$

et mettant 5 au lieu de x, je trouve

$$40+5y=30;$$

même absurdité que tout-à-l'heure, puisqu'il faudrait que le nombre 30 pût se former en ajoutant quelque chose au nombre 40.

Or les quantités $12x$ ou 60 dans la première équation, $8x$ ou 40 dans la seconde, expriment ce que gagne l'ouvrier par son seul travail; les quantités $7y$ et $5y$ représentent les gains attribués à sa femme et à son fils; tandis que les nombres 46 et 30 désignent les sommes données pour le salaire commun de ces trois personnes: on doit bien voir à présent en quoi consiste l'absurdité.

D'après l'énoncé, l'ouvrier gagnerait plus à lui seul qu'il ne le fait aidé de sa femme et de son fils; il est donc impossible de considérer l'argent attribué au travail de la femme et du fils comme augmentant le salaire de cet ouvrier.

Mais si, au lieu de prendre l'argent attribué à la femme et au fils comme un gain, on le regardait comme une dépense faite par eux à la charge de l'ouvrier, alors il faudrait retrancher cet argent de celui que l'homme aurait gagné seul, et il n'y aurait plus de contradiction dans les équations, puisqu'elles deviendraient

$$60 - 7y = 46,$$
$$40 - 5y = 30.$$

On tirerait de l'une comme de l'autre,

$$y = 2;$$

et on conclurait de là que si l'ouvrier gagne 5 fr. par jour, sa femme et son fils lui occasionnent une dépense de 2 fr. ce qu'on peut d'ailleurs vérifier ainsi.

Pour 12 jours de travail, il revient à l'ouvrier

$$5^{fr.} \times 12 \text{ ou } 60^{fr.};$$

la dépense de sa femme et de son fils, pendant 7 jours, est de

$$2^{fr.} \times 7 \text{ ou } 14^{fr.}:$$

il lui reste donc 46 fr.

Pour 8 jours de travail, il revient à l'ouvrier

$$5^{fr.} \times 8 \text{ ou } 40^{fr.};$$

la dépense de sa femme et de son fils, pendant 5 jours, est de

$$2^{fr.} \times 5 \text{ ou } 10^{fr.}:$$

il lui reste donc 30 fr.

Il est bien clair à présent qu'à l'énoncé du numéro 56, il faut, pour que le problème proposé soit possible, avec les données précédentes, substituer celui-ci :

Un ouvrier travaillant chez un particulier pendant 12 *jours, ayant eu avec lui, les* 7 *premiers jours, sa femme et son fils, qui lui occasionnaient une dépense, a reçu* 46 *francs; il a travaillé ensuite* 8 *autres jours, sur* 5 *desquels il avait avec lui sa femme et son fils, dont il*

devait encore acquitter la dépense, et il a reçu 30 fr. On demande combien il gagnait par jour, et combien dépensaient, dans le même temps, sa femme et son fils.

En nommant x le gain journalier de l'ouvrier, et y la dépense de sa femme et de son fils, pour le même temps, les équations du problème seront évidemment

$$12x - 7y = 46,$$
$$8x - 5y = 30;$$

et étant résolues comme celles du numéro 56, elles donneront

$$x = 5^{fr}, \quad y = 2^{fr}.$$

59. Dans tous les cas où l'on trouvera pour la valeur de l'inconnue un nombre affecté du signe —, on pourra rectifier l'énoncé de la question d'une manière analogue à la précédente, en examinant avec soin quelle est la quantité qui, d'additive qu'elle était dans le premier énoncé, doit devenir soustractive dans le second; mais l'Algèbre dispense de toute recherche à cet égard, lorsqu'on sait opérer convenablement sur les expressions affectées du signe —; car ces expressions étant déduites des équations du problème, doivent *satisfaire* à ces équations : c'est-à-dire qu'en les soumettant aux opérations indiquées dans l'équation, on doit trouver, pour le premier membre, une valeur égale à celle du second. Ainsi, l'expression $\frac{-14}{7}$, tirée des équations

$$12x + 7y = 46,$$
$$8x + 5y = 30,$$

doit, conjointement avec la valeur $x = 5$, déduite des mêmes équations, les vérifier toutes deux.

La substitution de la valeur de x donne d'abord

$$60 + 7y = 46,$$
$$40 + 5y = 30.$$

Il reste à faire la substitution de $\frac{-14}{7}$ à la place de y; et pour cela, il faut multiplier cette expression par 7 et par 5, en ayant égard au signe — dont elle est affectée.

Si l'on y applique la règle des signes, donnée dans le numéro 42, pour la division, on aura

$$\frac{-14}{7} = -2;$$

puis, par la règle des signes relative à la multiplication, on obtiendra

$$7 \times -2 = -14,$$
$$5 \times -2 = -10.$$

Les équations

$$60 + 7y = 46 \quad \text{et} \quad 40 + 5y = 30,$$

devenant respectivement

$$60 - 14 = 46 \quad \text{et} \quad 40 - 10 = 30,$$

seront vérifiées, non pas en ajoutant les deux parties du premier membre, mais bien en retranchant la seconde de la première, comme on l'a fait plus haut, d'après la considération de la forme de ces équations.

60. *Les données* du problème du numéro 58 n'ont pas permis de le résoudre dans le sens du premier énoncé, c'est-à-dire par addition, ou en regardant comme un gain l'argent attribué à la présence de la femme et du fils de l'ouvrier; le second énoncé ne conviendrait pas davantage aux données du problème du numéro 56.

Si l'on voulait considérer dans ce cas, y comme exprimant une dépense, les équations

$$12x - 7y = 74,$$
$$8x - 5y = 50,$$

qu'on aurait alors, donneraient

$$x = 5 \quad \text{et} \quad y = \frac{-14}{7};$$

et la substitution de la valeur de x changerait d'abord ces équations en

$$60 - 7y = 74,$$
$$40 - 5y = 50.$$

L'absurdité de ces résultats est précisément contraire à celle des résultats du numéro 58, puisqu'il s'agit ici de parvenir à des restes plus grands que les nombres 60 et 40, dont on retranche les quantités $7y$ et $5y$.

Non-seulement le signe — qui affecte l'expression de y indique l'absurdité, mais encore il la redresse; car, suivant la règle des signes,

$$\frac{-14}{7} = -2$$

et

$$-7 \times -2 = +14$$
$$-5 \times -2 = +10.$$

Par ce moyen, les équations

$$60 - 7y = 74, \qquad 40 - 5y = 50,$$

devenant

$$60 + 14 = 74, \qquad 40 + 10 = 50,$$

se vérifient par addition; et par conséquent les quantités $-7y$ et $-5y$, transformées en $+14$, $+10$, au lieu d'exprimer des dépenses à la charge de l'ouvrier, sont regardées comme un gain pour lui : on retombe donc encore, dans ce cas, sur le véritable énoncé de la question.

61. On apprend par les exemples précédens qu'*il*

peut se trouver dans les énoncés des problèmes du premier degré, certaines contradictions que l'Algèbre fait non-seulement connaître, mais dont elle indique encore la rectification, en rendant soustractives des quantités qu'on avait regardées comme additives, ou additives des quantités que l'on avait regardées comme soustractives, ou en donnant pour les inconnues des valeurs affectées du signe —.

Voilà ce qu'il faut entendre lorsqu'on dit communément que les valeurs affectées du signe —, et qu'on appelle *solutions négatives*, résolvent, dans un sens opposé à son énoncé, la question où elles se rencontrent.

Il suit de là qu'on peut regarder comme ne formant, à proprement parler, qu'une seule question, celles dont les énoncés sont liés entre eux de manière que les solutions qui satisfont à l'un des énoncés, peuvent, par un simple changement de signe, satisfaire à l'autre.

62. Puisque les quantités négatives résolvent, dans un certain sens, les problèmes qui leur donnent naissance, il est à propos d'examiner de plus près leur usage, et d'abord, de s'assurer de la manière dont il convient d'effectuer les opérations indiquées sur ces quantités.

On a ci-dessus fait usage des règles des signes, trouvées précédemment pour chacune des opérations fondamentales; mais ces règles n'ont point été démontrées sur des quantités isolées. Pour la soustraction, par exemple, on a supposé qu'il fallait retrancher de a l'expression $b - c$, dans laquelle la quantité négative $-c$ était précédée d'une quantité positive b (20). On réduirait bien $b - c$ à $-c$, en faisant $b = 0$, ce qui changerait le résultat en $a + c$; mais le raisonnement employé à l'endroit cité, supposant l'existence de la quantité b, ne paraît pas comprendre ce cas; et la théorie

des quantités négatives étant à la fois l'une des plus importantes et des plus épineuses de l'Algèbre, il est à propos de l'appuyer sur des bases solides. Pour parvenir à ce but, il faut remonter à l'origine des quantités négatives.

La plus grande soustraction que l'on puisse opérer sur une quantité, c'est de la retrancher d'elle-même ; et dans ce cas, on a zéro pour reste : ainsi, $a - a = 0$. Mais lorsque la quantité à retrancher surpasse celle dont il faut la retrancher, on ne peut plus effectuer en entier la soustraction; on ne fait qu'opérer, dans la quantité à soustraire, une réduction égale à la quantité dont elle devrait être ôtée. Lorsque de 3, par exemple, il faut retrancher 5, ou qu'on a la quantité $3 - 5$, en ôtant d'abord 3 de 5, on décompose 5 en deux parties 3 et 2 dont la soustraction successive reviendrait à celle de 5, et par là, au lieu de $3 - 5$ on a l'expression équivalente $3 - 3 - 2$ qui se réduit à -2. Le signe $-$ qui précède 2 montre que c'est ce dont il s'en faut que la soustraction ait pu s'opérer tout entière, en sorte que si l'on eût ajouté 2 à la première des quantités, on aurait eu $3 + 2 - 5$, ou zéro. On exprime donc, au moyen des signes algébriques, l'idée qu'on doit attacher à la quantité négative $-a$, en formant l'équation $a - a = 0$, ou en regardant les symboles $a - a$, $b - b$, etc. comme équivalens à zéro.

Cela posé, on conçoit que si l'on joint à la quantité quelconque a le symbole $b - b$, qui n'est au fond que zéro, on ne changera point la valeur de cette quantité, et que par conséquent l'expression $a + b - b$ n'est qu'une autre manière d'écrire la quantité a; ce qui est d'ailleurs évident, puisque les termes $+b$ et $-b$ se détruisent.

Mais ayant, par ce changement de forme, fait entrer dans la composition de a les quantités $+b$ et $-b$, on voit que pour soustraire l'une quelconque de ces quan-

tités, il suffit de l'effacer. Si c'est $+b$ qu'on veut soustraire de a, on l'effacera, et il restera $a-b$, ce qui s'accorde avec la convention établie n° 2; si c'est, au contraire, $-b$, on effacera cette dernière quantité, et il restera $a+b$, comme on le conclurait du n° 20.

A l'égard de la multiplication, on remarquera que le produit de $a-a$ par $+b$, doit être $ab-ab$, parce que le multiplicande étant égal à zéro, le produit doit aussi être zéro; et le premier terme étant ab, le second doit nécessairement être $-ab$, pour détruire ce premier.

On conclura de là que $-a$ multiplié par $+b$ doit donner $-ab$.

En multipliant a par $b-b$, on aura encore $ab-ab$, parce que le multiplicateur étant égal à zéro, le produit sera aussi égal à zéro; et il faudra par conséquent que le second terme soit $-ab$ pour détruire le premier $+ab$.

Donc $+a$ multiplié par $-b$ doit donner $-ab$.

Enfin si l'on multiplie $-a$ par $b-b$, le premier terme du produit étant, d'après ce qui précède, $-ab$, il faudra que le second terme soit $+ab$, puisque le produit doit être nul en même temps que le multiplicateur.

Donc $-a$ multiplié par $-b$ doit donner $+ab$.

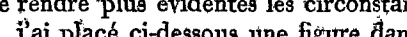
En rapprochant ces résultats, on en déduit les mêmes règles que celles du numéro 31.

Le signe d'un quotient, combiné avec celui du diviseur, suivant les règles propres à la multiplication, devant reproduire le signe du dividende, on conclura de ce qui vient d'être dit, que la règle des signes, donnée n° 42, convient encore au cas actuel, et que par conséquent *les quantités monomes, lorsqu'elles sont isolées, se combinent, par rapport à leurs signes, de même que lorsqu'elles font partie des polynomes.*

63. D'après ces remarques on pourra toujours, lorsqu'on rencontrera des valeurs négatives, remonter au véritable énoncé de la question résolue, en cherchant de quelle manière ces valeurs satisfont aux équations du problème proposé; c'est ce que l'exemple suivant, qui se rapporte à des nombres différens d'espèce de ceux de la question du n° 56, confirmera.

64. *Deux couriers, pour aller à la rencontre l'un de l'autre, partent en même temps de deux villes dont la distance est donnée; on sait combien de kilomètres chaque courier fait par heure, et on demande à quel point de la route qui joint les deux villes, ces couriers se rencontreront.*

Afin de rendre plus évidentes les circonstances de la question, j'ai placé ci-dessous une figure dans laquelle les points indiqués par les grandes lettres A et B, représentent les lieux de départ des couriers.



J'exprimerai à l'ordinaire par de petites lettres les données et les inconnues de la question.

a la distance des points de départ *A* et *B*,

b le nombre de kilomètres que parcourt dans une heure, le courier parti du point *A*,

c le nombre de kilomètres que parcourt dans le même temps, le courier parti du point *B*.

La lettre *R* étant placée au point de rencontre des deux couriers, je nommerai *x* le chemin *AR* fait par le premier, *y* le chemin *BR* fait par le second; et comme

$$AR + BR = AB,$$

j'aurai l'équation

$$x + y = a.$$

Considérant ensuite que les chemins *x* et *y* sont par-

courus dans le même temps, on remarquera que le premier courier, qui fait un nombre b de kilomètres en une heure de temps, emploiera à parcourir l'espace x, un temps marqué par $\frac{x}{b}$.

De même le second courier, qui fait un nombre c de kilomètres en une heure, emploiera à parcourir le chemin y, un temps marqué par $\frac{y}{c}$; on aura donc

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c}.$$

Les équations de la question seront par conséquent

$$x+y=a$$
$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c}.$$

En faisant disparaître le dénominateur b de la seconde, on aura

$$x=\frac{by}{c};$$

mettant cette valeur de x dans la première équation, celle-ci deviendra

$$\frac{by}{c}+y=a;$$

on en conclura

$$by+cy=ac, \quad \text{d'où} \quad y=\frac{ac}{b+c}.$$

Remettant la valeur de y dans celle de x, on obtiendra

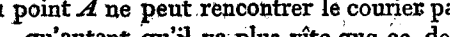
$$x=\frac{b}{c}\times\frac{ac}{b+c} \quad \text{ou} \quad x=\frac{abc}{c(b+c)} \ (53)$$

ou enfin

$$x=\frac{ab}{b+c} \ (38).$$

Puisqu'il n'entre aucun signe — dans les valeurs de x et de y, il est évident que quelques nombres qu'on prenne pour les lettres a, b, c, on trouvera toujours pour x et pour y deux nombres affectés du signe +, et que par conséquent la question proposée sera toujours résolue dans le sens précis de son énoncé. En effet, on conçoit facilement que dans tous les cas où deux couriers vont en même temps l'un vers l'autre, ils doivent nécessairement se rencontrer.

65. Je suppose à présent que les deux coutiers aillent dans le même sens ; celui qui part du point A courant après celui qui part du point B, et qui tend vers un point C, placé au-delà du point B, par rapport au point A.



Il est évident que, dans cette hypothèse, le courier parti du point A ne peut rencontrer le courier parti du point B, qu'autant qu'il va plus vîte que ce dernier ; et le point de rencontre R n'est plus entre A et B, mais au-delà de B, par rapport à A.

En conservant les mêmes données que ci-dessus, et en observant qu'alors

$$AR - BR = AB$$

on aura

$$x - y = a.$$

La seconde équation

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$$

n'exprimant que l'égalité des temps employés par les couriers à parcourir les espaces AR et BR', ne change point.

Les deux équations ci-dessus, étant résolues comme les précédentes, donnent

$$x = \frac{by}{c};$$

$$\frac{by}{c} - y = a, \qquad by - cy = ac,$$

$$y = \frac{ac}{b-c},$$

$$x = \frac{b}{c} \times \frac{ac}{b-c} = \frac{abc}{c(b-c)},$$

et enfin

$$x = \frac{ab}{b-c}.$$

Ici les valeurs de x et de y ne seront positives qu'autant qu'on prendra b plus grand que c, c'est-à-dire qu'on supposera que le courier parti du point A va plus vite que l'autre.

Si l'on fait, par exemple,

$$b = 20, \qquad c = 10,$$

on a

$$x = \frac{20a}{20-10} = \frac{20a}{10} = 2a,$$

$$y = \frac{10a}{20-10} = \frac{10a}{10} = a;$$

d'où il résulte que le point de rencontre R est éloigné du point A de deux fois AB.

Si l'on suppose ensuite b plus petit que c, qu'on fasse, par exemple,

$$b = 10 \qquad c = 20,$$

on trouve

$$x = \frac{10a}{10-20} = \frac{10a}{-10} = -a,$$

$$y = \frac{20a}{10-20} = \frac{20a}{-10} = -2a.$$

Ces valeurs étant affectées du signe —, font voir que la question ne peut plus être résolue dans le sens de son énoncé; et en effet il est absurde de supposer que le courier parti du point A, ne parcourant que 10 kilomètres par heure, puisse jamais atteindre le courier parti du point B, qui fait 20 kilomètres par heure, et qui est en avant du premier.

66. Cependant ces mêmes valeurs résolvent la question dans un certain sens; car en les substituant dans les équations

$$x - y = a,$$
$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c},$$

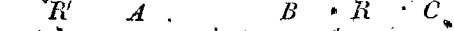
on a, par les règles des signes,

$$-a + 2a = a$$
$$-\frac{a}{10} = -\frac{2a}{20},$$

équations qui sont satisfaites, puisqu'en effectuant les réductions qui se présentent, le premier membre devient égal au second; et si l'on fait attention aux signes des termes qui composent la première, on verra comment il faut modifier l'énoncé de la question pour en ôter l'absurdité.

En effet, c'est le chemin a, correspondant à x et parcouru par le premier courier, qui est véritablement soustrait du chemin $2a$, correspondant à y et parcouru par le second courier; c'est donc comme si l'on avait changé y en x et x en y, et comme si l'on avait supposé que le courier parti du point B allât après l'autre.

Ce changement dans l'énoncé en produit un dans la direction du chemin des couriers; ils ne tendent plus vers le point C, mais du côté opposé, vers le point C, comme le montre la figure suivante :



et leur rencontre se fait en R'. Il résulte de là

$$B\,R' - A\,R' = A\,B,$$

ce qui donne

$$y - x = a;$$

on a toujours d'ailleurs

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c},$$

et on trouverait

$$x = \frac{ab}{c-b} = \frac{10a}{20-10} = a,$$

$$y = \frac{ac}{c-b} = \frac{20a}{20-10} = 2a;$$

valeurs positives, qui résolvent la question dans le sens précis de son énoncé.

67. Cette question présente un cas dans lequel elle est tout-à-fait absurde. Ce cas a lieu lorsqu'on suppose que les deux couriers vont également vite ; il est visible que de quelque côté qu'on les fasse marcher, ils ne peuvent jamais se rencontrer, puisqu'ils conservent entre eux l'intervalle de leurs points de départ. Cette absurdité, qu'aucune modification dans l'énoncé ne peut faire disparaître, se manifeste bien évidemment dans les équations.

On a alors $b = c$, puisque les couriers allant également vite, parcourent le même espace dans une heure ; l'équation

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$$

devient

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b}$$

et donne

$$x = y.$$

Par là, l'équation $x - y = a$ se change en

$$x - x = a, \quad \text{ou} \quad 0 = a,$$

résultat bien absurde, puisqu'il suppose nulle une quantité a dont la grandeur est donnée.

68. Cette absurdité se montre d'une manière assez singulière dans les valeurs des inconnues

$$x = \frac{ab}{b-c}, \qquad y = \frac{ac}{b-c};$$

leur dénominateur $b - c$ devenant 0 lorsque $b = c$, on a

$$x = \frac{ab}{0}, \qquad y = \frac{ac}{0}.$$

On n'aperçoit pas aisément ce que peut être le quotient d'une division, quand le diviseur est zéro ; on voit seulement que si l'on prenait b très voisin de c, les valeurs de x et de y deviendraient très grandes. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à prendre

$$b = 6^{km}, \qquad c = 5^{km},8$$

on aura

$$x = \frac{6a}{0,2} = 30a,$$

$$y = \frac{5,8a}{0,2} = 29a;$$

qu'on passe ensuite à

$$b = 6 \qquad c = 5,9,$$

on aura

$$x = \frac{6a}{0,1} = 60a,$$

$$y = \frac{5,9a}{0,1} = 59a;$$

qu'on fasse encore

$$b = 6, \qquad c = 5,99,$$

il viendra

$$x = \frac{6a}{0,01} = 600a,$$

$$y = \frac{5,99a}{0,01} = 599a;$$

et on voit facilement que le diviseur diminuant à mesure qu'on rend plus petite la différence des nombres b et c, on obtient des valeurs de plus en plus grandes.

Cependant, comme quelque petite que soit une quantité, elle ne peut jamais être prise pour zéro, il s'ensuit que quelque peu différens qu'on supposât les nombres représentés par les lettres b et c, et quelque grandes que fussent par conséquent les valeurs de x et de y résultantes, jamais on n'atteindrait à celles qui répondent au cas où $b = c$.

Ces dernières ne pouvant être représentées par aucun nombre; quelque grand qu'on le suppose, sont dites *infinies*; et toute expression de la forme $\frac{m}{0}$, dont le dénominateur est zéro, est regardée comme le symbole de l'*infini*.

Cet exemple montre que l'*infini* mathématique est une idée négative, puisqu'on n'y parvient que par l'impossibilité d'assigner une quantité qui puisse résoudre la question.

On pourrait demander ici comment les valeurs

$$x = \frac{ab}{0}, \qquad y = \frac{ac}{0},$$

satisfont aux équations proposées; car c'est une propriété essentielle de l'Algèbre que les symboles des valeurs des inconnues, quels qu'ils soient, étant soumis aux opérations indiquées sur ces inconnues, satisfassent aux équations du problème.

En les substituant dans les équations

$$x - y = a,$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b},$$

qui répondent au cas où $b = c$, on a, par la première,

$$\frac{ab}{0} - \frac{ab}{0} = a,$$

ou $\frac{ab - ab}{0} = a$, ou $ab - ab = a \times 0$,

ou enfin

$$0 = 0, \quad \text{puisque} \quad a \times 0 = 0.$$

La seconde équation donne, dans la même circonstance,

$$\frac{ab}{0 \times b} = \frac{ab}{0 \times b};$$

les deux membres de chaque équation devenant égaux, ces équations sont satisfaites.

Il reste encore à expliquer comment la notion indiquée par l'expression $\frac{ab}{0}$, corrige l'absurdité du résultat trouvé dans le n° 67. Pour cela, on divisera par x les deux membres de l'équation

$$x - y = a;$$

on aura

$$1 - \frac{y}{x} = \frac{a}{x};$$

et comme l'équation

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b}$$

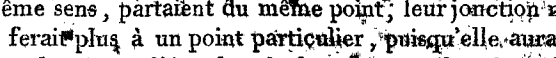
donne $x = y$, la première deviendra

$$1 - 1 = \frac{a}{x} \quad \text{ou} \quad 0 = \frac{a}{x}.$$

L'erreur consiste ici dans la quantité $\frac{a}{x}$, dont le second membre surpasse le premier; mais cette erreur deviendra de plus en plus petite, à mesure qu'on prendra pour x un plus grand nombre. C'est donc avec raison que l'Algèbre donne pour x une expression qu'aucun nombre

quelque grand qu'il soit, ne saurait représenter, mais qui, venant à la suite de celles qui représentent des nombres de plus en plus grands, indique dans quel sens on peut atténuer de plus en plus l'erreur de la supposition.

69. Si les couriers, allant également vite et dans le même sens, partaient du même point, leur jonction ne se ferait plus à un point particulier, puisqu'elle aurait lieu dans toute l'étendue de leur course : il est bon de voir comment cette circonstance est représentée par les valeurs que prennent dans ce cas les inconnues x et y.



Le point A et le point B étant confondus ensemble, on a pour ce cas ; $a = 0$, et toujours $b = c$; il vient donc

$$x = \frac{0.b}{0} = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0.c}{0} = \frac{0}{0}.$$

Pour interpréter ces valeurs, qui indiquent une division dans laquelle le dividende et le diviseur sont nuls tous les deux, je remonte aux équations de la question. La première, devenant

$$x - y = 0, \text{ donne } x = y ;$$

et substituant cette valeur dans la seconde équation qui est alors

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b}, \text{ il vient } \frac{y}{b} = \frac{y}{b}.$$

La dernière équation ayant ses deux membres *identiques*, c'est-à-dire composés des mêmes termes, pris avec le même signe, est satisfaite, quelque valeur qu'on assigne à y, et ne saurait déterminer cette inconnue. D'ailleurs, il est évident que l'équation

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b} \text{ revient à } x = y,$$

et n'exprime par conséquent rien de plus que la

première (*). Il résulte seulement de l'une et de l'autre, que les deux couriers seront toujours ensemble, puisque les distances x et y partent toutes deux du point A, et sont égales; leur valeur restant d'ailleurs indéterminée. L'expression $\frac{0}{0}$ est donc ici le symbole d'une quantité indéterminée : je dis ici, car il y a des cas où cela n'est pas; mais alors l'expression proposée n'a pas la même origine que la précédente.

70. Pour en donner un exemple, soit

$$\frac{a(a^2-b^2)}{b(a-b)}.$$

Cette quantité devient $\frac{0}{0}$ dans sa forme actuelle, lorsqu'on fait $a=b$; mais si on la réduit d'abord à sa plus simple expression, en supprimant le facteur $a-b$, commun au numérateur et au dénominateur, on trouve

$$\frac{a(a+b)}{b},$$

ce qui donne $2a$ quand $a=b$.

Il n'en est pas de même des valeurs de x et de y, trouvées dans le n° précédent; car elles ne sont pas susceptibles d'être réduites à une plus simple expression.

Il suit de ce que je viens de dire, que lorsqu'on rencontre une expression qui devient $\frac{0}{0}$, il faut, avant de prononcer sur sa valeur, chercher si le numérateur et le dénominateur n'ont pas quelque facteur commun qui, devenant nul, rende ces deux termes égaux à zéro en même temps; et en le supprimant, on ob-

(*) Pour abréger le discours, les analystes appliquent aux équations mêmes, l'épithète d'*identiques*.

$\frac{y}{b}=\frac{y}{b}$ est une équation identique, $5-3x=5-3x$, en est une autre; et quand deux équations n'expriment que la même chose, on dit aussi que ces équations sont identiques.

tiendra la vraie valeur de l'expression proposée. Il y a cependant des cas qui pourraient échapper à cette méthode ; mais les bornes de cet Ouvrage ne me permettent que de faire remarquer le *fait analytique*. C'est en traitant du Calcul différentiel, qu'on donne les procédés généraux pour trouver la vraie valeur des quantités qui deviennent $\frac{0}{0}$ (*).

71. Ce qui précède fait voir bien clairement que *les solutions algébriques, ou satisfont complètement à l'énoncé du problème, quand il est possible, ou indiquent une modification à faire dans l'énoncé, lorsque les données présentent des contradictions qui peuvent être levées, ou enfin font connaître une impossibilité absolue, lorsqu'il n'y a aucun moyen de résoudre avec les mêmes données, une question analogue dans un certain sens à la proposée.*

72. Il faut remarquer dans la solution des différens cas de la question précédente, que le changement de signe des inconnues x et y répond à un changement dans la direction des chemins que ces inconnues représentent. Quand l'inconnue y était comptée de B vers A ; elle avait dans l'équation

$$x+y=a,$$

le signe $+$, et elle a pris le signe $-$ pour le second cas, lorsqu'on l'a portée du côté opposé, de B vers C, n° 65, puisqu'on a eu pour première équation

$$x-y=a.$$

En effectuant ce changement de signe dans la seconde

(*) Voyez le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, tom. I, ou le *Traité élémentaire* sur le même sujet.

équation

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c},$$

on trouverait

$$\frac{x}{b}=\frac{-y}{c},$$

résultat qui n'est pas celui qu'on a donné dans le n° cité; mais il faut observer que le chemin y se compose par des multiples de l'espace c que parcourt en une heure le courier parti du point B, et cet espace étant dirigé dans le même sens que l'espace y, doit être supposé de même signe, et prendre par conséquent le signe — lorsqu'on le donne à y : on aura, par cette remarque,

$$\frac{x}{b}=\frac{-y}{-c} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{b}=\frac{y}{c}.$$

Il suffit donc d'un simple changement de signe pour comprendre le second cas de la question dans le premier; et c'est ainsi que l'Algèbre donne à la fois la solution de plusieurs questions analogues.

Le problème du n° 15 en offre un exemple bien évident. On a supposé dans cet article, que le père devait au fils une somme d; si on veut résoudre la question dans l'hypothèse contraire, c'est-à-dire en supposant que le fils doive à son père la somme d, il suffira de changer le signe de d, dans la valeur de x, et l'on aura

$$x=\frac{bc-d}{a+b};$$

enfin, si on les suppose quittes l'un envers l'autre, il faudra faire $d=0$, et il viendra

$$x=\frac{bc}{a+b}.$$

Rien n'est plus aisé que de vérifier ces deux solutions, en mettant de nouveau le problème en équation, pour chacun des cas qu'on vient d'énoncer.

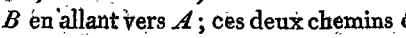
73. Ce n'est que pour conserver l'analogie entre les problèmes des n°s 56 et 64, que j'ai employé deux inconnues dans le second. On pourrait résoudre l'un et l'autre avec une seule inconnue; car, lorsqu'on dit que l'ouvrier a reçu 74 francs pour 12 jours de son travail et 7 de celui de sa femme et de son fils, il en résulte que, si l'on nomme y le gain de la femme et du fils, et que de 74 francs on ôte $7y$, il reste $74-7y$ pour 12 journées de l'ouvrier, d'où il suit qu'il gagne $\frac{74-7y}{12}$ par jour.

Calculant de même son gain pour la seconde circonstance, on trouvera qu'il gagne $\frac{50-5y}{8}$ par jour.

En égalant ces deux quantités, on formera l'équation

$$\frac{74-7y}{12}=\frac{50-5y}{8}$$

De même, dans la question du n° 64,



si x désigne le chemin AR fait par le courier parti du point A, $BR=a-x$, sera celui du courier parti du point B en allant vers A; ces deux chemins étant faits dans le même temps par les couriers qui parcourent respectivement les nombres b et c de kilomètres par heure, on aura

$$\frac{x}{b}=\frac{a-x}{c},$$

d'où

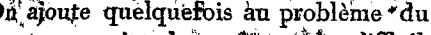
$$cx=ab-bx,$$

$$x=\frac{ab}{b+c}.$$

La différence entre les solutions que l'on vient de donner et celles des n°s 56 et 64, ne consiste qu'en ce que l'on

a formé et résolu la première équation par le secours du langage ordinaire, sans y employer l'écriture algébrique; et il est évident que plus on pousse loin l'usage du premier procédé, moins il reste à faire avec le second.

74. On ajoute quelquefois au problème du n° 64, une circonstance qui ne le rend pas plus difficile.



On suppose que le courier parti du point B *s'est mis en marche un nombre* d *d'heures avant celui qui part du point* A.

Il est évident que cela revient à changer le point de départ du premier; car s'il fait un nombre c de kilomètres par heure, il parcourra un espace $BC=cd$, en d d'heures, et se trouvera au point C, lorsque l'autre courier partira du point A; en sorte que l'intervalle des lieux de départ sera

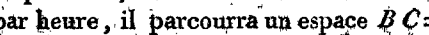
$$AC=AB-BC=a-cd.$$

En écrivant donc $a-cd$, à la place de a, dans l'équation du n° précédent, on aura

$$\frac{x}{b}=\frac{a-cd-x}{c},$$

$$x=\frac{ab-bcd}{b+c}.$$

Si les couriers allaient dans le même sens



l'intervalle des lieux de départ serait

$$AC=AB+BC=a+cd;$$

le chemin parcouru par le courier parti du point A rait AR, tandis que celui de l'autre courier serait

$$CR=AR-AC$$

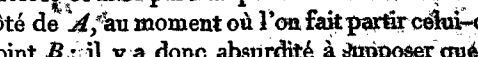
on aurait donc

$$\frac{x}{b} = \frac{x - a - cd}{c}$$

d'où

$$x = \frac{ab + bcd}{b - c}.$$

75. Enoncé de cette manière, le problème présente un cas où l'interprétation de la valeur négative trouvée pour x, offre quelque difficulté; c'est lorsqu'en faisant aller les couriers en sens contraire, on donne au nombre d une valeur telle, que l'espace BC représenté par cd, devient plus grand que a, qui représente AB.



Alors le courier parti du point B se trouve en C de l'autre côté de A, au moment où l'on fait partir celui-ci, vers le point B; il y a donc absurdité à supposer que les deux couriers puissent ainsi se rencontrer.

Si l'on avait, par exemple,

$$a = 400^{km}, \quad b = 12^{km}, \quad c = 8^{km}, \quad d = 60^{h},$$

il en résulterait $cd = 480^{km}$, ainsi le point C serait à 80^{km} au-delà du point A, par rapport au point B; mais on trouverait alors

$$x = \frac{400.12 - 60.8.12}{8 + 12} = \frac{400.3 - 60.2.12}{2 + 3}$$

$$= \frac{1200 - 1440}{5} = -\frac{240}{5} = -48.$$

Ainsi la rencontre des couriers aurait lieu dans un point R, placé à 48^{km} de l'autre côté du point A, mais entre A et C, quoiqu'il semble que le courier parti de B, devant continuer son chemin au-delà du point C, ne pourrait être joint par l'autre courier, qu'après avoir passé ce point.

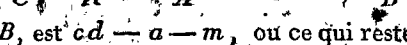
Pour connaître la question résolue dans ce cas, il faut substituer au lieu de x le nombre négatif $-m$ dans l'équation qui devient

$$-\frac{m}{b} = \frac{a - ed + m}{c},$$

ou en changeant le signe des deux membres,

$$\frac{m}{b} = \frac{cd - a - m}{c}.$$

On voit que le chemin parcouru par le courier parti



du point B, est $cd - a - m$, ou ce qui reste de BC, quand on en retranche AB et AR, c'est-à-dire CR, et que $AC = cd - d$: c'est donc comme si le second courier eût dû partir immédiatement du point C où il se trouve au départ du premier; mais puisqu'ils vont en sens contraires, leur rencontre doit nécessairement avoir lieu dans l'intervalle AC. Ce cas rentre ainsi dans le premier de ceux du n° 74, où il suffit de changer $a - cd$ en $cd - a$ pour obtenir la valeur qu'aurait m, d'après l'équation ci-dessus. *(Voyez la note à la fin du vol.)*

76. Le problème du n° 56, étant généralisé, s'énonce ainsi qu'il suit :

Un ouvrier ayant passé un nombre a *de jours dans une maison, et ayant eu avec lui sa femme et son fils pendant un nombre* b *de jours, a reçu une somme* c ; *il a passé ensuite dans la même maison un nombre* d *de jours, il a eu cette fois avec lui sa femme et son fils pendant un nombre* e *de jours, et il a reçu une somme* f : *on demande ce qu'il gagnait par jour, et ce que gagnaient sa femme et son fils pendant le même temps.*

Soient toujours x le prix de la journée de l'ouvrier et y celui de la journée de sa femme et de son fils :

pour un nombre a de jours, il aura ax,
pour un nombre b de jours, sa femme et son fils auront by, ainsi

$$ax + by = c;$$

pour un nombre d de jours, il aura dx,
pour un nombre e de jours, sa femme et son fils auront ey, ainsi

$$dx + ey = f.$$

voilà les deux équations générales de la question.

On tire de la première

$$x = \frac{c - by}{a};$$

multipliant cette valeur par d, pour la substituer à la place de x, dans la seconde équation, on aura

$$dx = \frac{cd - bdy}{a},$$

et par conséquent

$$\frac{cd - bdy}{a} + ey = f.$$

En faisant disparaître les dénominateurs de cette équation, on obtiendra

$$cd - bdy + aey = af,$$

d'où l'on conclura successivement

$$aey - bdy = af - cd,$$

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

Connaissant maintenant y, si l'on met sa valeur dans celle de x, cette dernière sera connue; on aura

$$x = \frac{c - b\frac{af - cd}{ae - bd}}{a}.$$

Pour simplifier cette expression, il faut d'abord faire la

multiplication indiquée sur les quantités

$$b \quad \text{et} \quad \frac{af-cd}{ae-bd}, \qquad (53)$$

ce qui donne

$$x = \frac{c - \frac{abf-bcd}{ae-bd}}{a};$$

puis réduire c au dénominateur de la fraction qui l'accompagne, et effectuer la soustraction de cette fraction (51) : il vient

$$x = \frac{\frac{ace-bcd-abf+bcd}{ae-bd}}{a}$$

ou en réduisant

$$x = \frac{\frac{ace-abf}{ae-bd}}{a} \ (*).$$

(*) Pour qu'il n'y ait aucun doute sur le sens de cette expression, il faut faire attention à la barre de division qui se trouve placée dans le corps de la ligne. Ainsi, dans l'expression $x = \frac{A}{B}$, A représente le dividende, soit entier, soit fractionnaire, et B le diviseur, dans l'une et l'autre hypothèses. D'après cette convention, l'expression $x = \frac{\frac{A}{C}}{B}$ signifie que x est égal au quotient de la fraction $\frac{A}{C}$ divisée par B, et l'expression $x = \frac{A}{\frac{B}{C}}$ indique pour x le quotient de A divisé par la fraction $\frac{B}{C}$; enfin on a, par l'expression $x = \frac{\frac{A}{C}}{\frac{B}{D}}$, le quotient de la fraction $\frac{A}{C}$ divisée par la fraction $\frac{B}{D}$.

Ces remarques font sentir la nécessité de placer les barres conformément au résultat qu'on se propose d'indiquer.

En effectuant la division par a (53), on trouvera

$$x = \frac{ace - abf}{a^2e - abd},$$

et en supprimant le facteur a, commun au numérateur et au dénominateur (38), on aura enfin

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}.$$

Les valeurs

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}, \quad y = \frac{af - cd}{ae - bd},$$

s'appliquent de la même manière que celles qu'on a trouvées ci-dessus, pour des équations littérales à une seule inconnue : on y substitue au lieu des lettres les nombres particuliers à l'exemple qu'on a choisi.

On obtiendra les résultats du n° 56, en faisant

$$a = 12, \quad b = 7, \quad c = 74,$$
$$d = 8, \quad e = 5, \quad f = 50,$$

et ceux du n° 58, en faisant

$$a = 12, \quad b = 7, \quad c = 46,$$
$$d = 8, \quad e = 5, \quad f = 30.$$

77. Les valeurs de x et de y ne conviennent pas seulement à la question proposée : elles s'étendent à toutes celles qui conduisent à deux équations du premier degré à deux inconnues ; car il est visible que ces équations sont nécessairement comprises dans les formules

$$ax + by = c,$$
$$dx + ey = f,$$

pourvu qu'on entende par les lettres a, b, d et e, l'ensemble des quantités données qui multiplient respectivement les inconnues x et y, et par les lettres c et f, l'ensemble des termes tout connus, passés dans le second membre.

De la résolution d'un nombre quelconque d'équations du premier degré, renfermant un pareil nombre d'inconnues.

78. Lorsqu'une question renferme autant de conditions distinctes qu'elle contient d'inconnues, chacune de ces conditions fournit une équation, dans laquelle il arrive souvent que les inconnues sont mêlées entre elles, comme on l'a vu déjà sur des problèmes à deux inconnues; mais si ces inconnues ne sont qu'au premier degré, on peut, ainsi qu'on l'a fait dans les numéros précédens, *prendre dans l'une des équations la valeur de l'une des inconnues, comme si tout le reste était connu, et substituer cette valeur dans toutes les autres équations, qui ne contiendront plus après cela que les autres inconnues.*

Cette opération, par laquelle on chasse une des inconnues, se nomme *élimination*. Par son moyen, si l'on a trois équations à trois inconnues, on en déduira deux équations à deux inconnues, qu'on traitera comme on a fait ci-dessus; et ayant obtenu les valeurs des deux dernières inconnues, on les substituera dans l'expression de la première.

Si l'on a quatre équations à quatre inconnues, on en déduira en premier lieu trois équations à trois inconnues, qu'on traitera comme il vient d'être dit; puis ayant trouvé les valeurs des trois inconnues, on les substituera dans l'expression de la première, et ainsi de suite.

Voici pour exemple une question qui renferme trois inconnues et trois équations.

79. *On a acheté séparément les charges de trois voitures : la première, qui contenait* 30 *mesures de seigle,* 20 *d'orge et* 10 *de froment, a coûté* 230 *francs;*

La seconde, qui contenait 15 *mesures de seigle,* 6 *d'orge et* 12 *de froment, a coûté* 138 *francs;*

La troisième, qui contenait 10 *mesures de seigle,* 5 *d'orge et* 4 *de froment, a coûté* 75 *francs;*

On demande à combien revient la mesure de seigle, celle d'orge et celle de froment?

Soit x le prix de la mesure de seigle,
y celui de la mesure d'orge,
z celui de la mesure de froment.

Pour remplir la première condition, on observera que

30 mesures de seigle vaudront $30x$,
20 mesures d'orge vaudront $20y$,
10 mesures de froment vaudront $10z$;

et le tout devant faire 230 francs, on aura l'équation

$$30x + 20y + 10z = 230:$$

Pour la seconde condition, on aura

15 mesures de seigle qui vaudront $15x$,
6 d'orge $6y$,
12 de froment $12z$,

et par conséquent

$$15x + 6y + 12z = 138:$$

Pour la troisième condition on aura

10 mesures de seigle qui vaudront $10x$,
5 d'orge $5y$,
4 de froment $4z$,

et par conséquent

$$10x + 5y + 4z = 75.$$

La question proposée sera donc ramenée aux trois équations

$$30x + 20y + 10z = 230,$$
$$15x + 6y + 12z = 138,$$
$$10x + 5y + 4z = 75.$$

Avant d'en entreprendre la résolution, j'examine s'il n'est pas possible de les simplifier, en divisant par un même nombre les deux membres de quelqu'une (12); et je vois qu'on peut diviser tous les termes de la première par 10, et tous ceux de la seconde par 3: en

effectuant ces divisions, je n'ai plus à m'occuper que des équations

$$3x + 2y + z = 23,$$
$$5x + 2y + 4z = 46,$$
$$10x + 5y + 4z = 75.$$

Pouvant choisir l'une quelconque des inconnues pour en tirer la valeur, je prends celle de z dans la première équation, parce que cette inconnue n'ayant point de coefficient, sa valeur sera une quantité sans diviseur, ou entière ; il vient

$$z = 23 - 3x - 2y.$$

En mettant cette valeur dans la seconde et la troisième équation, on les change en

$$5x + 2y + 92 - 12x - 8y = 46,$$
$$10x + 5y + 92 - 12x - 8y = 75;$$

et réduisant leur premier membre, on trouve

$$92 - 7x - 6y = 46,$$
$$92 - 2x - 3y = 75.$$

Pour traiter ces équations, qui ne renferment plus que deux inconnues, je prends dans la première la valeur de l'inconnue y ; j'obtiens

$$y = \frac{92 - 46 - 7x}{6} \quad \text{ou} \quad y = \frac{46 - 7x}{6},$$

et par la substitution de cette valeur, la seconde équation devient

$$92 - 2x - 3 \times \frac{46 - 7x}{6} = 75.$$

Je pourrais faire évanouir le dénominateur 6 par la méthode ordinaire, mais j'observe que ce dénominateur étant divisible par 3, peut se simplifier en effectuant sur la fraction $\frac{46 - 7x}{6}$, la multiplication par 3, conformément au n° 54 de l'*Arithm.* ; j'ai par ce moyen

$$92 - 2x - \frac{46 - 7x}{2} = 75.$$

En faisant alors disparaître le dénominateur 2, je trouve

$$184 - 4x - 46 + 7x = 150;$$

le premier membre étant réduit, il vient

$$138 + 3x = 150,$$

d'où l'on conclut

$$x = \frac{150 - 138}{3} = \frac{12}{3}, \text{ ou } x = 4.$$

La substitution de cette valeur dans l'expression de y donne

$$y = \frac{46 - 7 \times 4}{6} = \frac{46 - 28}{6} = \frac{18}{6}, \text{ ou } y = 3;$$

et par la substitution des valeurs de x et de y, dans l'expression de z, on obtient

$$z = 23 - 3 \times 4 - 2 \times 3 = 23 - 12 - 6, \text{ ou } z = 5.$$

Il suit de là, que la mesure de seigle valait 4 francs,
celle d'orge 3,
celle de froment 5.

Cet exemple, en même temps qu'il offre l'application de la méthode du numéro précédent, doit être remarqué pour les abréviations de calcul qu'on y a pratiquées.

80. Je vais résoudre encore le problème suivant.

Un homme qui s'est chargé de transporter des vases de porcelaine, de trois grandeurs, a fait ce marché : qu'il paierait autant par chaque vase qu'il casserait, qu'il recevrait pour ceux qu'il rendrait en bon état.

On lui donne d'abord deux petits vases, quatre moyens et neuf grands ; il casse les moyens, rend tous les autres en bon état, et reçoit une somme de 28 *francs.*

On lui donne ensuite sept petits vases, trois moyens et cinq grands; cette fois il rend les petits et les moyens, mais il casse les cinq grands, et il reçoit seulement 3 francs.

Enfin, on lui remet neuf petits vases, dix moyens et onze grands; il casse tous ces derniers, et ne reçoit en conséquence que 4 francs.

On demande ce qu'on a payé pour le transport d'un vase de chaque grandeur.

Soit x le prix du transport d'un petit vase,
y celui du transport d'un moyen,
z celui du transport d'un grand.

Il est visible que chaque somme que reçoit le porteur, est la différence, entre ce qui lui revient pour les vases qu'il rend en bon état, et ce qu'il doit pour ceux qu'il a cassés; d'après cette remarque, les trois conditions du problème fournissent respectivement les équations

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 9z &= 28, \\ 7x + 3y - 5z &= 3, \\ 9x + 10y - 11z &= 4. \end{aligned}$$

La première de ces équations donne

$$x = \frac{28 + 4y - 9z}{2};$$

et par la substitution de cette valeur, la deuxième et la troisième équation deviendront

$$\frac{196 + 28y - 63z}{2} + 3y - 5z = 3,$$

$$\frac{252 + 36y - 81z}{2} + 10y - 11z = 4.$$

Faisant disparaître les dénominateurs, on aura

$$\begin{aligned} 196 + 28y - 63z + 6y - 10z &= 6, \\ 252 + 36y - 81z + 20y - 22z &= 8; \end{aligned}$$

réduisant le premier membre, on obtiendra

$$196 + 34y - 73z = 6,$$
$$252 + 56y - 103z = 8;$$

prenant la valeur de y dans la première de ces équations, on aura

$$y = \frac{73z - 190}{34}.$$

Par cette valeur, la seconde devient

$$252 + 56 \times \frac{73z - 190}{34} - 103z = 8;$$

étant délivrée du dénominateur 34, elle se change en

$$34 \times 252 + 56 \times 73z - 56 \times 190 - 34 \times 103z = 34 \times 8$$

ou en

$$8568 + 4088z - 10640 - 3502z = 272.$$

La réduction du premier membre de ce résultat conduit à

$$586z - 2072 = 272,$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{2344}{586}, \quad \text{ou} \quad z = 4.$$

En remontant de la valeur de z à celle de y, on aura

$$y = \frac{73 \times 4 - 190}{34} = \frac{292 - 190}{34} = \frac{102}{34}, \text{ ou } y = 3;$$

et avec ces deux valeurs, on trouvera

$$x = \frac{28 + 4 \times 3 - 9 \times 4}{2} = \frac{28 + 12 - 36}{2} = \frac{4}{2}, \text{ ou } x = 2.$$

On a donc payé 2 fr. pour le transport d'un petit vase,
3 pour celui d'un moyen,
4 pour celui d'un grand.

Cet exemple suffit pour montrer comment il faut s'y prendre dans tous les autres cas.

81. Il arrive souvent que toutes les inconnues n'entrent pas à la fois dans toutes les équations ; cette circonstance ne change pas la méthode : il suffit de bien examiner la liaison des inconnues pour passer des unes aux autres.

Soient pour exemple les quatre équations

$$\begin{aligned} 3u - 2y &= 2, \\ 2x + 3y &= 39, \\ 5x - 7z &= 11, \\ 4y + 3z &= 41, \end{aligned}$$

renfermant les inconnues u, x, y et z.

Avec un peu d'attention, on voit qu'en prenant dans la seconde équation la valeur de x, pour la substituer dans la troisième, le résultat contenant alors y et z, fera, par sa combinaison avec la quatrième équation, connaître ces deux quantités; puis avec la valeur de y, on aura celles de u et de x, par le moyen de la première et de la seconde équation. En opérant ainsi, on fera le calcul suivant :

$$x = \frac{39 - 3y}{2},$$

$$5 \times \frac{39 - 3y}{2} - 7z = 11,$$

ou $$195 - 15y - 14z = 22,$$

ou $$15y + 14z = 173 \quad (57).$$

Les deux équations

$$\begin{aligned} 15y + 14z &= 173, \\ 4y + 3z &= 41, \end{aligned}$$

étant résolues, donneront

$$y = 5, \quad z = 7;$$

et par ces valeurs, on aura

$$x=\frac{39-3\times5}{2}=\frac{39-15}{2}=\frac{24}{2}, \text{ ou } x=12,$$

$$u=\frac{2+2y}{3}=\frac{2+10}{3}=\frac{12}{3}, \text{ ou } u=4:$$

les nombres cherchés sont donc

4, 12, 5 et 7.

82. La méthode que je viens d'exposer s'appliquerait aux équations littérales, de même qu'aux équations numériques ; mais la multitude des lettres qu'il faudrait employer pour représenter généralement les données, lorsque le nombre des équations et des inconnues surpasse 2, a engagé les algébristes à chercher une manière de les exprimer plus simplement. Je la ferai connaître dans l'article suivant ; mais afin de fournir au lecteur l'occasion de s'exercer à mettre les problèmes en équation et à les résoudre, j'ai réuni ci-dessous une suite d'énoncés, et j'ai indiqué à la fin de chacun les résultats qu'on doit trouver.

1°. *Un père étant interrogé sur l'âge de son fils, répond : si du double de l'âge qu'il a maintenant vous retranchez le triple de celui qu'il avait il y a six ans, vous aurez son âge actuel ;*

Réponse : *L'enfant avait* 9 *ans.*

2°. *Diophante, l'auteur du plus ancien livre d'Algèbre qui nous reste, passa dans l'enfance le sixième du temps qu'il vécut, un douzième dans l'adolescence, ensuite il se maria, et passa dans cette union le septième de sa vie, augmenté de cinq ans, avant d'avoir un fils auquel il survécut de quatre ans, et qui n'atteignit que la moitié de l'âge où son père est parvenu ; quel âge avait Diophante, lorsqu'il mourut ?*

Réponse : 84 *ans.*

3°. *Un marchand prélève tous les ans sur les fonds qu'il*

a dans le commerce, une somme de 1000 *francs pour la dépense de son ménage; cependant chaque année son bien augmente du tiers de ce qui reste, et au bout de trois ans se trouve doublé; combien avait-il au commencement de la première année ?*

Réponse : 14800 *francs.*

4°. *Un marchand a deux espèces de thé, la première à* 14 *francs le kilogramme, la deuxième à* 18 *francs; combien doit-il prendre de chacune pour en former une caisse de* 100 *kilogrammes qui vaille* 1680 *francs ?*

Réponse : 30 *kilog. de la première et* 70 *de la seconde.*

5°. *On a rempli en* 12 *minutes un vase contenant* 39 *litres d'eau, en faisant couler successivement deux fontaines, dont l'une fournissait* 4 *litres par minute et l'autre* 3; *on demande pendant combien de minutes chaque fontaine a coulé ?*

Réponse : *La première* 3 *minutes, et la seconde* 9.

6°. *Une montre marquant midi, l'aiguille des minutes se trouve sur celle des heures; on demande quel est le point du cadran où se fera la prochaine rencontre des aiguilles ?*

Réponse : *Lorsqu'il sera* 1 *heure* 5 *minutes et* $\frac{5}{11}$.

Obs. Ce problème se rapporte à celui du n° 65.

7°. *Un homme rencontrant des pauvres, veut donner* 25 *centimes à chacun, mais en comptant sa monnaie, il s'aperçoit qu'il lui manque pour cela* 10 *centimes, alors il ne donne que* 20 *centimes à chaque pauvre et il lui reste* 25 *centimes; on demande combien cet homme avait de monnaie, et quel était le nombre des pauvres ?*

Réponse : *Il avait* 1 *franc* 65 *centimes, et les pauvres étaient au nombre de* 7.

8°. *Trois frères ont acheté un bien pour* 50000 *francs;*

il manque au premier pour payer à lui seul cette acquisition, la moitié de l'argent qu'a le second ; celui-ci paierait l'acquisition à lui seul, si l'on ajoutait à ce qu'il possède le tiers de ce qu'a le premier ; enfin le troisième aurait besoin pour faire ce même paiement, de joindre à ce qu'il a, le quart de ce que possède le premier ; combien chacun a-t-il d'argent ?

Rép. *Le premier a* 30000 *fr.*, *le deuxième* 40000, *et le troisième* 42500.

9°. *Après une partie, trois joueurs comptent leur argent ; un seul ayant perdu, les deux autres ont gagné chacun une somme égale à celle qu'ils ont mise au jeu ; après une seconde partie, l'un des joueurs qui avait gagné dans la précédente perd, et les deux autres gagnent chacun une somme égale à celle qu'ils avaient en commençant la seconde partie ; à une troisième partie, le joueur qui jusque-là avait gagné, perd, avec chacun des deux autres une somme égale à celle qu'ils avaient en commençant cette dernière partie, et alors les trois joueurs sortent avec* 120 *francs chacun ; combien avaient-ils en entrant au jeu ?*

Rép. *Celui qui a perdu à la* 1re *partie avait* 195 *francs*,
celui qui a perdu à la 2e 105,
celui qui a perdu à la 3e 60.

Formules générales pour la résolution des équations du premier degré.

83. Pour obvier à l'inconvénient que j'ai fait remarquer au commencement du numéro précédent, on a imaginé de représenter par la même lettre tous les coefficiens d'une même inconnue, mais de les distinguer en les affectant d'un ou de plusieurs accens, suivant le nombre des équations.

Les équations générales à deux inconnues s'écrivent ainsi:

$$a\,x + b\,y = c,$$
$$a'\,x + b'\,y = c'.$$

Les coefficiens de l'inconnue x sont représentés tous deux par a, ceux de y par b; mais l'accent que portent les lettres de la seconde équation, fait voir qu'on ne les regarde pas comme ayant la même valeur que leurs correspondantes dans la première. Ainsi a' est une quantité différente de a, b' une quantité différente de b.

Lorsqu'il y a trois équations, on les écrit ainsi :

$$a\,x + b\,y + c\,z = d,$$
$$a'\,x + b'\,y + c'\,z = d',$$
$$a''x + b''y + c''z = d''.$$

Tous les coefficiens de l'inconnue x sont désignés par la lettre a, ceux de y par b, ceux de z par c; mais chaque lettre porte des accens différens qui marquent qu'elle appartient à diverses quantités. Ainsi a, a', a'', sont trois quantités différentes, et de même des autres.

Suivant cette marche, s'il y avait quatre inconnues et quatre équations, on les écrirait ainsi :

$$a\,x + b\,y + c\,z + d\,u = e,$$
$$a'\,x + b'\,y + c'\,z + d'\,u = e',$$
$$a''\,x + b''\,y + c''\,z + d''\,u = e'',$$
$$a'''\,x + b'''\,y + c'''\,z + d'''\,u = e'''.$$

84. Afin de simplifier les calculs, en évitant les fractions, on modifie ainsi le procédé de l'élimination :

Soient les équations

$$a\,x + b\,y = c,$$
$$a'\,x + b'\,y = c';$$

il est évident que si l'une des inconnues, x, par exemple, avait le même coefficient dans les deux équations, il suffirait de les retrancher l'une de l'autre, pour faire

disparaître cette inconnue. Cela s'aperçoit tout de suite sur les équations

$$10x + 11y = 27,$$
$$10x + 9y = 15,$$

qui donnent

$$11y - 9y = 27 - 15, \text{ ou } 2y = 12, \text{ ou } y = 6.$$

Il est visible aussi qu'on peut rendre immédiatement, les coefficiens de x égaux dans les équations

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c',$$

en multipliant les deux membres de la première par a' coefficient de x dans la seconde, et les deux membres de la seconde par a, coefficient de x dans la première ; on obtient ainsi,

$$aa'x + a'by = a'c,$$
$$aa'x + ab'y = ac'.$$

Retranchant ensuite la première de celles-ci de la seconde, l'inconnue x disparaîtra ; on aura seulement

$$(ab' - a'b)y = ac' - a'c,$$

équation qui ne contient plus que l'inconnue y ; et l'on en déduira

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Le procédé que je viens d'employer peut toujours s'appliquer aux équations du premier degré, pour en chasser l'une quelconque des inconnues.

En éliminant de même l'inconnue y, on aurait la valeur de x.

Si l'on applique ce procédé aux trois équations renfermant x, y et z, on pourra d'abord éliminer x entre la première et la seconde, puis entre la première et la troisième ; on parviendra ainsi à deux équations, qui ne

renfermeront plus que y et z, et entre lesquelles on éliminera ensuite y.

Si l'on effectue le calcul, l'équation en z, à laquelle on parviendra, aura un facteur commun à tous ses termes, et ne sera par conséquent pas la plus simple que l'on puisse obtenir.

85. Bézout a donné une méthode fort simple pour éliminer à la fois toutes les inconnues hors une, et par laquelle on ramène immédiatement la question à des équations qui contiennent une inconnue de moins que les proposées. Quoique ce procédé ne soit nécessaire que lorsqu'il s'agit des équations à trois inconnues, je commencerai par l'appliquer à celles qui n'en contiennent que deux, afin d'embrasser le sujet en entier.

Soient les deux équations

$$a x + b y = c,$$
$$a' x + b' y = c' :$$

en multipliant la première par une quantité m, qui soit indéterminée, il viendra

$$a m x + b m y = c m;$$

et retranchant de ce résultat l'équation

$$a' x + b' y = c',$$

on aura

$$a m x - a' x + b m y - b' y = c m - c',$$
$$\text{ou } (a m - a') x + (b m - b') y = c m - c'.$$

Puisque rien ne détermine la quantité m, on peut supposer qu'elle soit telle, que $b m = b'$. Dans ce cas, le terme multiplié par y disparaissant, on a

$$x = \frac{c m - c'}{a m - a'};$$

mais à cause de $bm = b'$, il résulte,

$$m = \frac{b'}{b} :$$

donc

$$x = \frac{\frac{cb'}{b} - c'}{\frac{ab'}{b} - a'} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Au lieu de supposer $bm = b'$, si l'on fait $am = a'$, le terme affecté de x s'évanouira, et il viendra

$$y = \frac{cm - c'}{bm - b'}.$$

La valeur de m ne sera plus la même que tout-à-l'heure ; car on aura

$$m = \frac{a'}{a} ;$$

et en substituant dans l'expression de y, on trouvera

$$y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'}.$$

En changeant les signes du numérateur et du dénominateur de cette valeur (57), son dénominateur sera le même que celui de x, puisqu'on aura

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

86. Soient maintenant les trois équations

$$ax + by + cz = d,$$
$$a'x + b'y + c'z = d',$$
$$a''x + b''y + c''z = d'' :$$

l'analogie conduira aisément à multiplier la première et la seconde par deux quantités indéterminées m et n, à les ajouter ensemble, et à en retrancher la troisième ; car par ce moyen elles seront employées toutes

en même temps, et les deux nouvelles quantités m et n, dont il est permis de disposer à volonté, pourront être déterminées de manière à faire disparaître en même temps du résultat deux des inconnues. En opérant ainsi, et réunissant les termes qui multiplient une même inconnue, on aura

$$(am+a'n-a'')x+(bm+b'n-b'')y+(cm+c'n-c'')z = dm+d'n-d''.$$

Si l'on veut faire disparaître x et y, il faudra poser pour cela les équations

$$a\,m + a'\,n = a'',$$
$$b\,m + b'\,n = b'',$$

et alors il viendra

$$z = \frac{d\,m + d'\,n - d''}{c\,m + c'\,n - c''}.$$

Des deux équations dans lesquelles m et n sont les inconnues, il est facile de déduire la valeur de ces quantités au moyen des résultats obtenus dans le numéro précédent; car il suffit de changer dans ceux-ci x en m, y en n, et d'écrire au lieu des lettres

$$\left.\begin{matrix} a, b, c \\ a', b', c' \end{matrix}\right\} \text{les lettres} \left\{\begin{matrix} a, a', a'' \\ b, b', b'', \end{matrix}\right.$$

ce qui donnera

$$m = \frac{a''b' - b''a'}{a\,b' - b\,a'},$$

$$n = \frac{a\,b'' - b\,a''}{a\,b' - b\,a'}.$$

Substituant ces valeurs dans celle de z, et réduisant tous les termes au même dénominateur, on trouvera

$$z = \frac{d(b'a'' - a'b'') + d'(a\,b'' - b\,a'') - d''(a\,b' - b\,a')}{c(b'a'' - a'b'') + c'(a\,b'' - b\,a'') - c''(a\,b' - b\,a')}.$$

Si l'on avait fait évanouir les termes affectés de x et de z, on aurait eu y; les lettres m et n auraient dépendu des deux équations

$$a\,m + a'\,n = a'', \qquad c\,m + c'\,n = c'';$$

et en opérant comme ci-dessus, on aurait trouvé

$$y = \frac{d(c'a''-a'c'') + d'(ac''-ca'') - d''(ac'-ca')}{b(c'a''-a'c'') + b'(ac''-ca'') - b''(ac'-ca')}.$$

Enfin, en posant les équations

$$b\,m + b'\,n = b'', \qquad c\,m + c'\,n = c'',$$

on ferait disparaître les termes multipliés par y et par z; et il viendrait

$$x = \frac{d(c'b''-b'c'') + d'(bc''-cb'') - d''(bc'-cb')}{a(c'b''-b'c'') + a'(bc''-cb'') - a''(bc'-cb')}.$$

En développant ces valeurs de manière à rendre leurs termes alternativement positifs et négatifs, et changeant en même temps les signes du numérateur et ceux du dénominateur, dans la première et dans la troisième, on pourra leur donner les formes suivantes :

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

$$y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

87. Soient les quatre équations

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z + d\,u &= e, \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z + d'\,u &= e', \\ a''\,x + b''\,y + c''\,z + d''\,u &= e'', \\ a'''\,x + b'''\,y + c'''\,z + d'''\,u &= e''', \end{aligned}$$

on multipliera la première par m, la seconde par n, la troisième par p, on ajoutera les produits, et en retranchant ensuite la quatrième, on trouvera

$$(am+a'n+a''p-a''')x+(bm+b'n+b''p-b''')y$$
$$+(cm+c'n+c''p-c''')z+(dm+d'n+d''p-d''')u$$
$$=em+e'n+e''p-e'''.$$

Pour avoir u, on posera

$$am+a'n+a''p=a''',$$
$$bm+b'n+b''p=b''',$$
$$cm+c'n+c''p=c''',$$

et il viendra

$$u=\frac{em+e'n+e''p-e'''}{dm+d'n+d''p-d'''}.$$

Le cas de quatre inconnues est donc ramené à celui de trois, au moyen des équations précédentes qui déterminent les facteurs m, n, p. Il faut remarquer que les lettres d et e, n'entrant point dans ces équations, n'entreront pas non plus dans les valeurs de m, n, p, et qu'il suit de là que le *numérateur de l'expression de* u *se conclut du dénominateur en changeant les* e, *qui sont les coefficiens de cette inconnue, dans les* d *correspondans, qui sont les termes tout connus des équations proposées.*

Cette loi, qu'on aurait déjà pu apercevoir dans les nos 85 et 86, s'étend à toutes les inconnues, en quelque nombre qu'elles soient. Quant à leur numérateur, l'observation des résultats obtenus précédemment, fournit le moyen de les retrouver sans calcul.

88. Pour remonter au premier anneau de la chaîne, je prends l'équation à une inconnue $ax=b$; j'en tire

$$x=\frac{b}{a},$$

où l'on voit que le numérateur est le terme tout connu b, et le dénominateur, le coefficient a de l'inconnue.

Les deux équations

$$ax+by=c, \qquad a'x+b'y=c',$$

ont conduit à

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}, \qquad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'};$$

le dénominateur se compose encore des lettres a, a', b, b', qui multiplient les inconnues : on écrit d'abord la lettre a à côté de la lettre b, ce qui donne ab ; on échange ensuite a et b entre eux pour avoir ba, et en affectant cet arrangement du signe —, il vient $ab-ba$; on met enfin un accent à la seconde lettre de chaque terme : voilà le dénominateur $ab'-ba'$ formé.

Cela fait, pour former le numérateur de x, on change, d'après la remarque qui termine le n° précédent, les a en c, et les b en c pour celui de y ; de cette manière, on trouve que l'un est $cb'-bc'$, et l'autre $ac'-ca'$.

Il faut un peu plus d'attention pour reconnaître la formation du dénominateur des équations à trois inconnues. Cependant, puisque dans le cas des deux inconnues, le dénominateur présente tous les arrangemens possibles des deux lettres a et b qui multiplient ces inconnues, il est naturel de penser que lorsqu'il y a trois inconnues, leur dénominateur doit renfermer tous les arrangemens des trois lettres a, b, c ; et pour former ces arrangemens avec ordre, on s'y prend de la manière suivante.

On forme d'abord les arrangemens $ab-ba$ des deux lettres a et b ; à la suite du premier ab, on écrit la troisième lettre c, ce qui donne abc ; et faisant passer cette lettre par toutes les places, avec l'attention de changer le signe chaque fois, et de ne pas troubler l'ordre respectif de a et de b, il en résulte

$$abc-acb+cab.$$

Opérant de même sur le second arrangement de deux lettres $-ba$, il vient

$$-bac+bca-cba;$$

réunissant ces produits aux trois précédens, puis marquant la seconde lettre d'un accent et la troisième de deux, on trouve

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'',$$

résultat conforme à celui que présentent les formules obtenues immédiatement.

Il est facile de conclure de là, que pour former le dénominateur dans le cas de quatre inconnues, il faudrait introduire la lettre d dans chacun des six produits

$$abc-acb+cab-bac+bca-cba,$$

et lui faire occuper successivement toutes les places; le produit abc, par exemple, donnerait les quatre suivans:

$$abcd-abdc+adbc-dabc.$$

En opérant de même sur les cinq autres produits de trois lettres, le résultat total aurait vingt-quatre termes, dans chacun desquels la seconde lettre porterait un accent, la troisième deux, et la quatrième trois (*).

89. Pour faire servir ces formules à la résolution des équations numériques, il faudra comparer terme à terme, les équations proposées, avec les équations générales des numéros précédens.

Pour résoudre, par exemple, les trois équations

(*) M. Laplace, dans la seconde partie des Mémoires de l'Académie des Sciences pour 1772, page 294, a démontré *à priori* ces règles. Voyez aussi les *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, par M. Gergonne, T. IV, page 148, et T. XII, p 381.

$$7x + 5y + 2z = 79,$$
$$8x + 7y + 9z = 122,$$
$$x + 4y + 5z = 55,$$

il faudra les comparer, terme à terme, avec celles du n° 86, ce qui donnera

$$a = 7,\ b = 5,\ c = 2,\ d = 79,$$
$$a' = 8,\ b' = 7,\ c' = 9,\ d' = 122,$$
$$a'' = 1,\ b'' = 4,\ c'' = 5,\ d'' = 55.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions générales des inconnues x, y et z, et effectuant les opérations indiquées, on trouvera

$$x = 4, \qquad y = 9, \qquad z = 3.$$

Il est important de remarquer que les mêmes expressions serviraient encore, quand les équations proposées n'auraient pas tous leurs termes affectés du signe $+$, comme semblent le supposer les équations générales dont ces expressions sont déduites. Soient, pour exemple,

$$3x - 9y + 8z = 41,$$
$$-5x + 4y + 2z = -20,$$
$$11x - 7y - 6z = 37;$$

il faudra, en comparant les termes de ces équations à leurs correspondans dans les équations générales, avoir égard aux signes, ce qui donnera

$$a = +3,\ b = -9,\ c = +8,\ d = +41,$$
$$a' = -5,\ b' = +4,\ c' = +2,\ d' = -20,$$
$$a'' = +11,\ b'' = -7,\ c'' = -6,\ d'' = +37,$$

et ensuite déterminer, conformément aux règles du numéro 31, le signe que doit prendre chaque terme des expressions générales de x, y, z, d'après les signes des facteurs dont il est composé. On trouvera d'abord que le premier terme du dénominateur commun, qui est $ab'c''$, devenant $+3 \times +4 \times -6$, change de signe, et produit -72; et en faisant la même chose pour les

autres termes, tant des numérateurs que des dénominateurs, prenant, d'une part, la somme de ceux qui sont positifs, et de l'autre, celle de ceux qui sont négatifs, on obtiendra

$$x = \frac{2774 - 2834}{592 - 622} = \frac{-60}{-30} = +2,$$

$$y = \frac{3022 - 2932}{592 - 622} = \frac{+90}{-30} = -3,$$

$$z = \frac{3859 - 3889}{592 - 622} = \frac{-30}{-30} = +1.$$

Des équations du second degré à une seule inconnue.

90. Dans les équations que j'ai traitées jusqu'ici, les inconnues ne montaient qu'à la première puissance, ou n'étaient point multipliées entre elles : ces équations n'étaient que du *premier degré*; mais si l'on se proposait seulement la question suivante : *Trouver un nombre tel, qu'étant multiplié par son quintuple, le produit soit égal à* 125, en désignant ce nombre par x, son quintuple serait $5x$, et on aurait

$$5x^2 = 125.$$

Cette équation est du *second degré*, parce qu'elle renferme x^2, ou la seconde puissance de l'inconnue. Si l'on dégage cette seconde puissance de son coefficient 5, on obtiendra

$$x^2 = \frac{125}{5}, \quad \text{ou} \quad x^2 = 25.$$

On ne saurait ici conclure l'inconnue x comme dans le numéro 11, et la question proposée est seulement ramenée à trouver un nombre qui, multiplié par lui-même, donne 25. Avec un peu d'attention, on reconnaît que ce nombre est 5; mais il arrive rarement que l'on puisse deviner ainsi la solution cherchée; on est donc conduit à cette nouvelle question numérique : *trouver un nom-*

bre qui, multiplié par lui-même, donne un produit égal à un nombre proposé, ou, ce qui est la même chose, revenir de la seconde puissance au nombre qui l'a produite, et qu'on appelle sa *racine quarrée*. Je vais m'occuper d'abord de cette question, parce que la solution servira pour déterminer les inconnues dans toutes les équations du second degré.

91. La méthode qu'il faut employer pour trouver ou *extraire* la racine des nombres, suppose que l'on connaisse la seconde puissance de ceux qui sont exprimés par un seul chiffre ; voici donc les neuf premiers nombres avec leur seconde puissance écrite au-dessous de chacun :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81.

On voit par cette table que la seconde puissance d'un nombre exprimé par un seul chiffre, n'en contient pas plus de deux : 10, qui est le plus petit des nombres exprimés par deux chiffres, en a trois à son quarré, 100. Pour se préparer à décomposer la seconde puissance d'un nombre exprimé par deux chiffres, il faut en étudier d'abord la formation; et pour cela, je vais chercher comment chaque partie du nombre 47, par exemple, concourt à la production du quarré de ce nombre.

On peut décomposer 47 en $40 + 7$, ou en 4 dixaines et 7 unités ; en représentant par a les dixaines du nombre proposé, et par b ses unités, sa seconde puissance sera exprimée par

$$(a+b)\ (a+b) = a^2 + 2ab + b^2;$$

c'est-à-dire qu'elle contiendra trois parties, savoir : *le quarré des dixaines, deux fois le produit des dixaines par les unités, et le quarré des unités*. Dans l'exemple que j'ai choisi, $a = 4$ dixaines ou 40 unités, et $b = 7$;

on aura

$$\begin{aligned} a^2 &= 1600 \\ 2\,a\,b &= 560 \\ b^2 &= 49 \end{aligned}$$

Total, $a^2 + 2\,a\,b + b^2 = 2209 = 47 \times 47$.

Pour revenir maintenant du nombre 2209 à sa racine 47, on observera d'abord que le quarré des dixaines, 1600, n'a point de chiffre significatif d'un ordre inférieur aux centaines, et qu'il est le plus grand quarré que puissent contenir les 22 centaines de 2209; car 22 tombe entre 16 et 25, c'est-à-dire entre le quarré de 4 et celui de 5, comme 47 tombe entre 4 dixaines ou 40, et 5 dixaines ou 50.

Si donc on cherche le plus grand quarré contenu dans 22, on trouvera 16, dont la racine 4 exprimera les dixaines de celle de 2209: retranchant ensuite 16 centaines ou 1600, de 2209, le reste 609 contiendra encore le double produit des dixaines par les unités, 560, et le quarré des unités, 49. Mais le double produit des dixaines par les unités, n'ayant point de chiffres d'un ordre inférieur aux dixaines, doit se trouver dans les deux premiers chiffres 60 du reste 609, qui contiendront en outre les dixaines provenues du quarré des unités. Cependant, si l'on divise 60 par le double des dixaines 8, on aura, en négligeant le reste, un quotient 7 égal aux unités cherchées. Multipliant ensuite par 7 le nombre 8, considéré comme des dixaines, on formera le double du produit des dixaines par les unités, 560, et le retranchant du reste total 609, on obtiendra une différence 49, qui doit être, et qui est en effet le quarré des unités.

L'opération que je viens de raisonner se dispose ainsi :

22,09	47
16	87
609	
609	
000	

On écrit le nombre proposé comme s'il s'agissait de le diviser par un autre, et on destine à la racine la place que devrait occuper le diviseur. Ensuite on sépare par une virgule les unités et les dixaines, pour ne considérer que les deux premiers chiffres sur la gauche, qui doivent contenir le quarré des dixaines de la racine. On cherche le plus grand quarré 16, contenu dans ces deux chiffres; on en porte la racine 4 à la place qui lui est affectée, et on retranche 16 de 22. A côté du reste 6, on abaisse les deux autres chiffres, 09, du nombre proposé; on sépare le dernier qui n'entre point dans le double produit des dixaines par les unités; on divise la partie restante à gauche par 8, double des dixaines de la racine, ce qui donne pour quotient les unités 7; et pour former tout d'un coup les deux dernières parties du quarré que doit contenir 609, on écrit 7 à côté de 8, d'où résulte le nombre 87, égal au double des dixaines plus les unités, ou à $2a+b$, et qui, étant multiplié par 7 ou par b, reproduit $609 = 2ab + b^2$, ou le double produit des dixaines par les unités, plus le quarré des unités: faisant la soustraction il ne reste rien; et l'opération achevée prouve que 47 est la racine quarrée de 2209.

Soit encore à extraire la racine quarrée de 324; je dispose l'opération comme il suit:

3,24	18
1	
22,4	28
22 4	
000	

et, d'après ce qui vient d'être dit, je trouve 1 pour les dixaines de la racine; ces dixaines étant doublées, me donnent le nombre 2, par lequel il faut diviser les deux premiers chiffres 22 du reste. Or 22 contient 2 onze fois, et non-seulement on ne peut avoir à la racine, ni plus de 10, ni 10, mais 9 lui-même serait encore trop fort dans le cas actuel; car en écrivant 9 à côté de 2, et multipliant 29 par 9, comme le prescrit la règle, on aurait pour résultat 261, qu'on ne saurait retrancher de 224. On ne doit donc regarder la division de 22 par 2, que comme un moyen approximatif de trouver les unités, et il faut diminuer le quotient obtenu, jusqu'à ce qu'on parvienne à un produit qui ne surpasse point le reste 224, condition que remplit le nombre 8, puisque $8 \times 28 = 224$; donc la racine cherchée est 18.

En formant les trois parties du quarré de 18, on trouve

$$\begin{aligned} a^2 &= 100 \\ 2ab &= 160 \\ b^2 &= 64 \\ \text{Total,} \quad & 324 = 18 \times 18, \end{aligned}$$

et on voit que les 6 dixaines que contient le quarré des unités étant réunies à 160, double produit des dixaines par les unités, altèrent ce produit, de manière que la division par le double des dixaines ne peut plus donner les unités seules.

92. L'extraction de la racine quarrée d'un nombre composé de trois ou de quatre chiffres, ne saurait arrêter, d'après ce qui précède; mais il faut encore quelques détails pour mettre le lecteur en état d'extraire la racine d'un nombre exprimé par autant de chiffres qu'on voudra, et on va les voir naître des principes déjà posés.

Tout nombre au-dessous de 100 n'aura que quatre chiffres à son quarré, puisque celui de 100 est 10000

ou le plus petit nombre exprimé par cinq chiffres. Cela posé, pour examiner la formation du quarré d'un nombre au-dessus de 100, de 473, par exemple, on pourra décomposer ce nombre en 470+3, ou 47 dixaines, plus 3 unités; et pour déduire son quarré de la formule

$$a^2 + 2ab + b^2,$$

on fera $a = 47$ dixaines $= 470$ unités, $b = 3$ unités, d'où

$$\begin{aligned} a^2 &= 220900 \\ 2ab &= 2820 \\ b^2 &= 9 \\ \text{Total,} \quad & 223729 = 473 \times 473. \end{aligned}$$

On voit dans cet exemple que le quarré des dixaines n'a point de chiffres significatifs d'un ordre inférieur aux centaines, et cela doit être en général, puisque des dixaines multipliées par des dixaines, produisent toujours des centaines (*Arith.* 32).

C'est donc dans la partie 2237 qui reste sur la gauche du nombre proposé, après qu'on en a séparé les dixaines et les unités, qu'il faut chercher le quarré des dixaines; et comme 473 tombe entre 47 dixaines, ou 470, et 48 dixaines, ou 480, 2237 doit tomber entre le quarré de 47 et celui de 48, d'où il suit que le plus grand quarré contenu dans 2237, sera celui de 47, ou des dixaines de la racine. Il est évident que pour retrouver ces dixaines, il faut opérer comme si l'on voulait extraire la racine quarrée de 2237; mais au lieu d'arriver à un résultat exact, on trouvera un reste contenant les centaines formées par le double produit des 47 dixaines multipliées par les unités.

Pour effectuer le calcul, on dispose l'opération comme on le voit ici.:

22,37,29	473
16	87
63,7	943
60 9	
282,9	
282 9	
000 0	

On sépare d'abord les deux derniers chiffres 29, et pour extraire la racine du nombre 2237 restant sur la gauche, on sépare encore les deux derniers chiffres 37 de ce nombre; de cette manière, le nombre proposé est partagé en tranches de deux chiffres, en allant de droite à gauche. On opère sur les deux premières tranches comme on l'a fait dans le numéro précédent sur le nombre 2209, ce qui donne les deux premiers chiffres 47 de la racine; mais on trouve un reste 28, lequel, joint aux deux chiffres 29 de la dernière tranche, renferme le double du produit des 47 dixaines par les unités, et le quarré des unités. On sépare le chiffre 9, qui ne peut faire partie du double produit des dixaines par les unités, et on divise 282 par 94, double des 47 dixaines; écrivant le quotient 3 à côté de 94, et multipliant 943 par 3, il vient 2829, nombre précisément égal au dernier reste, et l'opération est terminée.

93. Pour montrer comment il faut opérer sur un nombre quelconque, je vais extraire la racine de 22391824. Quelle que soit cette racine, on peut toujours la concevoir décomposée en dixaines et en unités, comme dans les exemples précédens. Le quarré des dixaines n'ayant aucun chiffre significatif d'un ordre inférieur aux centaines, les deux derniers chiffres 24 ne pourront y entrer; on les séparera

donc, et la question sera ramenée d'abord à chercher le plus grand quarré contenu dans la partie 223918, restante à gauche. Cette partie étant composée de plus de deux chiffres, il en faut conclure que le nombre qui exprime les dixaines de la racine cherchée, en a plus d'un; il peut donc être décomposé à son tour en dixaines et en unités. Le quarré de ces dixaines n'entrant point dans les deux derniers chiffres 18 de la partie 223918, c'est dans les chiffres 2239 restant à gauche, qu'il faudra le chercher; et puisque 2239 a encore plus de deux chiffres, le quarré qu'il doit contenir en renfermera au moins deux à sa racine; le nombre qui exprime les dixaines que l'on cherche, aura donc plus d'un chiffre : c'est donc enfin dans 22 qu'il faudra chercher le quarré de celui qui représente les unités de l'ordre le plus élevé de la racine demandée. Par cette suite de raisonnemens, qu'on peut pousser aussi loin qu'on voudra, le nombre proposé se trouvera partagé en tranches de deux chiffres en allant de droite à gauche; il est bon néanmoins d'être prévenu que la dernière tranche à gauche pourra ne contenir qu'un seul chiffre.

Le nombre proposé étant ainsi partagé en tranches, et disposé comme on le voit ici, on opère sur les trois premières tranches comme dans l'exemple du numéro précédent; et lorsqu'on a trouvé les trois premiers chiffres 473, à côté du reste 189, on abaisse la quatrième tranche 24, et on considère le nombre 18924, comme contenant le double produit des 473 dixaines trouvées par les unités cherchées,

22,39,18,24	4732
16	87
63,9	943
60 9	9462
301,8	
282 9	
1892,4	
1892 4	
0000	

plus le quarré de ces unités. On sépare le dernier chiffre 4; on divise ceux qui restent à gauche par 946, double de 473, et on fait ensuite la vérification du quotient 2, comme dans les opérations précédentes.

L'opération se termine là dans cet exemple ; mais il est aisé de voir que s'il y avait une tranche de plus, les quatre chiffres trouvés 4732, exprimeraient les dixaines d'une racine dont on chercherait les unités, et que par conséquent il faudrait diviser le reste qu'il y aurait alors, plus le premier chiffre de la tranche suivante, par le double de ces dixaines, et ainsi de suite pour chacune des tranches à abaisser successivement.

94. S'il arrivait qu'après avoir abaissé une tranche, le reste, joint au premier chiffre de cette tranche, ne contînt point le double des chiffres trouvés, il faudrait poser 0 à la racine ; car, alors, la racine n'aurait point d'unités de cet ordre : on abaisserait ensuite la tranche suivante pour continuer l'opération comme à l'ordinaire. L'exemple ci-joint est relatif à ce cas. On n'a point écrit les quantités à soustraire, mais on a effectué les soustractions par la pensée, comme dans la division.

49,42,09	703
04,20,9	1403
0 00 0	

95. Tous les nombres ne sont pas des quarrés parfaits. En jetant les yeux sur la table de la page 135, on voit qu'entre les quarrés de chacun des neuf premiers nombres, il existe des lacunes comprenant plusieurs nombres qui n'ont point de racine ; 45, par exemple, n'est point un quarré, puisqu'il tombe entre 36 et 49. Il arrivera donc le plus souvent que le nombre dont on demandera la racine quarrée, n'en aura point ; mais en opérant comme s'il en avait une, le résultat sera la racine du plus grand quarré qu'il contient. Si l'on cherche, par exemple, la racine de 2276, on trouvera 47, et il restera 67, ce qui montre que

le plus grand quarré contenu dans 2276, est celui de 47, ou 2209.

Comme on pourrait craindre, après avoir trouvé la racine du plus grand quarré contenu dans un nombre, d'avoir mis quelques chiffres trop faibles à la racine, voici un moyen de reconnaître si le reste est trop considérable, et si la racine trouvée est trop petite. Le quarré de $a + b$ étant

$$a^2 + 2ab + b^2,$$

si l'on fait $b = 1$, le quarré de $a + 1$ sera

$$a^2 + 2a + 1,$$

quantité qui diffère de a^2, quarré de a, du double de a, plus l'unité. Donc *si la racine trouvée devait être augmentée de l'unité ou de plus que l'unité, il faudrait que son quarré, retranché du nombre proposé, laissât un reste au moins égal à deux fois cette racine, plus l'unité.* Toutes les fois que cette circonstance n'aura pas lieu, la racine extraite sera en effet celle du plus grand quarré contenu dans le nombre proposé.

96. Puisque, pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, il est évident que le produit d'une fraction par elle-même, ou *le quarré d'une fraction est égal au quarré de son numérateur, divisé par le quarré de son dénominateur.* Il suit de là que *pour extraire la racine quarrée d'une fraction, il faut extraire celle de son numérateur et celle de son dénominateur.* Ainsi la racine de $\frac{25}{64}$ est $\frac{5}{8}$, parce que 5 est la racine quarrée de 25, et 8 celle de 64.

C'est une chose très importante à remarquer, que

non-seulement les quarrés des fractions proprement dites, sont toujours des fractions, mais que *tout nombre fractionnaire irréductible, étant multiplié par lui-même, donnera toujours un résultat fractionnaire aussi irréductible.*

97. Cette proposition repose sur celle-ci : *Tout nombre premier* P, *qui divise le produit* AB *de deux nombres* A *et* B, *divise nécessairement l'un de ces nombres.*

Je suppose qu'il ne divise pas B, et que B le surpasse; en désignant par q le quotient entier de cette division, et par B' le reste, on aura

$$B = qP + B',$$

d'où, en multipliant par A, on déduira

$$AB = qAP + AB',$$

et divisant les deux membres de cette équation par P, on obtiendra

$$\frac{AB}{P} = qA + \frac{AB'}{P};$$

d'où il résulte que la divisibilité de AB par P entraîne celle du produit AB' par le même nombre. Or B' étant le reste de la division de B par P, est nécessairement moindre que P: ainsi, ne pouvant pas diviser B' par P, on divisera P par B', on aura un quotient q' et un reste B''; puis on divisera P par B'', on aura un quotient q'' et un reste B''', et ainsi de suite, puisque P est un nombre premier.

Cela posé, on aura cette suite d'équations

$$P = q'B' + B'', \quad P = q''B'' + B''', \text{ etc.};$$

multipliant chaque membre par A, on obtiendra

$$AP = q'AB' + AB'', \quad AP = q''AB'' + AB''', \text{ etc.}$$

divisant par P, il viendra

$$A = q' \frac{AB'}{P} + \frac{AB''}{P}, \quad A = q'' \frac{AB''}{P} + \frac{AB'''}{P}, \text{ etc.},$$

résultats qui font voir que AB' étant divisible par P, les produits AB'', AB''', etc., doivent l'être aussi. Mais les restes B', B'', B''', etc., deviennent de plus en plus petits; et l'on doit tomber enfin sur l'unité, car les opérations indiquées ci-dessus se continuent de la même manière tant que ces restes surpassent 1, puisque P est un nombre premier; et quand on est parvenu à l'unité, on a le produit $A \times 1$, qui doit être divisible par P : donc A, lui-même, doit être divisible par P.

Il suit de là que si le nombre premier P, qu'on suppose ne pas diviser B, ne divise pas non plus A, il ne divisera point le produit de ces nombres.

(*Cette démonstration est, à peu près, extraite de la* Théorie des nombres de M. Legendre.) (*)

98. Maintenant, lorsque la fraction $\frac{b}{a}$ est irréductible, il n'y a aucun nombre premier qui puisse diviser à la

(*) Il est facile de voir que la proposition ci-dessus s'étend à un produit composé d'autant de facteurs que l'on voudra, et que si ces facteurs sont tous des nombres premiers, le produit ne peut être divisé par aucun autre nombre premier, ce qui prouve que la décomposition d'un nombre en facteurs simples (*Arith.* 162) ne saurait s'effectuer que d'une seule manière.

De plus, un nombre composé ne pouvant pas diviser un autre nombre, sans que celui-ci ne soit divisible successivement par chacun des facteurs simples du premier, il en résulte que tout nombre composé qui est premier avec l'un des facteurs d'un produit AB, ne divisera ce produit qu'autant qu'il divisera l'autre facteur.

Ceci prouve la proposition énoncée dans le n° 59 de l'*Arithmétique*, que toute fraction dont les termes sont premiers entre eux, est irréductible; car soit $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; on en déduira $d = \frac{bc}{a}$, et si a et b sont premiers entre eux, il faudra, pour que d soit entier, que a divise c, ce qui suppose $c =$ ou $> a$, et d'où il résulte $d =$ ou $> b$.

fois b et a; or, d'après ce qui précède, tout nombre premier qui ne divise pas a, ne peut diviser $a \times a$, ou a^2; tout nombre premier qui ne divise pas b, ne divise pas $b \times b$ ou b^2 : les nombres a^2 et b^2 sont donc alors premiers entre eux; et par conséquent le quarré $\frac{b^2}{a^2}$ de la fraction $\frac{b}{a}$, étant irréductible, comme cette fraction, ne saurait être un nombre entier.

99. Il résulte de cette dernière proposition, que *tous les nombres entiers, qui ne sont point des quarrés parfaits, n'ont point de racine, non-seulement en nombres entiers, mais encore en nombres fractionnaires.* Cependant on sent qu'il doit exister une quantité qui, multipliée par elle-même, produise un nombre quelconque, 2276, par exemple, et que dans ce cas, cette quantité est comprise entre 47 et 48; car 47×47, donne un produit moindre que ce nombre, 48×48 en donne un plus grand; et en partageant l'intervalle qui se trouve entre 47 et 48, par des fractions, on trouve des nombres qui, multipliés par eux-mêmes, donnent des produits plus grands que le quarré de 47, moindres que celui de 48, et de plus en plus approchans du nombre 2276.

L'extraction de la racine quarrée, appliquée aux nombres qui ne sont pas des quarrés parfaits, donne donc naissance à une nouvelle espèce de nombres, de même que la division engendre les fractions; mais il y a cette différence entre les fractions et les racines des nombres qui ne sont pas des quarrés parfaits, que les premières, qui se composent toujours d'un nombre exact de parties de l'unité, ont avec cette unité une *commune mesure*, ou un rapport exprimé par des nombres entiers, et que les secondes n'en ont point.

En concevant l'unité partagée en cinq parties, par exemple, on exprime avec neuf de ces parties le quotient de la division de 9 par 5, ou $\frac{9}{5}$; $\frac{1}{5}$ étant contenu

cinq fois dans l'unité et neuf fois dans $\frac{2}{3}$, est la *commune mesure* de l'unité et de la fraction $\frac{2}{3}$, et le rapport de ces quantités est celui des nombres entiers 5 et 9.

En considérant que les nombres entiers, aussi bien que les fractions, ont avec l'unité une commune mesure, on dit que ces quantités sont *commensurables* avec l'unité, ou simplement *commensurables;* et parce que leurs *rapports*, ou *raisons*, avec l'unité, sont exprimés par des nombres entiers, on désigne aussi les nombres entiers et les fractions, sous le nom commun de *nombres rationnels*.

Au contraire, la racine quarrée d'un nombre qui n'est pas un quarré parfait, est *incommensurable* ou *irrationnelle*, parce que, ne pouvant être représentée par aucune fraction, il s'ensuit qu'en quelque nombre de parties qu'on suppose l'unité divisée, aucune ne sera assez petites pour mesurer en même temps, d'une manière exacte, cette racine et l'unité.

Pour indiquer en général une racine à extraire, soit qu'on puisse l'obtenir exactement ou non, on se sert du signe $\sqrt{\ }$ qu'on nomme *radical;*

$\sqrt{16}$ est la même chose que 4,

$\sqrt{2}$ est *incommensurable* ou *irrationnelle*.

100. Quoiqu'on ne puisse, par aucun nombre entier ou fractionnaire, obtenir une expression exacte de $\sqrt{2}$, on en approche cependant d'aussi près qu'on veut, en convertissant ce nombre en fraction dont le dénominateur soit un quarré; et la racine du numérateur, prise seulement en nombre entier, donne celle du nombre proposé, exprimée en parties de l'espèce marquée par la racine quarrée du dénominateur.

Si l'on convertit, par exemple, le nombre 2 en 25emes, on aura $\frac{50}{25}$. La racine de 50 étant 7 en nombre entier, et celle de 25 étant exactement 5, on aura $\frac{7}{5}$, ou $1\frac{2}{5}$, pour la racine de 2, approchée à moins d'un 5ème.

101. Il est visible que cette opération, fondée sur ce

qu'on a vu, dans le numéro 96, que le quarré d'une fraction était exprimé par une nouvelle fraction qui avait pour numérateur le quarré du numérateur primitif, et pour dénominateur le quarré du dénominateur primitif, s'applique à quelqu'espèce de fraction que ce soit, et plus facilement encore aux décimales qu'à toutes les autres. En effet, il suit de son principe, que le quarré d'un nombre exprimé en dixièmes, doit l'être en centièmes, que celui d'un nombre exprimé en centièmes, doit l'être en dix-millièmes, et ainsi de suite ; et que par conséquent *le nombre des chiffres décimaux du quarré est toujours double de celui de la racine*. Cette dernière remarque peut encore se déduire du principe de la multiplication des nombres décimaux, qui veut qu'un produit renferme autant de chiffres décimaux qu'il y en a tant dans l'un des facteurs que dans l'autre. Dans le cas actuel, le nombre proposé, considéré comme le produit de sa racine multipliée par elle-même, doit avoir deux fois autant de chiffres décimaux que cette racine.

Ce qui précède étant bien compris, il est aisé d'en conclure que si l'on veut obtenir la racine quarrée de 227, par exemple, à moins d'un centième près, il faut réduire ce nombre en dix-millièmes, c'est-à-dire, ajouter quatre zéros à sa suite, ce qui donnera 2270000 dix-millièmes, dont on extraira la racine comme d'un pareil nombre d'unités ; mais pour marquer que le résultat doit être des centièmes, on séparera, par une virgule, les deux derniers chiffres sur la droite. On trouvera ainsi, que la racine de 227, à moins d'un centième près, est 15,06 ; voici l'opération :

2,27,00,00	1506
12,7	25
2 00 00	3006
19 64	

Si le nombre proposé contenait déjà des décimales, il faudrait en rendre le nombre pair, ainsi que l'exige l'extraction. Pour extraire, par exemple, la racine de 51,7, on mettrait un zéro à la suite de ce nombre, pour qu'il eût au moins des centièmes, et on extrairait ensuite la racine de 51,70. Si l'on voulait avoir une décimale de plus, on mettrait deux zéros de plus à la suite de ce nombre, ce qui ferait 51,7000, et l'on trouverait 7,19 pour sa racine.

Ceux qui voudront s'exercer, pourront chercher les racines quarrées des nombres 2 et 3, avec sept chiffres décimaux, ce qui exigera qu'ils mettent quatorze zéros à la suite de ces nombres, et ils devront trouver pour résultat

$$\sqrt{2} = 1{,}4142136, \qquad \sqrt{3} = 1{,}7320508.$$

102. Lorsqu'on a trouvé plus de la moitié des chiffres qu'on veut avoir à la racine, on peut obtenir le reste par la seule division. Soit pour exemple 32976; la racine quarrée de ce nombre est 181, avec un reste 215; en divisant ce reste 215 par 362, double de 181, et poussant le quotient jusqu'à deux décimales, on aura 0,59, qu'il faudra ajouter avec 181, et il en résultera 181,59 pour la racine de 32976, exacte à moins d'un centième près.

Pour prouver la légitimité de ce procédé, je désigne par N le nombre proposé, par a la racine du plus grand quarré contenu dans ce nombre, et par b ce qu'il faut ajouter à cette racine pour avoir la racine exacte du nombre proposé; on aura, d'après ces dénominations,

$$N = a^2 + 2ab + b^2.$$

d'où

$$N - a^2 = 2ab + b^2;$$

et divisant par $2a$, on trouvera

$$\frac{N - a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}.$$

Ce résultat fait voir que le premier membre pourra

être pris pour la valeur de b, toutes les fois que la quantité $\frac{b^2}{2a}$ sera plus petite que l'unité de l'ordre le moins élevé qui se trouve dans b. Mais le quarré d'un nombre ne pouvant avoir au plus que deux fois autant de chiffres que ce nombre, il s'ensuit que si le nombre de chiffres de a surpasse le double de ceux de b, la quantité $\frac{b^2}{2a}$ sera alors une fraction.

Dans l'exemple précédent, $a = 181$ unités ou 18100 centièmes, et a par conséquent un chiffre de plus que le quarré de 59 centièmes; aussi la fraction $\frac{b^2}{2a}$ devient alors $\frac{3481}{36200}$, et se trouve beaucoup au-dessous d'une unité de la seconde partie 59, ou d'un centième d'unité de la première.

103. Ceci conduit à une méthode pour approcher de la racine quarrée d'un nombre par des fractions ordinaires, en continuant indéfiniment le procédé de l'extraction des racines. En effet, a étant la racine du plus grand quarré contenu dans N, b est nécessairement une fraction, et la quantité $\frac{b^2}{2a}$ étant alors beaucoup plus petite que b, peut se négliger.

Soit, pour exemple, à extraire la racine quarrée de 2; le plus grand quarré contenu dans ce nombre étant 1, après l'en avoir retranché, il reste 1. Divisant ce reste par le double de la racine, on trouve $\frac{1}{2}$; prenant ce quotient pour la quantité b, il vient, pour une première approximation de la racine, $1 + \frac{1}{2}$, ou $\frac{3}{2}$. Élevant cette racine au quarré, on trouve $\frac{9}{4}$, qui, retranchés de 2 ou $\frac{8}{4}$, donneront pour reste $-\frac{1}{4}$. Dans ce cas, la formule

$$\frac{N - a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}$$

devient

$$-\tfrac{1}{12} = b + \frac{b^2}{2a}.$$

En prenant $-\frac{1}{12}$ pour b, il viendra pour la seconde approximation $\frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$; quarrant $\frac{17}{12}$, on trouvera $\frac{289}{144}$, quantité qui surpasse encore 2 ou $\frac{288}{144}$. Substituant $\frac{17}{12}$ à la place de a, il en résultera

$$-\frac{1}{12 \times 34} = b + \frac{b^2}{2a};$$

ce qui donnera

$$b = -\frac{1}{12 \times 34} = -\frac{1}{408};$$

la troisième approximation sera donc

$$\frac{17}{12} - \frac{1}{12 \times 34} = \frac{17 \times 34 - 1}{408} = \frac{577}{408}.$$

Il est facile de continuer cette opération aussi loin qu'on voudra. Je donnerai dans le *Complément* de ce Traité, d'autres formules plus commodes pour extraire les racines en général.

104. Pour approcher de la racine quarrée d'une fraction, l'idée qui s'offre d'abord est d'extraire par approximation la racine quarrée du numérateur et celle du dénominateur; mais en y réfléchissant un peu, on s'apercevra bientôt qu'on peut éviter l'une de ces opérations, en faisant en sorte que le dénominateur soit un quarré parfait, ce qui ne tient qu'à multiplier par ce dénominateur, les deux termes de la fraction proposée. Si l'on avait, par exemple, à extraire la racine quarrée de $\frac{3}{7}$, on changerait cette fraction en

$$\frac{3 \times 7}{7 \times 7} = \frac{21}{49},$$

en multipliant ses deux termes par le dénominateur 7. La racine du numérateur de cette dernière fraction, étant

prise en nombre entier, donne $\frac{4}{7}$ pour celle de $\frac{3}{7}$, et ce résultat est approché à moins de $\frac{1}{7}$.

Pour obtenir un plus haut degré d'exactitude, il faudrait convertir, au moins par approximation, la fraction $\frac{3}{7}$ en une autre dont le dénominateur fût le quarré d'un nombre plus grand que 7. On aurait, par exemple, à moins de $\frac{1}{15}$ près, la racine demandée, si l'on convertissait $\frac{3}{7}$ en 225èmes, puisque 225 est le quarré de 15; il viendrait ainsi $\frac{675}{7}$ de 225èmes ou $\frac{96}{225}$, à moins de $\frac{1}{225}$; la racine de $\frac{96}{225}$ est entre $\frac{9}{15}$ et $\frac{10}{15}$, mais plus près de la seconde fraction que de la première, parce que 96 est plus près de 100 que de 81 : on aurait donc $\frac{10}{15}$ ou $\frac{2}{3}$ pour la racine de $\frac{3}{7}$ à moins de $\frac{1}{15}$ près.

Si l'on voulait employer les décimales pour extraire la racine approchée du numérateur de la fraction $\frac{21}{49}$, on trouverait 4,583 pour la racine approchée du numérateur 21, et on diviserait ce résultat par la racine du nouveau dénominateur. En poussant le quotient jusqu'à trois décimales, on aurait 0,655.

105. Actuellement on est en état de résoudre toutes les équations dans lesquelles il n'entre que la seconde puissance de l'inconnue, combinée avec des quantités connues.

Il suffit pour cela de *réunir dans un seul membre tous les termes affectés de cette puissance, puis de la dégager de ses multiplicateurs, par la règle du* n° 11 : *on obtient la valeur de l'inconnue, en extrayant la racine quarrée de l'autre membre.*

Soit pour exemple l'équation

$$\frac{5}{7}x^2 - 8 = 4 - \frac{2}{3}x^2.$$

En faisant disparaître les diviseurs, on trouve d'abord

$$15x^2 - 168 = 84 - 14x^2.$$

Transposant dans le premier membre le terme $14x^2$, et dans le second le terme 168, il viendra

$$15x^3 + 14x^2 = 84 + 168,$$

ou
$$29x^2 = 252,$$

et
$$x^2 = \tfrac{252}{29},$$

$$x = \sqrt{\tfrac{252}{29}}.$$

Il faut bien remarquer que pour indiquer la racine de la fraction $\frac{252}{29}$, j'ai fait descendre le signe $\sqrt{}$ au-dessous de la barre qui sépare le numérateur du dénominateur. Si j'avais écrit $\frac{\sqrt{252}}{29}$, cette expression aurait marqué le quotient que donne la racine quarrée du nombre 252, quand on la divise par 29, résultat différent du premier, dans lequel la division doit être effectuée avant l'extraction de la racine.

Soit encore l'équation littérale

$$ax^2 + b^3 = cx^2 + d^3;$$

en opérant comme sur la précédente, on aura successivement

$$ax^2 - cx^2 = d^3 - b^3,$$

$$x^2 = \frac{d^3 - b^3}{a - c},$$

$$x = \sqrt{\frac{d^3 - b^3}{a - c}}.$$

Je ferai observer à cette occasion, que lorsqu'on veut indiquer la racine quarrée d'une quantité complexe, il faut prolonger la barre supérieure du radical sur toute la quantité.

La racine de la quantité $4a^2b - 2b^3 + c^3$, s'écrirait ainsi,

$$\sqrt{4a^2b - 2b^3 + c^3},$$

ou bien encore,

$$\sqrt{(4a^2b - 2b^2 + c^2)},$$

en substituant à la barre supérieure du radical une parenthèse renfermant toutes les parties de la quantité dont il faut extraire la racine ; et cette dernière expression peut quelquefois paraître préférable à l'autre (35).

En général, toute équation du second degré de l'espèce que je considère ici, pourra, par la transposition de ses termes, être ramenée à la forme

$$\frac{px^2}{q} = a,$$

$\frac{p}{q}$ désignant le coefficient quelconque de x^2 ; et on en tirera

$$x^2 = \frac{aq}{p},$$

$$x = \sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

106. Par rapport aux nombres absolus, cette solution est complète, puisqu'elle ramène à pratiquer sur le nombre, soit entier, soit fractionnaire, que représente la quantité $\frac{aq}{p}$, une opération arithmétique conduisant toujours à un résultat soit exact, soit approchant du vrai d'aussi près qu'on voudra ; mais en ayant égard aux signes dont les quantités peuvent être affectées, l'extraction de la racine quarrée laisse une ambiguité d'après laquelle toute équation du second degré est susceptible de deux solutions, tandis que celles du premier degré n'en ont qu'une.

En effet, dans l'équation générale $x^2 = a5$, la valeur de x étant la quantité qui, élevée au quarré, produit

25, elle pourra, si l'on considère les quantités algébriquement, être affectée indifféremment du signe + ou du signe —; car, soit qu'on la désigne par + 5 ou par — 5, on aura également pour son quarré,

$$+5\times+5=+25 \text{ ou } -5\times-5=+25 :$$

on peut donc prendre

$$x=+5,$$

ou

$$x=-5.$$

Par la même raison, pour l'équation générale

$$x^2=\frac{aq}{p},$$

on aura indifféremment

$$x=+\sqrt{\frac{aq}{p}},$$

ou

$$x=-\sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

On comprend ces deux expressions dans la suivante :

$$x=\pm\sqrt{\frac{aq}{p}},$$

où le double signe ± indique qu'on peut affecter alternativement du signe + ou du signe —, la valeur numérique de

$$\sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

D'après ce qu'on vient de remarquer, c'est une règle générale, qu'*il faut donner à la racine quarrée d'une quantité quelconque le double signe* ±.

On pourrait, d'après cette règle, demander pourquoi, x étant la racine quarrée de x^2, on n'affecte pas aussi x du double signe $\pm$? On répondra d'abord, avec M. Develey (*Algèbre d'Emile*, T. II.), que la lettre x ayant été posée simplement sans signe (c'est-à-dire avec le signe $+$), comme le symbole de l'inconnue, c'est dans cet état qu'il en faut déterminer la valeur, et que lorsqu'on cherche un nombre x dont le quarré soit b, par exemple, il n'y a que ces deux solutions possibles: $x = +\sqrt{b}$, $x = -\sqrt{b}$. Ensuite, quand même, en résolvant l'équation $x^2 = b$, on écrirait $\pm x = \pm\sqrt{b}$, et qu'on arrangerait ces signes de toutes les manières possibles, savoir :

$$+x = +\sqrt{b}, \quad -x = -\sqrt{b},$$
$$+x = -\sqrt{b}, \quad -x = +\sqrt{b},$$

on n'obtiendrait rien de plus, puisqu'en changeant le signe des membres de la seconde équation de chaque ligne (57), on retomberait sur la première.

107. Il suit encore de la considération des signes, que si le second membre de l'équation générale

$$x^2 = \frac{aq}{p}$$

était un nombre négatif, l'équation serait absurde, puisque le quarré d'une quantité affectée, soit du signe $+$, soit du signe $-$, étant toujours affecté du signe $+$, on ne peut trouver, ni dans l'ordre des quantités positives, ni dans celui des quantités négatives, aucune quantité dont le quarré soit négatif.

C'est cette circonstance qu'on exprime lorsqu'on dit que *la racine d'une quantité négative est imaginaire.*

Si l'on parvenait à l'équation

$$x^2 + 25 = 9,$$

on en tirerait

$$x^2 = 9 - 25,$$

ou

$$x^2 = -16;$$

or il n'y a aucun nombre qui, multiplié par lui-même, puisse produire — 16. Il est bien vrai que — 4 multiplié par + 4 donne — 16; mais ces deux quantités, ayant un signe différent, ne peuvent être considérées comme égales, et leur produit n'est par conséquent pas un quarré. On verra plus bas de nouveaux éclaircissemens sur cette espèce de contradiction, qu'il faut bien distinguer de celle du n° 58, qu'un simple changement dans le signe de l'inconnue a fait disparaître; ici c'est le signe du quarré x^2 qu'il faudrait changer.

108. Pour être complète, une équation du second degré à une seule inconnue doit contenir trois sortes de termes, savoir : des termes affectés du quarré de l'inconnue, d'autres affectés de l'inconnue au premier degré, d'autres enfin tout connus : telles sont les équations

$$x^2 - 4x = 12, \qquad 4x - \tfrac{3}{7}x^2 = 4 - 2x.$$

La première est, à quelques égards, plus simple que la seconde, parce qu'elle ne renferme que trois termes, que le quarré de x y est pris positivement, et n'a pour coefficient que l'unité. C'est sous cette dernière forme qu'on met toujours les équations du second degré avant de les résoudre; en sorte qu'elles peuvent être représentées alors par la formule

$$x^2 + px = q,$$

p et q désignant des quantités connues, soit positives, soit négatives.

Il est visible qu'on amènera toute équation du second degré à cet état, 1°. en passant dans un seul membre tous les termes affectés de x (10); 2°. en changeant le signe de chaque terme de l'équation pour rendre positif

celui de x^2, s'il était d'abord négatif (57) ; 3°. en divisant tous les termes de l'équation par le multiplicateur de x^2, si ce quarré en a un (11), ou en multipliant par son diviseur, s'il est divisé (12).

En appliquant ceci à l'équation

$$4x - \tfrac{3}{5}x^2 = 4 - 2x,$$

elle devient, lorsqu'on passe dans le premier membre les termes affectés de x,

$$-\tfrac{3}{5}x^2 + 6x = 4;$$

lorsqu'on change les signes,

$$\tfrac{3}{5}x^2 - 6x = -4;$$

lorsqu'on multiplie par le diviseur 5,

$$3x^2 - 30x = -20;$$

et lorsqu'on divise par le multiplicateur 3,

$$x^2 - 10x = -\tfrac{20}{3}.$$

En comparant cette équation avec la formule générale

$$x^2 + px = q,$$

on aurait pour ce cas particulier

$$p = -10,\ q = -\tfrac{20}{3}.$$

109. Pour parvenir à la solution des équations ainsi préparées, il faut se rappeler la remarque faite dans le n° 34, que le quarré d'une quantité composée de deux termes, contient toujours le quarré du premier terme, le double du premier terme multiplié par le second, et le quarré du second; et que par conséquent le premier membre de l'équation

$$x^2 + 2ax + a^2 = b,$$

dans laquelle a et b sont des quantités connues, est un quarré parfait, celui de $x + a$, d'où il résulte

$$(x + a)(x + a) = b.$$

Prenant alors la racine quarrée du premier membre, et indiquant celle du second, on aura

$$x+a=\pm\sqrt{b},$$

équation qui n'est plus que du premier degré, par rapport à l'inconnue x, et donne, en transposant,

$$x=-a\pm\sqrt{b}.$$

Une équation du second degré serait donc facilement résolue si elle était ramenée à la forme

$$x^2+2ax+a^2=b,$$

c'est-à-dire si son premier membre était un quarré.

Mais le premier membre de l'équation générale

$$x^2+px=q,$$

renferme déjà deux termes que l'on peut regarder comme faisant partie du quarré d'un binome, savoir : x^2 qui sera le quarré du premier terme x, et px qui sera le double du premier multiplié par le second, lequel ne peut être par conséquent que la moitié de p, ou $\frac{1}{2}p$. Pour achever le quarré du binome $x+\frac{1}{2}p$, il faudrait encore le quarré du second terme $\frac{1}{2}p$; mais ce quarré peut être formé, puisque p et $\frac{1}{2}p$ sont des quantités connues, et peut ensuite être ajouté au premier membre, pourvu qu'on l'ajoute en même temps au second, afin de conserver l'égalité; et ce dernier membre demeurera encore tout connu.

Le quarré de $\frac{1}{2}p$ étant $\frac{1}{4}p^2$, son addition aux deux membres de l'équation proposée,

$$x^2+px=q,$$

la change en

$$x^2+px+\tfrac{1}{4}p^2=q+\tfrac{1}{4}p^2,$$

résultat dont le premier membre est le quarré de $x+\frac{1}{2}p$; prenant donc la racine des deux membres, j'ai

$$x+\tfrac{1}{2}p=\pm\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2}\,(106),$$

et transposant, il vient

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2},$$

d'où je tire successivement

$$x = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2}$$

et

$$x = -\tfrac{1}{2}p - \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2}.$$

J'ai donné le signe + au second terme $\frac{1}{2}p$ de la racine du premier membre de l'équation proposée, à cause que le second terme de ce membre était positif; il faut y mettre le signe — dans le cas contraire, parce que le quarré $x^2 - 2ax + a^2$ répond au binome $x - a$.

La résolution d'une équation quelconque du second degré, s'obtiendra en rapportant cette équation à la formule générale

$$x^2 + px = q;$$

ou bien en appliquant immédiatement à l'équation proposée, l'opération que l'on a faite sur cette formule, et qui peut s'énoncer comme il suit :

Rendre le premier membre de l'équation proposée un quarré parfait, en y ajoutant, ainsi qu'au second, le quarré de la moitié de la quantité donnée qui multiplie la première puissance de l'inconnue; égaler ensuite les racines quarrées de chaque membre, en observant que celle du premier est composée de l'inconnue et de la moitié de la quantité donnée, qui la multiplie dans le second terme, prise avec le signe de cette quantité, et que la racine du second membre doit être précédée du signe ±, et indiquée par le signe √, si elle ne peut s'obtenir immédiatement.

En voici des exemples.

110. *Trouver un nombre tel, qu'en l'ajoutant 7 fois à son quarré, la somme soit 44.*

x désignant le nombre cherché, l'équation sera évidemment

$$x^2 + 7x = 44.$$

Pour la résoudre, je prends $\frac{7}{2}$, moitié du coefficient 7 qui multiplie x, et l'élevant au quarré, j'ai la quantité $\frac{49}{4}$ que j'ajoute à chaque membre, ainsi qu'il suit :

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 44 + \frac{49}{4};$$

et en réduisant le second membre en une seule fraction, il vient

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} = \frac{225}{4}.$$

La racine du premier membre est, suivant la règle ci-dessus, $x + \frac{7}{2}$, et on trouve pour celle du second $\frac{15}{2}$; on a donc l'équation

$$x + \frac{7}{2} = \pm\frac{15}{2},$$

de laquelle on tire

$$x = -\frac{7}{2} \pm \frac{15}{2},$$

ou
$$x = -\frac{7}{2} + \frac{15}{2} = \frac{8}{2} = 4,$$

$$x = -\frac{7}{2} - \frac{15}{2} = -\frac{22}{2} = -11.$$

La première valeur de x résout la question dans le sens de son énoncé, puisqu'on a, par cette valeur,

$$x^2 = 16$$
$$7x = 28$$
$$\text{somme} \ldots\ldots\ldots\ldots 44.$$

Quant à la seconde, comme elle est affectée du signe —, le terme $7x$, devenant

$$7 \times -11 = -77,$$

doit être retranché de x^2; en sorte que l'énoncé de la question résolue par le nombre 11, est celui-ci :

Trouver un nombre tel, qu'en retranchant 7 fois ce nombre de son quarré, il reste 44.

La valeur négative modifie donc ici la question d'une manière analogue à ce qu'on a vu pour les équations du premier degré.

Si l'on mettait l'énoncé ci-dessus en équation, on obtiendrait

$$x^2 - 7x = 44,$$

et en la résolvant, il viendrait

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = 44 + \frac{49}{4},$$

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = \frac{225}{4},$$

$$x - \frac{7}{2} = \pm \frac{15}{2},$$

$$x = \frac{7}{2} \pm \frac{15}{2},$$

$$x = \frac{22}{2} = 11,$$

$$x = \frac{7}{2} - \frac{15}{2} = -\frac{8}{2} = -4.$$

La valeur négative de x est devenue positive, parce qu'elle satisfait littéralement au nouvel énoncé, et la valeur positive, qui n'y satisfait pas de même, est devenue négative.

On voit par là que, dans le second degré, l'Algèbre

réunit dans la même formule deux questions qui ont entre elles une certaine analogie.

111. Quelquefois les énoncés qui mènent à des équations du second degré sont susceptibles de deux solutions; le suivant est dans ce cas.

Trouver un nombre tel, que si l'on ajoute 15 *à son quarré, la somme soit égale à* 8 *fois ce nombre.*

Soit x le nombre cherché; l'équation du problème sera

$$x^2 + 15 = 8x.$$

En mettant cette équation sous la forme prescrite n° 108, on aura

$$x^2 - 8x = -15,$$
$$x^2 - 8x + 16 = -15 + 16,$$
$$x^2 - 8x + 16 = 1,$$
$$x - 4 = \pm 1,$$
$$x = 4 \pm 1,$$

ou
$$x = 5,$$
$$x = 3.$$

Il y a donc deux nombres différens 5 et 3, qui jouissent de la propriété comprise dans l'énoncé.

112. Quelquefois aussi on rencontre des énoncés qui ne peuvent être résolus d'aucune manière dans leur sens précis, et qui doivent être modifiés; ce cas est celui où les deux racines de l'équation sont négatives, comme celles de la suivante :

$$x^2 + 5x + 6 = 2.$$

Cette équation, qui exprime que le *quarré du nombre cherché, augmenté de* 5 *fois ce nombre, et encore de* 6, *doit donner une somme égale à* 2, ne peut évidemment être vérifiée par addition, comme elle est posée, puisque déjà

6 surpasse 2 ; et en effet, si on la résout, on trouve successivement

$$x^2 + 5x = -4,$$

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4},$$

$$x + \frac{5}{2} = \pm\frac{3}{2},$$

$$x = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1,$$

$$x = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -4.$$

Les signes — dont sont affectés les nombres 1 et 4, font voir que le terme $5x$ doit être retranché des autres, ou que l'énoncé doit, pour les deux valeurs, être rédigé ainsi :

Trouver un nombre tel, que si on le retranche 5 *fois de son quarré, et qu'on ajoute* 6 *au reste, on ait* 2 *pour résultat.*

Cet énoncé fournit l'équation

$$x^2 - 5x + 6 = 2,$$

qui donne pour x les deux valeurs positives 1 et 4.

113. Soit encore ce problème :

Partager un nombre p *en deux parties dont le produit soit égal à* q.

En désignant une de ces parties par x, l'autre sera exprimée par $p - x$, et leur produit sera $px - x^2$; on aura donc l'équation

$$px - x^2 = q,$$

ou, en changeant les signes,

$$x^2 - px = -q :$$

résolvant cette dernière, on trouvera

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}.$$

Si, pour particulariser la question, on faisait

$$p = 10,\ q = 21,$$

on aurait

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 21},$$

ou

$$x = 5 \pm 2,$$

$$x = 7,$$

$$x = 3,$$

c'est-à-dire que l'une des parties serait 7, et l'autre serait par conséquent $10 - 7$ ou 3.

Si l'on prenait au contraire 3 pour x, l'autre partie serait $10 - 3$ ou 7; en sorte que par rapport à l'énoncé actuel, la question n'a, à proprement parler, qu'une solution, puisque la seconde n'est qu'un changement d'ordre entre les parties.

L'inspection attentive de la valeur de x fait voir que dans la question dont il s'agit, on ne peut pas prendre tout-à-fait arbitrairement les nombres p et q; car si q surpassait $\frac{p^2}{4}$, ou le quarré de $\frac{1}{2}p$, la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ serait négative, et on retomberait sur le caractère d'absurdité remarqué dans le n° 107.

Si l'on prenait, par exemple,

$$p = 10 \text{ et } q = 30,$$

il viendrait

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 30} = 5 \pm \sqrt{-5};$$

le problème serait donc impossible avec ces données.

114. L'absurdité des questions qui conduisent à des

racines imaginaires ne se manifeste que par la conclusion, et l'on doit désirer de connaître par des caractères tenant de plus près à l'énoncé, en quoi consiste l'absurdité du problème, de laquelle résulte celle de la solution; c'est ce que fera voir d'une manière précise la considération suivante.

Soit d la différence des deux parties du nombre proposé; la plus grande sera $\frac{p}{2}+\frac{d}{2}$, la plus petite $\frac{p}{2}-\frac{d}{2}$ (3); or il est bien prouvé (29, 30 et 34) que

$$\left(\frac{p}{2}+\frac{d}{2}\right)\left(\frac{p}{2}-\frac{d}{2}\right)=\frac{p^2}{4}-\frac{d^2}{4}:$$

donc le produit des deux parties du nombre proposé, quelles qu'elles soient, est toujours moindre que $\frac{p^2}{4}$, ou que le quarré de la moitié de leur somme, tant que d n'est pas nul; et quand cette circonstance a lieu, chacune de ces deux parties étant égale à $\frac{p}{2}$, leur produit n'est que $\frac{p^2}{4}$. Il est donc absurde de demander qu'il soit plus grand; et c'est avec raison que l'Algèbre, répondant alors d'une manière contradictoire aux principes, prouve par là que ce qu'on cherche n'existe pas.

Ce qu'on vient de montrer sur l'équation

$$x^2-px=-q,$$

fournie par la question précédente, convient à toutes celles du second degré où q est négatif dans le second membre, les seules dans lesquelles on puisse rencontrer des racines imaginaires, puisque le terme $\frac{p^2}{4}$ placé sous le radical, conserve toujours le signe $+$ quel que soit celui de p. En effet, quand on aurait l'équation

$$x^2+px=-q, \quad \text{ou} \quad x^2+px+q=0,$$

on verrait d'abord qu'elle ne saurait admettre aucune solution positive, puisque son premier membre ne renferme que des termes additifs; et pour savoir si l'inconnue x pourrait être négative, il suffirait de changer x en $-y$. L'inconnue y aurait alors des valeurs positives qui seraient données par l'équation

$$y^2 - py + q = 0, \quad \text{ou} \quad y^2 - py = -q,$$

précisément la même que celle du numéro précédent; or les valeurs de x ne pouvant être réelles que lorsque celles de y le seraient, elles deviendraient encore imaginaires dans le cas actuel, si q surpassait $\frac{p^2}{4}$.

On voit donc, par les remarques ci-dessus, comment et pourquoi, *lorsque le terme tout connu d'une équation du second degré est négatif dans le second membre, et plus grand que le quarré de la moitié du coefficient de la première puissance de l'inconnue, cette équation ne peut avoir que des racines imaginaires.*

115. Les expressions

$$\sqrt{-b}, \quad a + \sqrt{-b},$$

et en général celles qui comprennent la racine quarrée d'une quantité négative, se nomment *quantités imaginaires* (*). Ce ne sont que des symboles d'absurdité qui tiennent la place de la valeur qu'on aurait obtenue, si la question proposée eût été possible.

On ne les néglige point dans le calcul, parce qu'il arrive quelquefois qu'en les combinant d'après certaines lois, l'absurdité se détruit, et le résultat devient réel. On en trouvera des exemples dans le *Complément*.

(*) Il serait plus exact de dire *expressions* ou *symboles imaginaires*, puisque ce ne sont pas des quantités.

116. Comme il importe beaucoup aux commençans d'acquérir des notions exactes sur tous les *faits* d'analyse qui paraissent sortir des idées communes, j'ai cru qu'il fallait aussi ajouter quelques éclaircissemens à ce que l'on a déjà vu (106) sur la nécessité d'admettre deux solutions dans les équations du second degré.

Je vais montrer que *s'il existe une quantité* a *qui, substituée à la place de* x, *satisfasse à l'équation du second degré* $x^2+px=q$, *et soit par conséquent la valeur de* x, *cette inconnue aura encore une autre valeur*. Si l'on substitue, en effet, a à la place de x, il en résultera $a^2+pa=q$; et puisque, par l'hypothèse, a est la valeur de x, q sera nécessairement égal à la quantité a^2+pa : on pourra donc écrire cette quantité au lieu de q, dans l'équation proposée, qui deviendra par là

$$x^2+px=a^2+pa.$$

Transposant tous les termes du second membre dans le premier, il viendra

$$x^2+px-a^2-pa=0,$$

qu'on peut écrire ainsi :

$$x^2-a^2+p(x-a)=0;$$

et à cause que

$$x^2-a^2=(x+a)(x-a) \quad (34),$$

on voit sur-le-champ que le premier membre est divisible par $x-a$, et donne pour quotient exact, $x+a+p$: on a donc, d'après cela,

$$x^2+px-q=x^2-a^2+p(x-a)=(x-a)(x+a+p),$$

Maintenant il est évident qu'un produit est égal à zéro, lorsque l'un quelconque de ses facteurs devient nul; on doit donc avoir

$$(x-a)(x+a+p)=0,$$

non-seulement lorsque $x-a=0$, ce qui donne

$$x=a,$$

mais encore lorsque $x+a+p=0$, d'où il résulte

$$x=-a-p.$$

Il est donc prouvé que si a est une des valeurs de x, $-a-p$ sera nécessairement l'autre.

Ce résultat s'accorde avec les deux valeurs comprises dans la formule

$$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2};$$

car en prenant pour a la première, $-\frac{1}{2}p+\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, par exemple, on trouverait pour l'autre

$$-a-p=+\tfrac{1}{2}p-\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2}-p=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2},$$

ce qui est en effet la seconde racine.

Je reviendrai dans la suite sur ces remarques, qui contiennent le germe de la théorie générale des équations d'un degré quelconque.

117. La difficulté de mettre les problèmes en équation, est pour le second degré, et en général pour quelque degré que ce soit, la même que pour le premier, et consiste toujours dans la manière de démêler toutes les conditions distinctes, comprises dans l'énoncé, et de

les exprimer à l'aide des caractères algébriques. Les questions précédentes n'offraient aucune difficulté à cet égard, et l'on doit s'être suffisamment exercé dès le premier degré; cependant je vais encore résoudre quelques questions qui donneront lieu à plusieurs observations utiles.

On a employé deux ouvriers, gagnant des salaires différens; le premier ayant été payé au bout d'un certain nombre de jours, a reçu 96 fr., et le deuxième ayant travaillé six jours de moins, n'a eu que 54 fr.; s'il avait travaillé tous les jours, et que l'autre eût manqué six jours, ils auraient reçu tous deux la même somme: on demande combien de jours chacun a travaillé, et le prix de sa journée.

Ce problème, qui semble d'abord renfermer plusieurs inconnues, se résout facilement par le moyen d'une seule, parce que les autres s'expriment immédiatement par celle-ci.

En désignant par x le nombre des jours de travail du premier ouvrier,

$x - 6$ sera celui des jours de travail du second,

$\frac{96^{fr.}}{x}$ sera le prix de la journée du premier ouvrier,

$\frac{54}{x-6}$ celui de la journée du second;

si ce dernier eût travaillé pendant x jours, il aurait gagné

$$x \times \frac{54}{x-6} \text{ ou } \frac{54x}{x-6},$$

et le premier travaillant seulement $x-6$ jours, n'aurait eu que

$$(x-6)\,\frac{96}{x} \text{ ou } \frac{96\,(x-6)}{x}.$$

l'équation du problème sera donc

$$\frac{54x}{x-6} = \frac{96\,(x-6)}{x}.$$

Il faut d'abord faire disparaître les dénominateurs de cette équation, et il vient

$$54\,x^2 = 96\,(x-6)\,(x-6);$$

les nombres 54 et 96 étant tous deux divisibles par 6, ce résultat se simplifie : on trouve

$$9\,x^2 = 16\,(x-6)\,(x-6).$$

On pourrait préparer cette dernière équation suivant la règle du n° 108, pour la résoudre; mais l'objet de cette règle n'étant que de faciliter l'extraction de la racine de chaque membre de l'équation proposée, elle est inutile ici, où les deux membres se présentent d'abord sous la forme de quarrés; car il est visible que $9\,x^2$ est le quarré de $3\,x$, et que $16\,(x-6)\,(x-6)$ est le quarré de $4\,(x-6)$: on aura donc tout de suite

$$3\,x = \pm 4\,(x-6);$$

d'où il résulte

$$3\,x = 4\,x - 24,\ x = 24,$$

$$3\,x = -4\,x + 24,\ x = \frac{24}{7}.$$

Par la première solution de la question, le premier ouvrier a travaillé pendant 24 jours, et a gagné par conséquent $\frac{96^{\text{fr.}}}{24}$, ou 4 francs par jour, tandis que le second n'a travaillé que 18 jours, et a gagné $\frac{54^{\text{fr.}}}{18}$, ou 3 francs par jour.

La seconde solution répond à une autre question numérique liée à l'équation proposée d'une manière analogue à celle que j'ai remarquée dans le n° 111.

118. *On remet à un banquier deux billets sur la même personne ; le premier de* 550 *francs payable dans sept mois, le second de* 720 *francs payable dans quatre mois ; et il donne pour le tout une somme de* 1200 *francs : on demande quel est le taux annuel de l'intérêt d'après lequel ces billets ont été escomptés.*

Afin d'éviter les fractions dans l'expression des intérêts pour sept mois et pour quatre, je représenterai par $12x$ celui que produit annuellement une somme de 100 francs, et l'intérêt d'un mois sera alors x. Cela posé, la valeur présente du premier billet s'obtiendra en faisant la proportion

$$100 + 7x : 100 :: 550 : \frac{55000}{100 + 7x} \text{ (\textit{Arith.} 120)};$$

la valeur présente du second billet résultera de même de la proportion

$$100 + 4x : 100 :: 720 : \frac{72000}{100 + 4x}.$$

En réunissant ces deux valeurs, l'équation du problème sera

$$\frac{55000}{100 + 7x} + \frac{72000}{100 + 4x} = 1200.$$

Les deux membres pouvant se diviser par 200, on a

$$\frac{275}{100 + 7x} + \frac{360}{100 + 4x} = 6 ;$$

puis faisant disparaître les dénominateurs, on trouve successivement

$$275(100 + 4x) + 360(100 + 7x) = 6(100 + 7x)(100 + 4x)$$
$$27500 + 1100x + 36000 + 2520x =$$
$$60000 + 6600x + 168x^2,$$

ce qui se réduit à

$$168x^2 + 2980x = 3500,$$

et divisant tout par 2, on obtient

$$84x^2 + 1490x = 1750,$$

ce qui donne enfin

$$x^2 + \frac{1490}{84}x = \frac{1750}{84}.$$

En comparant cette équation à la formule

$$x^2 + px = q,$$

il vient

$$p = \frac{1490}{84}, \quad q = \frac{1750}{84},$$

et l'expression

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

se change en

$$x = -\frac{745}{84} \pm \sqrt{\frac{745.745}{84.84} + \frac{1750}{84}}.$$

Il faut d'abord réduire à une seule les fractions comprises sous le radical : on aura

$$\frac{745.745 + 1750.84}{84.84} = \frac{702025}{84.84};$$

et en observant que le dénominateur de cette fraction est un quarré parfait, il ne restera qu'à extraire la racine quarrée du numérateur. Si l'on s'arrête aux millièmes, on trouvera 837,869, pour celle de 702025 ; et en lui donnant le dénominateur 84, les valeurs de x seront

$$x = -\frac{745}{84} + \frac{837,869}{84} = \frac{92,869}{84},$$

$$x = -\frac{745}{84} - \frac{837,869}{84} = -\frac{1582,869}{84}.$$

La première de ces valeurs est la seule qui résolve la question dans le sens de son énoncé. En divisant son dénominateur par 12, on a (*Arith.* 54)

$$12x = \frac{92{,}869}{7} = 13{,}267\ ;$$

c'est-à-dire que l'intérêt annuel est de 13,27 p. $\frac{0}{0}$.

119. La question suivante est digne d'attention, par les circonstances que présente l'expression de l'inconnue.

Partager un nombre en deux parties dont les quarrés soient dans un rapport donné.

Soit a le nombre donné,

m le rapport des quarrés de ses deux parties,
x l'une de ces parties ;

l'autre sera $a - x$;
et d'après l'énoncé de la question, on aura l'équation

$$\frac{x^2}{(a-x)\,(a-x)} = m.$$

Il se présente pour la résoudre deux voies : on peut ou la préparer pour lui donner la forme $x^2 + px = q$, et la résoudre ensuite par la méthode générale ; ou bien, profitant de la remarque facile à faire, que la fraction

$$\frac{x^2}{(a-x)\,(a-x)}$$

est un quarré, puisque son numérateur et son dénominateur sont des quarrés, en conclure sur-le-champ,

$$\frac{x}{a-x} = \pm\sqrt{m},$$

$$x = \pm(a-x)\sqrt{m}.$$

En résolvant séparément les deux équations du premier degré comprises dans cette formule, savoir,

$$x = +(a-x)\sqrt{m},$$
$$x = -(a-x)\sqrt{m},$$

on en tirera
$$x = \frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}},$$
$$x = \frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}.$$

Par la première solution, la seconde partie du nombre proposé est

$$a - \frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} = \frac{a+a\sqrt{m}-a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} = \frac{a}{1+\sqrt{m}};$$

et les deux parties

$$\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} \text{ et } \frac{a}{1+\sqrt{m}}$$

sont, comme l'exige l'énoncé de la question, toutes deux plus petites que le nombre proposé.

Par la seconde solution on a

$$a + \frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} = \frac{a-a\sqrt{m}+a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} = \frac{a}{1-\sqrt{m}},$$

et les deux parties alors sont

$$-\frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} \text{ et } \frac{a}{1-\sqrt{m}}.$$

Leurs signes étant contraires, le nombre a n'est plus, à proprement parler, leur somme, mais leur différence.

Lorsqu'on fait $m = 1$, c'est-à-dire qu'on suppose que les quarrés des deux parties cherchées sont égaux, on a

$$\sqrt{m} = 1;$$

la première solution donne deux parties égales,

$$\frac{a}{2}, \quad \frac{a}{2},$$

résultat évident par lui-même, tandis que la seconde solution donne deux résultats infinis (68), savoir :

$$\frac{-a}{1-1} \text{ ou } \frac{-a}{0}, \text{ et } \frac{a}{1-1} \text{ ou } \frac{a}{0};$$

ce qui doit être, car il n'y a qu'en regardant deux quantités comme infiniment grandes par rapport à leur différence a, qu'on peut supposer le rapport de leurs quarrés égal à l'unité.

En effet, soient x et $x-a$, ces deux quantités; le rapport de leurs quarrés sera

$$\frac{x^2}{x^2-2ax+a^2},$$

et en divisant les deux termes de cette fraction par x^2, elle deviendra

$$\frac{1}{1-\frac{2a}{x}+\frac{a^2}{x^2}};$$

or il est visible que plus le nombre x sera grand, plus les fractions $\frac{2a}{x}$, $\frac{a^2}{x^2}$ seront petites, et plus le rapport ci-dessus approchera d'être égal à $\frac{1}{1}$, ou à 1.

120. Pour comparer maintenant à la marche qu'on vient de suivre la méthode générale, on développera l'équation

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)}=m:$$

on aura successivement

$$x^2=m(a-x)(a-x),$$
$$x^2=a^2m-2amx+mx^2,$$
$$x^2-mx^2+2amx=a^2m,$$
$$(1-m)x^2+2amx=a^2m,$$
$$x^2+\frac{2amx}{1-m}=\frac{a^2m}{1-m},$$

en faisant $p = \frac{2am}{1-m}$, $q = \frac{a^2m}{1-m}$,

la formule générale donnera

$$x = -\frac{am}{1-m} \pm \sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)} + \frac{a^2m}{1-m}}.$$

Ces valeurs de x paraissent bien différentes de celles qui ont été trouvées plus haut; cependant elles s'y ramènent, et c'est en quoi l'exemple qui m'occupe peut être utile pour montrer l'importance des transformations que les diverses opérations algébriques produisent dans l'expression des quantités.

Il faut premièrement réduire au même dénominateur les deux fractions comprises sous le radical, ce qui s'effectuera en multipliant par $1-m$, les deux termes de la seconde; et il viendra

$$\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)} + \frac{a^2m}{1-m} = \frac{a^2m^2 + a^2m(1-m)}{(1-m)(1-m)} = \frac{a^2m^2 + a^2m - a^2m^2}{(1-m)(1-m)} = \frac{a^2m}{(1-m)(1-m)}.$$

Le dénominateur étant un quarré, il restera seulement à extraire la racine du numérateur, et on aura

$$\sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)} + \frac{a^2m}{1-m}} = \frac{\sqrt{a^2m}}{1-m};$$

mais l'expression $\sqrt{a^2m}$ peut encore se simplifier.

Il est visible que le quarré d'un produit se compose du produit des quarrés de chacun de ses facteurs, puisque, par exemple,

$$bcd \times bcd = b^2c^2d^2,$$

et que par conséquent la racine de $b^2c^2d^2$ n'est autre chose que le produit des racines b, c et d, des facteurs b^2, c^2 et d^2. En appliquant cette remarque au produit a^2m, on voit que sa racine est le produit de a, racine

de a^2, par $\sqrt{m}$ qui est l'indication de la racine de m, ou que

$$\sqrt{a^2 m} = a\sqrt{m}.$$

Il suit de ces diverses transformations que

$$x = -\frac{am}{1-m} \pm \frac{a\sqrt{m}}{1-m},$$

ou bien

$$x = \frac{-am + a\sqrt{m}}{1-m},$$

$$x = \frac{-am - a\sqrt{m}}{1-m}.$$

Quelque simples qu'elles soient, ces expressions ne sont pas encore celles du numéro précédent ; et même si l'on cherche à les vérifier pour le cas où $m = 1$, elles deviennent

$$x = \frac{-a+a}{1-1} = \frac{0}{0},$$

$$x = \frac{-a-a}{1-1} = \frac{-2a}{0}.$$

On retrouve dans la seconde le symbole de l'infini, comme précédemment, mais la première présente cette forme indéterminée, $\frac{0}{0}$, dont on a déjà vu des exemples dans les n°s 69 et 70; et avant de prononcer sur sa valeur, il est à propos d'examiner si elle ne tombe pas dans le cas du n° 70, si ce n'est pas un facteur commun au numérateur et au dénominateur, que la supposition de $m = 1$, rend égal à zéro.

L'expression $\dfrac{-am + a\sqrt{m}}{1-m}$

revient à $\dfrac{a(-m+\sqrt{m})}{1-m} = \dfrac{a(\sqrt{m}-m)}{1-m}$

On voit déjà que le numérateur ne devient zéro, que

par le facteur $\sqrt{m} - m$; il faut donc chercher si ce dernier n'aurait pas quelque facteur commun avec le dénominateur $1 - m$. Pour éviter l'embarras que pourrait causer le signe radical, je fais $\sqrt{m} = n$, et j'en conclus, en prenant les quarrés, $m = n^2$: ceci change les quantités

$$\sqrt{m} - m \text{ et } 1 - m$$

en

$$n - n^2 \text{ et } 1 - n^2 ;$$

or $n - n^2 = n(1-n)$ et $1 - n^2 = (1-n)(1+n)$ (34) ; en remettant pour n sa valeur $\sqrt{m}$, on a

$$\sqrt{m} - m = (1 - \sqrt{m})\sqrt{m},$$
$$1 - m = (1 - \sqrt{m})(1 + \sqrt{m}),$$

et par conséquent

$$\frac{a(\sqrt{m} - m)}{1 - m} = \frac{a(1 - \sqrt{m})\sqrt{m}}{(1 - \sqrt{m})(1 + \sqrt{m})} = \frac{a\sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}},$$

résultat semblable à celui du n° 119.

On réduit de même la seconde valeur de x, en observant que

$$\frac{-a\sqrt{m} - am}{1 - m} = \frac{-a(1 + \sqrt{m})\sqrt{m}}{(1 - \sqrt{m})(1 + \sqrt{m})} = \frac{-a\sqrt{m}}{1 - \sqrt{m}},$$

comme dans le n° 119 (*).

(*) L'exemple que je viens de traiter si au long, répond à un problème résolu par Clairaut dans son *Algèbre*, et dont l'énoncé est celui-ci : *Trouver sur la ligne qui joint deux lumières quelconques, le point où ces deux lumières éclairent également.* J'ai dépouillé ce problème des circonstances physiques qui sont étrangères à l'objet de cet ouvrage, et qui ne peuvent que détourner l'attention qu'exigent les circonstances algébriques, très remarquables en elles-mêmes, et que pour cette raison, j'ai développées plus que ne l'avait fait Clairaut.

Il n'est pas difficile de voir que j'aurais pu éviter les radicaux dans les calculs précédens, en représentant par m^2 le rapport des quarrés des deux parties du nombre proposé : alors m en eût été la racine quarrée, qu'on peut toujours regarder comme connue, lorsque son quarré est donné ; mais on n'aurait pas d'abord senti le but d'un pareil changement de données, dont les algébristes font souvent usage pour simplifier les calculs ; c'est pourquoi j'invite le lecteur à recommencer la solution du problème, en mettant m^2 au lieu de m.

De l'extraction de la racine quarrée des quantités algébriques.

121. La question précédente suffit pour indiquer comment il faut se conduire dans la solution des questions littérales, et a présenté une transformation qu'il importe de remarquer, savoir, celle de

$\sqrt{a^2 m}$ en $a\sqrt{m}$ (page 177),

puisque par son moyen on peut réduire au plus petit nombre possible les facteurs contenus sous le radical, et simplifier d'autant l'extraction de la racine qui reste à opérer.

Cette transformation consiste, comme on l'a vu à l'endroit cité, à *prendre séparément la racine de tous les facteurs qui sont des quarrés, et à écrire ces racines hors du radical, comme multiplicateurs de ce radical, sous lequel on laisse tels qu'ils sont, les facteurs qui ne sont pas des quarrés.*

Cette règle suppose premièrement, que l'on sache reconnaître si une quantité algébrique est un quarré, et dans ce cas en extraire la racine ; et pour cela, il faut distinguer les quantités monomes des polynomes.

122. Il résulte évidemment de la règle des exposans dans la multiplication, que *la seconde puissance d'une quantité quelconque a un exposant double de celui de cette quantité.*

On a, par exemple,

$a^1 \times a^1 = a^2$, $a^2 \times a^2 = a^4$, $a^3 \times a^3 = a^6$, etc.

Il suit de là que *tout facteur qui est un quarré, doit avoir un exposant pair, et qu'on obtient la racine de ce facteur en écrivant sa lettre avec un exposant égal à la moitié de l'exposant primitif.*

On a ainsi

$\sqrt{a^2} = a^1$ ou a, $\sqrt{a^4} = a^2$, $\sqrt{a^6} = a^3$, etc.

A l'égard des facteurs numériques, l'extraction de leurs racines s'opère, s'il y a lieu, par les règles enseignées précédemment.

D'après ces remarques, les facteurs a^6, b^4, c^2, de l'expression

$$\sqrt{64\,a^6\,b^4\,c^2},$$

sont des quarrés; le nombre 64 est le quarré de 8; donc *l'expression proposée, étant le produit de facteurs quarrés, aura pour racine le produit des racines de chacun de ces facteurs* (121); et par conséquent

$$\sqrt{64\,a^6\,b^4\,c^2} = 8\,a^3\,b^2\,c.$$

123. Lorsque cette circonstance n'a pas lieu, *il faut chercher à décomposer le produit proposé en deux autres, dont l'un ne contienne que les facteurs quarrés et l'autre les facteurs non quarrés;* et pour cela il faut considérer à part chacun de ses facteurs.

Soit pour exemple

$$\sqrt{72\,a^4\,b^3\,c^5}.$$

On reconnaît facilement que parmi les diviseurs du

nombre 72, il y a des quarrés parfaits, savoir, 4, 9 et 36; et en prenant le plus grand, on a

$$72 = 36 \times 2.$$

Le facteur a^4 étant un quarré, on le met de côté; passant ensuite au facteur b^3, qui n'en est pas un, puisque le nombre 3 est impair, on remarque que ce facteur peut se décomposer en deux autres b^2 et b, dont le premier est un quarré, et qu'on a

$$b^3 = b^2.b;$$

on voit aussi que

$$c^5 = c^4.c;$$

il en serait de même de toute lettre ayant un exposant impair. Toutes ces décompositions donnent

$$72a^4b^3c^5 = 36.2a^4b^2.bc^4.c;$$

et rassemblant les facteurs quarrés, il vient

$$36a^4b^2c^4 \times 2bc.$$

Enfin, prenant la racine du premier produit et indiquant celle du second, on a

$$\sqrt{72a^4b^3c^5} = 6a^2bc^2\sqrt{2bc}.$$

Voici encore quelques exemples de réductions semblables, précédées des calculs qui les mettent en évidence :

$$\sqrt{\frac{a^3}{b}} = \sqrt{a^2\frac{a}{b}} = a\sqrt{\frac{a}{b}} =$$

$$a\sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{a}{b}\sqrt{ab};$$

$$6\sqrt{\frac{7^5}{98}ab^2} = 6\sqrt{\frac{25.3ab^2}{49.2}} = 6\sqrt{\frac{25b^2.3a}{49.2}} =$$

$$\frac{6.5}{7}b\sqrt{\frac{3a}{2}} = \frac{30b}{7}\sqrt{\frac{3a}{2}};$$

$$\sqrt{\frac{a^2m^2}{n^2} + \frac{a^2m}{n}} = \sqrt{\frac{a^2m^2 + a^2mn}{n^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{n^2}(m^2 + mn)} = \frac{a}{n}\sqrt{m^2 + mn}.$$

Il faut remarquer, par rapport au premier, qu'on peut faire sortir du radical le dénominateur des fractions algébriques, en le rendant un quarré, d'après ce qui a été dit n° 104, pour les fractions numériques.

124. Je vais passer à l'extraction de la racine quarrée des polynomes. Il est important de se rappeler qu'aucun binome n'est un quarré parfait, parce que tout monome élevé au quarré ne produit qu'un monome, et que le quarré d'un binome renferme toujours trois parties (34).

On se tromperait grossièrement en prenant pour $\sqrt{a^2+b^2}$ le binome $a+b$, quoique a soit séparément la racine de a^2, et b celle de b^2; car le quarré de $a+b$, étant $a^2+2ab+b^2$, contient en outre le terme $+2ab$, qui ne se trouve pas dans l'expression a^2+b^2.

Soit donc le trinome

$$24a^2b^3c+16a^4c^2+9b^6:$$

afin de retrouver dans cette expression les trois parties qui composent le quarré d'un binome, je l'ordonne par rapport à l'une de ses lettres, à la lettre a, par exemple; il vient

$$16a^4c^2+24a^2b^3c+9b^6.$$

Alors, quelle que soit la racine cherchée, en la supposant ordonnée par rapport à la même lettre a, le quarré de son premier terme doit nécessairement former le premier terme $16a^4c^2$ de la quantité proposée; le double produit du premier terme de la racine par le second, doit donner le second terme $24a^2b^3c$ de la quantité proposée; et enfin le quarré du dernier terme de la racine doit être précisément le dernier terme $9b^6$ de la quantité proposée. D'après ces considérations, l'opération se dispose comme on le voit plus loin:

$$\begin{array}{l|l} 16a^4c^2 + 24a^2b^3c + 9b^6 & 4a^2c + 3b^3 \text{ racine} \\ -16a^4c^2 & \overline{8a^2c + 3b^3} \\ \hline + 24a^2b^3c + 9b^6 & \\ -24a^2b^3c - 9b^6 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

J'extrais d'abord la racine quarrée du premier terme $16a^4c^2$, et le résultat $4a^2c$ (122) est le premier terme de la racine qui s'écrit à droite, sur la même ligne que la quantité proposée.

Je retranche de cette quantité le quarré $16a^4c^2$, du premier terme $4a^2c$, de la racine; et faisant la réduction, il ne reste que les deux termes $24a^2b^3c + 9b^6$.

Le terme $24a^2b^3c$ étant le double produit du premier terme de la racine $4a^2c$, par le second, j'obtiens ce dernier en divisant $24a^2b^3c$ par $8a^2c$, double de $4a^2c$, et qui s'écrit au-dessous de la racine; le quotient $3b^3$ est le second terme de la racine.

La racine est maintenant déterminée; mais il faut, pour qu'elle soit exacte, que le quarré du second terme fasse $9b^6$, ou bien que le double $8a^2c$ du premier terme de la racine, augmenté du second $3b^3$, et multiplié par le second, reproduise les deux derniers termes du quarré (91); en conséquence, à côté de $8a^2c$, j'écris $+ 3b^3$, je multiplie $8a^2c + 3b^3$ par $3b^3$; le produit étant retranché des deux derniers termes de la quantité proposée, il ne reste rien, et j'en conclus que cette quantité est le quarré de $4a^2c + 3b^3$.

Il est évident que les mêmes raisonnemens et les mêmes procédés peuvent s'appliquer à toutes les quantités composées de trois termes.

125. Lorsque la quantité dont on veut extraire la racine a plus de trois termes, elle n'est plus le quarré d'un binome ; mais en la supposant celui d'un trinome $m+n+p$, et représentant par l la somme $m+n$ de ses deux premiers termes, ce trinome se changeant en $l+p$, son quarré devient

$$l^2+2lp+p^2,$$

où le quarré l^2 du binome $m+n$, étant développé, produirait les termes $m^2+2mn+n^2$. Ainsi, lorsqu'on aura ordonné la quantité proposée, le premier terme sera évidemment le quarré du premier terme de la racine, et le second renfermera le double produit du premier terme de la racine par le second de cette racine ; on aura donc ce dernier en divisant le second terme de la quantité proposée, par le double de la racine du premier. Connaissant alors les deux premiers termes de la racine cherchée, on complétera le quarré de ces deux termes, représenté ici par l^2, et le retranchant de la quantité proposée, il restera

$$2lp+p^2,$$

quantité qui contient le double produit de l, ou du premier binome $m+n$, par le reste de la racine, plus le quarré de ce reste, et fait voir qu'il faut opérer avec ce binome, comme on a fait avec le premier terme m, de la racine.

Soit pour exemple la quantité

$$64a^2bc+25a^2b^2-40a^3b+16a^4+64b^3c^2-80ab^2c;$$

je l'ordonne par rapport à la lettre a, et je dispose l'opération comme précédemment.

$$16a^4 - 40a^3b + 25a^2b^2 - 80ab^2c + 64b^2c^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} 4a^2 - 5ab + 8bc \\ \hline 8a^2 - 5ab \\ 8a^2 - 10ab + 8bc \end{array} \right.$$

$$+64a^2bc$$

$$-16a^4$$

$$1^{er}\text{ rest.} -40a^3b + 25a^2b^2 - 80ab^2c + 64b^2c^2$$

$$+64a^2bc$$

$$+40a^3b - 25a^2b^2$$

$$2^e\text{ reste} \ldots\ldots +64a^2bc - 80ab^2c + 64b^2c^2$$

$$-64a^2bc + 80ab^2c - 64b^2c^2$$

Cela fait, j'extrais la racine quarrée du premier terme $16a^4$, et j'obtiens $4a^2$ pour le premier terme de la racine cherchée; j'en forme le quarré, que je retranche de la quantité proposée.

Je double le premier terme de la racine, et j'écris au-dessous le résultat $8a^2$, par lequel je divise le terme $-40a^3b$ qui commence le premier reste; j'ai $-5ab$ pour le second terme de la racine; je l'écris à côté de $8a^2$, je multiplie le tout par ce second terme, et je retranche le résultat du reste sur lequel j'opère.

De cette manière j'ai retranché de la quantité proposée le quarré du binome $4a^2 - 5ab$; le deuxième reste ne contenant plus que le double produit de ce binome par le troisième terme de la racine et le quarré de ce terme, je double la quantité $4a^2 - 5ab$, ce qui donne

$$8a^2 - 10ab,$$

que j'écris au-dessous de $8a^2 - 5ab$, et que je prends pour diviseur du deuxième reste : le premier terme du quotient, est $8bc$; c'est le troisième de la racine.

Je l'écris aussi à côté de $8a^2 - 10ab$, et je multiplie le tout par ce terme; je retranche les produits du reste sur lequel j'opère, qui se trouve entièrement détruit : la quantité proposée est donc le quarré de

$$4a^2 - 5ab + 8bc.$$

Il est maintenant aisé d'étendre aussi loin qu'on voudra l'opération ci-dessus, qui est d'ailleurs parfaitement semblable à celle qu'on a enseignée pour les nombres.

De la formation des puissances et de l'extraction de leurs racines.

126. L'opération arithmétique d'où dépend la résolution des équations du second degré, et par laquelle on revient du quarré à la quantité qui l'a formé, ou à la racine quarrée, n'est qu'un cas particulier d'une autre plus générale, servant à *trouver un nombre dont on connaît une puissance quelconque*. On conçoit que cette opération, qui conduit à un résultat qu'on désigne encore par le mot *racine*, mais en y ajoutant l'indication du degré, étant inverse de celle qui sert à trouver la puissance, ne peut être déduite que de l'examen des circonstances de cette dernière, comme cela arrive pour la division à l'égard de la multiplication, avec lesquelles ce sujet a d'ailleurs des rapports qu'on apercevra bientôt.

C'est par la multiplication qu'on parvient aux puissances des nombres entiers (24), et il est visible que celles des fractions se forment en élevant leur numérateur et leur dénominateur à la puissance proposée (96).

Réciproquement la racine d'une fraction s'obtient, dans quelque degré que ce soit, en prenant celle du numérateur et celle du dénominateur.

L'usage des symboles algébriques étant très commode pour exprimer tout ce qui tient à la composition et à la décomposition des quantités, on procède d'abord à la formation des puissances des expressions algébriques; car à l'égard de celles des nombres, ce qu'on a dit, n° 24, suffit pour les trouver.

Table des 7 premières puissances des nombres, depuis 1 jusqu'à 9.

1re	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2e	1	4	9	16	25	36	49	64	81
3e	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4e	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5e	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6e	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
7e	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969

J'ai principalement rapporté cette table, afin de montrer avec quelle rapidité s'accroissent les puissances des nombres, à mesure qu'elles deviennent plus élevées, remarque qui est très importante pour la suite. On voit en effet que la septième puissance de 2 est déjà 128, et que celle de 9 monte à 4782969.

On conçoit facilement par là que les puissances des fractions proprement dites, décroissent très rapidement, puisque les puissances du dénominateur deviennent de plus en plus grandes par rapport à celles du numérateur. La septième puissance de $\frac{1}{2}$, par exemple, serait $\frac{1}{128}$, et celle de $\frac{1}{9}$ serait seulement

$$\frac{1}{4782969}.$$

127. Il suit de ce que dans un produit, chaque lettre a pour exposant la somme des exposans qu'elle a dans chacun des facteurs (26), que *la puissance d'une quantité monome se forme en multipliant l'exposant de chaque facteur par l'exposant de cette puissance.*

La troisième puissance de $a^2 b^3 c$, par exemple, s'obtiendra en multipliant les exposans 2, 3 et 1, des lettres a, b, c, par 3, exposant de la puissance demandée : on aura $a^6 b^9 c^3$; et en effet, cette puissance revient à

$$a^2 b^3 c \times a^2 b^3 c \times a^2 b^3 c = a^{2.3} b^{3.3} c^{1.3}.$$

Si la quantité proposée avait un coefficient numérique, il faudrait élever aussi ce coefficient à la puissance proposée ; ainsi la quatrième puissance de $3 a b^2 c^5$ est

$$81 a^4 b^8 c^{20},$$

parce que celle de 3 est 81.

128. A l'égard des signes qui peuvent affecter les quantités monomes, il faut observer que *toutes les puissances dont l'exposant est pair, ont le signe +, et que celles dont l'exposant est impair, ont le même signe que la quantité qui les a formées.*

En effet, les puissances d'un degré pair résultent de la multiplication d'un nombre pair de facteurs; et les signes — combinés 2 à 2, dans la multiplication, donnent toujours au produit le signe + (31). Au contraire, si le nombre des facteurs est impair, le produit aura le signe — quand les facteurs en seront affectés, puisqu'il résultera du produit d'un nombre pair de facteurs, et par conséquent positif, multiplié par un facteur négatif.

129. Pour revenir de la puissance à la quantité qui l'a formée, ou à sa racine, il n'y a qu'à renverser les règles données ci-dessus ; c'est-à-dire, *diviser l'exposant de chaque lettre par celui qui marque le degré de la racine qu'on veut extraire.*

On trouvera de cette manière la *racine cubique*, ou *du troisième degré*, de l'expression $a^6\ b^9\ c^3$, en divisant par 3 les exposans 6, 9 et 3, ce qui donnera

$$a^2\ b^3\ c.$$

Lorsque l'expression proposée a un coefficient numérique, il faut en prendre aussi la racine, pour former le coefficient de la quantité littérale qu'on obtient par la règle précédente.

Si l'on demandait, par exemple, la racine quatrième de $81\ a^4 b^8 c^{20}$, on verrait par la table du n° 126, que 81 est la quatrième puissance de 3; et divisant par 4 les exposans des lettres, on aurait pour résultat

$$3ab^2c^5.$$

Dans les cas où la racine du coefficient numérique ne peut se trouver par la table citée, on l'extrait par les méthodes que je donnerai ci-après.

130. Il est évident que l'extraction des racines ne peut s'effectuer sur la partie littérale des monomes, qu'autant que chacun des exposans est divisible par celui de la racine; dans le cas contraire, on ne peut qu'indiquer l'opération arithmétique qu'il faudra faire, lorsqu'on substituera des nombres aux lettres.

On se sert encore pour cela du signe $\sqrt{\ }$; mais pour désigner le degré de la racine, on met l'exposant comme on le voit ci-dessous, dans les expressions

$$\sqrt[3]{a}, \quad \sqrt[5]{a^2},$$

dont la première représente la racine cubique, ou du troisième degré, de a, et la seconde la racine cinquième de a^2.

Les expressions affectées du signe $\sqrt{\ }$, de quelque degré qu'il soit, peuvent souvent se simplifier en faisant

attention que, d'après le n° 127, *une puissance quelconque d'un produit est formée du produit de la même puissance de chacun des facteurs*, et que, par conséquent, *la racine quelconque d'un produit est formée du produit des racines de même degré de chacun de ses facteurs.* Il résulte de ce dernier principe, que *si la quantité soumise au radical a des facteurs qui soient des puissances exactes du même degré que le radical, on pourra prendre séparément les racines de ces facteurs, et multiplier leur produit par la racine indiquée des autres facteurs.*

Soit, par exemple,

$$\sqrt[5]{96\,a^5 b^7 c^{11}};$$

on voit que

$$96 = 32 \times 3 = 2^5 . 3,$$

que a^5 est la cinquième puissance de a,
que $b^7 = b^5 . b^2$,
que $c^{11} = c^{10} . c$;

on a par conséquent

$$96\,a^5 b^7 c^{11} = 2^5 a^5 b^5 c^{10} \times 3\,b^2 c.$$

Le premier facteur ayant pour racine cinquième la quantité $2abc^2$, il vient

$$\sqrt[5]{96\,a^5 b^7 c^{11}} = 2abc^2 \sqrt[5]{3\,b^2 c}.$$

131. Toute puissance paire devant avoir le signe + (128), aucune quantité affectée du signe — ne peut être une puissance de degré pair, et n'a point de racine de ce degré. Il suit de là, que *tout radical d'un degré pair, comprenant une quantité négative, est une expression imaginaire* :

$$\sqrt[4]{-a}, \quad \sqrt[6]{-a^4}, \quad b + \sqrt[8]{-a\,b^7},$$

sont des expressions imaginaires.

On ne peut par conséquent assigner, soit exactement, soit par approximation, pour les degrés dont l'exposant est pair, que les racines des quantités positives; et *ces racines peuvent être affectées indifféremment du signe + ou du signe —*, parce que dans l'un et l'autre cas elles reproduisent également la quantité proposée avec le signe +, et qu'on ignore auquel des deux elles appartiennent.

Il n'en est pas de même pour les degrés impairs, dans lesquels les puissances ont le même signe que leurs racines (128): *on doit donner aux racines de ces degrés le signe dont la puissance est affectée;* et il n'y a point d'imaginaires dans ce cas.

132. Il est à propos d'observer que l'application de la règle donnée n° 129, pour l'extraction des racines des monomes, par les exposans de leurs facteurs, conduit naturellement à indiquer, par des signes plus commodes pour le calcul que le signe $\surd$, les racines qui ne peuvent s'obtenir algébriquement.

Lorsqu'on demande, par exemple, la racine troisième de a^5, il faut, suivant la règle citée, diviser l'exposant 5 par 3; mais la division ne pouvant s'effectuer, conduit au nombre fractionnaire $\frac{5}{3}$; et la forme que prend alors l'exposant du résultat indique que l'extraction n'est pas possible dans l'état actuel de la quantité proposée : on doit donc regarder les deux expressions

$$\sqrt[3]{a^5} \qquad \text{et} \qquad a^{\frac{5}{3}}$$

comme équivalentes.

La dernière a néanmoins sur la première l'avantage de conduire tout de suite à la simplification dont la quantité $\sqrt[3]{a^5}$ est susceptible; car si l'on extrait l'entier

contenu dans la fraction $\frac{5}{3}$; on a $1+\frac{2}{3}$, et en regardant cette somme comme l'exposant d'un produit (25), on reconnaît que la quantité

$$a^{\frac{5}{3}} = a^{1+\frac{2}{3}} = a^1 \times a^{\frac{2}{3}},$$

est composée de deux facteurs, dont le premier est a, et l'autre revient à $\sqrt[3]{a^2}$.

On conclurait la même chose de l'expression $\sqrt[3]{a^5}$, au moyen du n° 130, mais l'exposant fractionnaire y mène immédiatement : on aura d'ailleurs occasion de reconnaître dans d'autres opérations les avantages des exposans fractionnaires, et d'en justifier l'emploi.

Pour le moment, il suffit d'observer que la division des exposans, dans le cas où elle peut s'effectuer, répondant à l'extraction des racines, on doit, lorsqu'elle est indiquée, la regarder comme le symbole de la même opération, et en conclure que les expressions

$$\sqrt[n]{a^m} \quad \text{et} \quad a^{\frac{m}{n}}$$

sont équivalentes.

Voilà encore les conventions établies sur la manière d'exprimer les puissances, qui conduisent par analogie et par extension, à des symboles particuliers, comme dans le n° 37, on est parvenu à l'expression $a^0 = 1$.

133. Je remarque à cette occasion que la règle des exposans, relative à la division (36) étant appliquée conformément à celle des signes relative à la soustraction (20), mène aussi à des expressions nouvelles, pour une certaine classe de fractions.

En effet, on a par ces règles

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

mais si l'exposant n du dénominateur surpasse l'exposant m du numérateur, l'exposant de la lettre a dans le second membre sera négatif.

Si, par exemple, $m=2$, $n=3$, on aura

$$\frac{a^2}{a^3}=a^{2-3}=a^{-1};$$

mais d'ailleurs, en simplifiant la fraction $\frac{a^2}{a^3}$, on trouve $\frac{1}{a}$: les expressions

$$\frac{1}{a} \quad \text{et} \quad a^{-1}$$

sont donc équivalentes.

En général, on a par la règle des exposans,

$$\frac{a^m}{a^{m+n}}=a^{m-m-n}=a^{-n},$$

et d'ailleurs

$$\frac{a^m}{a^{m+n}}=\frac{1}{a^n};$$

il résulte de là, que les expressions

$$\frac{1}{a^n} \quad \text{et} \quad a^{-n}$$

sont équivalentes.

En effet, le signe — qui précède l'exposant n étant pris dans le sens du n° 62, montre que l'exposant proposé vient d'une fraction dont le dénominateur contient n facteurs a de plus que le numérateur, ce qui est bien $\frac{1}{a^n}$; on peut donc, lorsqu'on rencontre l'une quelconque de ces expressions, y substituer l'autre.

D'après cette observation, la quantité $\frac{a^2 b^5}{c^2 d^3}$ considérée comme

$$a^2 b^5 \times \frac{1}{c^2} \times \frac{1}{d^3},$$

peut être mise sous la forme

$$a^2 b^5 c^{-2} d^{-3};$$

c'est-à-dire, *qu'on peut faire passer au numérateur tous les facteurs du dénominateur, en affectant leurs exposans du signe* —.

Réciproquement, *lorsqu'une quantité renferme des facteurs affectés d'exposans négatifs, on les met au dénominateur, en donnant le signe* + *à leurs exposans;* c'est ainsi que la quantité

$$a^2 b^5 c^{-2} d^{-3},$$

redevient $\frac{a^2 b^5}{c^2 d^3}$.

De la formation des puissances des quantités complexes.

134. Je commencerai par observer que les puissances des quantités complexes s'indiquent en enveloppant ces quantités d'une parenthèse, qu'on affecte de l'exposant de la puissance. L'expression

$$(4a^2 - 2ab + 5b^2)^3,$$

par exemple, désigne la troisième puissance de la quantité $4a^2 - 2ab + 5b^2$. On marquerait encore cette puissance comme ci-dessous,

$$\overline{4a^2 - 2ab + 5b^2}^3.$$

135. Les quantités binomes sont les plus simples après

les monomes; cependant, si l'on en voulait former les puissances par des multiplications successives, on ne parviendrait de cette manière qu'à des résultats particuliers pour chaque puissance, comme le sont pour la deuxième et la troisième, ceux que j'ai fait remarquer dans le numéro 34 : on formerait cette table :

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3,$$
$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4,$$
etc.;

mais on ne saisirait pas facilement la loi des coefficiens numériques de ces résultats. En réfléchissant au procédé de la multiplication, on reconnaîtra que les coefficiens numériques naissent des réductions qu'entraîne l'égalité des facteurs qui forment une puissance, et qu'en empêchant ces réductions, on rendra la composition des produits plus évidente.

Pour opérer ces effets, il suffit de donner à tous les binomes qu'on multiplie, des seconds termes différens, de prendre, par exemple,

$$x+a, \quad x+b, \quad x+c, \quad x+d, \quad \text{etc.}$$

En effectuant les multiplications que je vais indiquer, et en plaçant dans une même colonne les termes affectés d'une même puissance de x, il est aisé de trouver que

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+ab,$$
$$+bx$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+ax^2+abx+abc,$$
$$+bx^2+acx$$
$$+cx^2+bcx$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+ax^3+abx^2+abcx+abcd.$$
$$+bx^3+acx^2+abdx$$
$$+cx^3+adx^2+acdx$$
$$+dx^3+bcx^2+bcdx$$
$$+bdx^2$$
$$+cdx^2$$

Sans pousser plus loin ces produits, on peut déjà reconnaître la loi de leur formation.

En concevant que tous les termes affectés de la même puissance de x, et placés dans la même colonne, n'en forment qu'un seul, comme, par exemple,

$$ax^3+bx^3+cx^3+dx^3=(a+b+c+d)\,x^3,$$

et ainsi des autres,

1°. *On trouve dans chaque produit un terme de plus qu'il n'y a d'unités dans le nombre de ses facteurs;*

2°. *L'exposant de* x *dans le premier terme est le même que le nombre des facteurs, et va en diminuant de l'unité, d'un terme au suivant;*

3°. *La plus haute puissance de* x *n'a pour coefficient que l'unité; celle qui la suit, ou qui a une unité de moins dans son exposant, est multipliée par la somme des seconds termes des binomes; celle qui a deux unités de moins dans son exposant, l'est par la somme des divers produits qu'on obtient en multipliant, deux à deux, les seconds termes des binomes; celle qui a trois unités de moins dans son exposant, l'est par la somme des divers produits qu'on obtient en multipliant, trois à trois, les*

seconds termes des binomes, et ainsi de suite ; enfin, dans le dernier terme, l'exposant de x, *étant censé égal à zéro* (37), *se trouve composé du plus haut exposant, diminué d'autant d'unités qu'il y en a dans le nombre des facteurs, et ce terme contient le produit de tous les seconds termes des binomes.*

Il est facile de voir que la forme de ces produits doit rester soumise aux mêmes lois, quel que soit le nombre de facteurs; cependant on peut encore en avoir une preuve autre que l'analogie.

136. Il est d'abord évident que tout produit de cette espèce doit contenir les puissances successives de x, depuis celle dont l'exposant est égal au nombre des facteurs qu'on a multipliés, jusqu'à celle dont l'exposant est zéro. Pour désigner généralement le résultat, on exprimera ce nombre par la lettre m; les puissances successives de x seront indiquées par

$$x^m,\ x^{m-1},\ x^{m-2},\ \text{etc.};$$

on mettra les lettres $A, B, C, \ldots\ldots\ldots\ldots Y$, pour les quantités qui doivent les multiplier, à partir de x^{m-1}; mais le nombre des termes qui dépend des valeurs particulières données à l'exposant m, demeurant indéterminé, tant que cet exposant n'est point fixé, on ne peut écrire que les premiers et les derniers termes de l'expression, et on indique par une suite de points les termes intermédiaires qui sont sous-entendus.

C'est ainsi que la formule

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots\ldots + Y,$$

représente le produit d'un nombre quelconque m de facteurs, $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, etc.

Si on le multiplie par un nouveau facteur $x+l$, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} x^{m+1} + Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots\ldots \\ \quad + lx^m + lAx^{m-1} + lBx^{m-2} \ldots\ldots + lY \end{array}\right\}$$

Il est évident, 1°. que si A est la somme des m seconds termes a, b, c, d, etc., $A+l$ sera celle des $m+1$ seconds termes a, b, c, d, etc. l, et que par conséquent la composition assignée à ce coefficient sera vraie pour le produit du degré $m+1$, si elle est vraie pour celui du degré m.

2°. Si B est la somme des produits des m quantités a, b, c, d, etc. prises deux à deux, $B+lA$ exprimera celle des produits de $m+1$ quantités a, b, c, d, etc. l, prises aussi deux à deux; car A étant la somme des premières, lA sera celle de leurs produits par la nouvelle quantité introduite l; donc la composition assignée sera vraie pour le degré $m+1$, si elle l'est pour le degré m.

3°. Si C est la somme des produits des m quantités a, b, c, d, etc. prises trois à trois, $C+lB$ sera celle des produits des $m+1$ quantités a, b, c, d, etc. l, prises aussi trois à trois, puisque lB, d'après ce qui précède, exprimera la somme des produits des premières prises deux à deux, multipliés par la nouvelle quantité introduite l: donc la composition assignée sera vraie pour le degré $m+1$, si elle a lieu pour le degré m.

On voit que cette manière de raisonner s'étend à tous les termes, et que le dernier lY sera le produit des $m+1$ seconds termes.

Les remarques énoncées dans le numéro 135 étant vraies pour le quatrième degré, par exemple, le seront, suivant ce qu'on vient de voir, pour le cinquième, pour le sixième; et en s'élevant ainsi de degré en degré, elles seront prouvées en général.

Il suit de là que le produit d'un nombre quelconque m de facteurs binomes $x+a, x+b, x+c, x+d$, etc. étant représenté par

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{etc.},$$

A sera toujours la somme des m lettres a, b, c, etc., B celle

des produits de ces quantités prises deux à deux, C celle des produits de ces quantités prises trois à trois, et ainsi de suite.

Pour embrasser la loi de cette expression dans un seul terme, j'en considérerai un placé dans un rang indéterminé, et que, pour cette raison, je représenterai par Nx^{m-n}.

Ce terme sera le second, si l'on fait $n=1$; le troisième, si l'on fait $n=2$; le onzième, si l'on fait $n=10$, etc. Dans le premier cas, la lettre N sera la somme des m lettres a, b, c, etc.; dans le second, celle de leurs produits deux à deux; dans le troisième, celle de leurs produits dix à dix; et en général celle de leurs produits n à n.

137. Pour changer les produits

$$(x+a)(x+b),\ (x+a)(x+b)(x+c),$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d),\ \text{etc.},$$

dans les puissances de $x+a$, savoir, en

$$(x+a)^2,\qquad (x+a)^3,$$
$$(x+a)^4,\qquad \text{etc.},$$

il suffit de faire dans les développemens de ces produits,

$$a=b,\qquad a=b=c,$$
$$a=b=c=d,\qquad \text{etc.}$$

Toutes les quantités qui multiplient une même puissance de x, deviendront alors égales entr'elles : ainsi le coefficient du second terme, qui, dans le produit

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ est $a+b+c+d$,

se changera en $4a$; celui du troisième terme dans le même produit, étant

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd,$$

deviendra $6a^2$; et de là il est aisé d'apercevoir que les coefficiens des diverses puissances de x se changeront en une seule puissance de a, répétée autant de fois qu'ils

ont de termes, et marquée par le nombre de facteurs que contiennent ces termes. Ainsi, le coefficient N qui multiplie la puissance x^{m-n}, dans le développement général, sera la puissance n de a, ou a^n, répétée autant de fois qu'on peut former de produits différens en prenant de toutes les manières possibles un nombre n de lettres sur un nombre m; c'est donc à la recherche du nombre de ces produits qu'est ramenée celle du coefficient du terme affecté de x^{m-n}.

138. Pour parvenir à découvrir le nombre dont il s'agit, il faut d'abord distinguer les arrangemens ou *permutations*, des produits ou *combinaisons*. Deux lettres, a et b, ne donnent qu'un produit, mais sont susceptibles de deux arrangemens, ab et ba; trois lettres, abc, qui ne donnent qu'un produit, sont susceptibles de six arrangemens (88), et ainsi de suite.

Afin de fixer les idées, je suppose qu'il y ait en tout 9 lettres,

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i,$$

et qu'il soit question de les arranger 7 à 7; il est évident qu'en choisissant comme on voudra un arrangement de six de ces lettres, $abcdef$, par exemple, on pourra y joindre successivement chacune des trois lettres restantes g, h et i, et on aura de cette manière trois arrangemens de 7 lettres, savoir :

$$abcdefg, \quad abcdefh, \quad abcdefi.$$

Ce qu'on vient de dire sur un arrangement particulier de six lettres, conviendra également à tous; et on en doit conclure que chaque arrangement de six lettres en donnera trois de sept lettres, c'est-à-dire, autant qu'il reste de lettres qui n'y sont pas employées. Donc, si le nombre des arrangemens de six lettres est représenté par P, on aura celui des arrangemens de sept lettres en multipliant P par 3 ou $9-6$. Remplaçant les nombres 9 et 7 par m et par n,

et regardant P comme le nombre des arrangemens dont sont susceptibles m lettres prises en nombre $n-1$, le raisonnement ne changera pas, et on aura encore pour le nombre des arrangemens composés de n lettres,

$$P[m-(n-1)], \quad \text{ou} \quad P(m-n+1).$$

Cette formule renferme implicitement tous les cas particuliers. Pour en déduire, par exemple, le nombre d'arrangemens de m lettres prises deux à deux, on fera $n=2$, ce qui donnera

$$n-1=1,$$

et on aura

$$P=m;$$

car P égalera alors le nombre de lettres prises une à une: il résultera donc de là

$$m(m-2+1) \quad \text{ou} \quad m(m-1).$$

Posant ensuite

$$P=m(m-1) \quad \text{et} \quad n=3,$$

on trouvera pour le nombre d'arrangemens dont sont susceptibles m lettres prises 3 à 3,

$$m(m-1)(m-3+1)=m(m-1)(m-2).$$

En faisant

$$P=m(m-1)(m-2) \text{ et } n=4,$$

on obtiendra

$$m(m-1)(m-2)(m-3)$$

pour le nombre des arrangemens 4 à 4. On calculera donc ainsi de proche en proche les expressions du nombre d'arrangemens formés d'autant de lettres qu'on voudra (*).

139. Pour passer maintenant du nombre des arran-

(*) Dans ces arrangemens, on exclut les répétitions de la même lettre, parce que la recherche qui nous occupe n'en admet point;

gemens de n lettres, à celui des produits différens, il faut connaître le nombre d'arrangemens dont un même produit est susceptible. Pour cela, on observera que si, dans l'un quelconque de ces arrangemens, on fixe une des lettres à la première place, on pourra faire entre toutes les autres autant de permutations que le comporte un produit de $n-1$ lettres. Je prends pour exemple le produit $abcdefg$, composé de 7 lettres; on peut, en laissant a à la première place, écrire ce produit d'autant de manières que le produit de six lettres, $bcdefg$, admet d'arrangemens; mais chaque lettre du produit proposé peut être première à son tour : ainsi, nommant Q le nombre d'arrangemens dont est susceptible un produit de 6 lettres, on aura $Q\times 7$ pour celui des arrangemens d'un produit composé de 7 lettres. Il suit de là que si Q désigne le nombre d'arrangemens que peut fournir un produit de $n-1$ lettres, Qn exprimera le nombre d'arrangemens d'un produit de n lettres.

Tous les cas particuliers se déduisent sans peine de cette formule; car en faisant $n=2$, et en observant que lorsqu'il n'y a qu'une seule lettre, $Q=1$, il vient $1\times 2=2$ pour le nombre des arrangemens d'un produit de deux lettres; prenant ensuite $Q=1\times 2$ et $n=3$, on aura

---

mais la théorie des permutations et des combinaisons, servant de base au calcul des probabilités, présente des questions où cette circonstance peut avoir lieu. Pour en calculer l'effet, dans l'exemple dont je me suis servi, il suffira d'observer qu'on peut écrire indifféremment chacune des 9 lettres a, b, c, d, e, f, g, h, i, à la suite du produit de 6 lettres $abcdef$. En nommant donc P le nombre d'arrangemens de cette espèce, on aura $P\times 9$ pour le nombre d'arrangemens de 7 lettres. Par la même raison, si P désigne le nombre d'arrangemens de m lettres prises $n-1$ à $n-1$, celui des arrangemens n à n sera Pm.

Cela posé, le nombre d'arrangemens de m lettres prises 1 à 1 étant évidemment m, celui des arrangemens 2 à 2 sera $m\times m$, ou m^2; celui des arrangemens 3 à 3 sera $m\times m\times m$, ou m^3; et enfin m^n exprimera le nombre d'arrangemens n à n.

$1\times2\times3=6$ pour le nombre d'arrangemens d'un produit de trois lettres; faisant encore $Q=1\times2\times3$ et $n=4$, il en résultera $1\times2\times3\times4$, ou 24 arrangemens possibles dans un produit de 4 lettres, et ainsi de suite.

140. Ce qui précède étant bien compris, il est facile de voir qu'en divisant le nombre total des arrangemens de n lettres, fourni par les m lettres proposées, par le nombre des arrangemens dont un même produit est susceptible, on aura pour quotient le nombre des produits différens qu'on peut faire en prenant de toutes les manières possibles n facteurs parmi ces m lettres. Ce nombre sera donc exprimé par $\frac{P(m-n+1)}{Qn}$ (*); et d'après ce qu'on a vu n° 137, $\frac{P(m-n+1)}{Qn}a^n x^{m-n}$ sera le terme affecté de x^{m-n} dans le développement de $(x+a)^m$.

Il est évident que le terme qui précède celui-ci, sera exprimé par $\frac{P}{Q}a^{n-1}x^{m-n+1}$; car en remontant vers le premier terme, l'exposant de x augmente d'une unité, et celui de a diminue d'autant; de plus, P et Q sont les quantités relatives au nombre $n-1$.

(*) Il est à propos de remarquer qu'en y faisant successivement

$$n=2, \quad n=3, \quad n=4, \text{ etc.},$$

la formule $\frac{P(m-n+1)}{Qn}$ devient

$$\frac{m(m-1)}{1.2}, \quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}, \quad \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}, \text{ etc.},$$

nombres qui expriment respectivement combien on peut faire de combinaisons avec un nombre quelconque m de choses, en les prenant *deux à deux*, ou *trois à trois*, ou *quatre à quatre*, etc.

141. Si l'on fait $\frac{P}{Q} = M$, les deux termes consécutifs indiqués ci-dessus, deviendront

$$Ma^{n-1}x^{m-n+1} \text{ et } M\frac{(m-n+1)}{n}a^n x^{m-n},$$

résultats qui montrent comment chaque terme du développement de $(x+a)^m$ se forme de celui qui le précède.

En partant du premier terme, qui est x^m, on arrive au second, en faisant $n = 1$: on a $M = 1$, puisque x^m n'a pour coefficient que l'unité ; et il en résulte $\frac{1 \times m}{1} a x^{m-1}$, ou $\frac{m}{1} a x^{m-1}$. Pour passer au troisième terme, on fait $M = \frac{m}{1}$ et $n = 2$, ce qui donne $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2}$. Le quatrième s'obtient par la supposition de $M = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ et $n = 3$, qui conduit à $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3}$, et ainsi de suite, ce qui produit la formule

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} + \text{etc.},$$

que l'on peut convertir dans cette règle :

Pour passer d'un terme à celui qui le suit, multipliez le coefficient numérique par l'exposant de x *dans le premier ; divisez par le nombre qui marque le rang de ce terme ; augmentez de l'unité l'exposant de* a, *et diminuez pareillement celui de* x.

Quoiqu'on ne puisse fixer le nombre des termes de

cette formule qu'en assignant une valeur particulière à m, il ne doit cependant rester maintenant aucun doute sur la loi que suivent les termes de la formule, quelqu'éloignés qu'on les suppose du premier; et on voit que

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}a^n x^{m-n}$$

exprime le terme qui en a n avant lui.

Cette dernière formule s'appelle le *terme général* de la suite

$$x^m+\frac{m}{1}ax^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2}+\text{etc.},$$

parce qu'en faisant successivement

$$n=1,\quad n=2,\quad n=3,\text{ etc.},$$

elle donne tous les termes de cette suite.

142. Appliquons maintenant la règle du numéro précédent à la formation du développement de $(x+a)^5$; le premier terme étant

$$x^5 \quad \text{ou} \quad a^0x^5 \ (37),$$

le second sera

$$\frac{5}{1}a^1x^4 \quad \text{ou} \quad 5ax^4,$$

le troisième

$$\frac{5\times 4}{2}a^2x^3 \quad \text{ou} \quad 10a^2x^3,$$

le quatrième

$$\frac{10\times 3}{3}a^3x^2 \quad \text{ou} \quad 10a^3x^2,$$

le cinquième

$$\frac{10\times 2}{4}a^4x \quad \text{ou} \quad 5a^4x,$$

le sixième

$$\frac{5\times 1}{5}a^5x^0 \quad \text{ou} \quad a^5.$$

Le développement s'arrête ici, parce que pour passer au terme suivant, il faudrait multiplier par l'exposant de x dans le sixième, et que cet exposant est zéro.

C'est aussi ce que montre la formule; car le septième terme ayant pour coefficient numérique,

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6},$$

contient dans le cas actuel, le facteur $m-5$, qui devient $5-5$ ou 0; et ce même facteur entrant dans les termes qui viennent après, les rend tous nuls.

En réunissant les termes que j'ai obtenus ci-dessus, il vient

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

143. On déduirait en général de la formule du numéro 141, le développement de la puissance quelconque d'un binome quelconque. Si l'on avait, par exemple, à former la sixième puissance de $2x^3 - 5a^3$, il suffirait de remplacer dans la formule les puissances de x et de a par celles de $2x^3$ et de $-5a^3$ respectivement, puisque si l'on faisait

$$2x^3 = x' \quad \text{et} \quad -5a^3 = a',$$

on aurait

$$(2x^3 - 5a^3)^6 = (x' + a')^6 =$$
$$x'^6 + 6a'x'^5 + 15a'^2x'^4 + 20a'^3x'^3 + 15a'^4x'^2 + 6a'^5x' + a'^6 \quad (141),$$

et il resterait à substituer pour x' et pour a' les quantités que ces lettres désignent. On trouverait

$$(2x^3)^6 + 6(-5a^3)(2x^3)^5 + 15(-5a^3)^2(2x^3)^4 + 20(-5a^3)^3(2x^3)^3 + 15(-5a^3)^4(2x^3)^2 + 6(-5a^3)^5(2x^3) + (-5a^3)^6,$$

ou

$$64x^{18} - 960a^3x^{15} + 6000a^6x^{12} - 20000a^9x^9 + 37500a^{12}x^6 - 37500a^{15}x^3 + 15625a^{18}.$$

Les termes de ce développement sont alternativement positifs et négatifs ; et il est visible qu'il en sera toujours de même, lorsque le second terme du binome proposé aura le signe —.

144. On prépare la formule du numéro 141, d'une manière qui en facilite l'application dans les cas analogues au précédent.

En observant que

$$x^{m-1}=\frac{x^m}{x},\quad x^{m-2}=\frac{x^m}{x^2},\quad x^{m-3}=\frac{x^m}{x^3},\text{ etc.},$$

elle peut être écrite ainsi

$$x^m+\frac{m}{1}\frac{a}{x}x^m+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{a^2}{x^2}x^m+\text{etc.},$$

ce qui revient à

$$x^m\left\{1+\frac{m}{1}\frac{a}{x}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{a^2}{x^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{a^3}{x^3}+\text{etc.}\right\},$$

en isolant le facteur commun x^m. Pour calculer par cette formule, il faut *former la suite des nombres*

$$\frac{m}{1},\quad \frac{m-1}{2},\quad \frac{m-2}{3},\quad \frac{m-3}{4},\text{ etc.},$$

multiplier d'abord le premier par la fraction $\frac{a}{x}$, *puis le résultat par le second, et encore par la fraction* $\frac{a}{x}$, *puis encore le résultat par le troisième et par la fraction* $\frac{a}{x}$, *et ainsi de suite ; ajouter la somme de ces termes à l'unité, et enfin multiplier le tout par le facteur* x^m.

Dans l'exemple $(2x^3-5a^3)^6$, il faut écrire $(2x^3)^6$ à

la place de x^m, et $-\frac{5a^3}{2x^3}$ à celle de $\frac{a}{x}$. Je laisserai au lecteur le soin d'effectuer le calcul (*).

145. On ramène facilement le développement de la puissance d'un polynome quelconque, à celui des puissances du binome, ainsi que je vais le montrer, en formant la troisième puissance du trinome $a+b+c$.

Je fais d'abord $b+c=m$, et j'obtiens

$$(a+b+c)^3=(a+m)^3=a^3+3a^2m+3am^2+m^3;$$

mettant ensuite pour m le binome $b+c$, qu'elle représente, j'ai

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3.$$

Il ne reste plus qu'à développer les puissances du binome $b+c$, et à effectuer, sur ces puissances, les multiplications indiquées, ce qui donnera

$$\begin{aligned} &a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ &+3a^2c+6abc+3b^2c\\ &+3ac^2+3bc^2\\ &+c^3. \end{aligned}$$

De l'extraction des racines des quantités complexes.

146. Ayant exposé la composition des puissances des quantités complexes, je vais passer à l'extraction de leurs racines, en commençant par la racine cubique des nombres.

Pour opérer l'extraction de la racine cubique des

(*) La formule du développement de $(x+a)^m$ convient à toutes les valeurs de l'exposant m, et s'applique également au cas où cet exposant serait fractionnaire ou négatif. Cette propriété, qui est très importante, est prouvée dans le *Complément* de ce Traité

nombres, il faut d'abord connaître les cubes des nombres d'un seul chiffre ; on les trouvera dans la seconde ligne de la table ci-dessous :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729

et le cube de 10 étant 1000, tout nombre de trois chiffres ne renferme que le cube d'un nombre d'un seul.

La formation du cube d'un nombre de deux chiffres s'opère d'une manière analogue à celle du quarré ; car en décomposant ce nombre en dixaines et en unités, désignant ensuite les premières par a, les secondes par b, il vient

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

ce qui fait voir que *le cube, ou la troisième puissance d'un nombre composé de dixaines et d'unités, renferme quatre parties, savoir : le cube des dixaines, trois fois le quarré des dixaines multiplié par les unités, trois fois les dixaines multipliées par le quarré des unités, enfin le cube des unités.*

Soit 47 le nombre dont on demande la troisième puissance ; en faisant $a = 4$ dixaines ou 40, $b = 7$ unités, on trouvera

$$\begin{aligned} a^3 &= 64000 \\ 3a^2b &= 33600 \\ 3ab^2 &= 5880 \\ b^3 &= 343 \\ \text{Total} \ldots\ldots &= 103823 = 47 \times 47 \times 47. \end{aligned}$$

Pour revenir maintenant du cube 103823 à sa racine 47, on remarquera d'abord que 64000, cube des dixaines 4, n'a point de chiffres significatifs d'un ordre inférieur aux mille ; on peut donc, dans la recherche du cube des dixaines, faire abstraction des

centaines, des dixaines et des unités du nombre 103823. D'après cela, en disposant l'opération comme pour l'extraction de la racine quarrée, on séparera les trois premiers chiffres sur la droite par une virgule ; le plus grand cube contenu dans 103, sera celui des dixaines. On verra par la table précédente que ce cube est 64, dont la racine est 4 ; on posera donc 4 à la place destinée à la racine. On retranchera ensuite 64 de 103 ; et à côté du reste 39, on abaissera les trois derniers chiffres. Le reste total, 39823, contiendra encore trois parties du cube, savoir, trois fois le quarré des dixaines multiplié par les unités, ou $3a^2b$, trois fois les dixaines multipliées par le quarré des unités, ou $3ab^2$, et le cube des unités, ou b^3. Si l'on avait la valeur du produit $3a^2b$, comme on connaît déjà les dixaines a, en divisant ce produit par $3a^2$, on obtiendrait les unités b ; mais quoiqu'on ne connaisse pas $3a^2b$, on sait cependant que ce produit ne doit avoir aucun chiffre significatif d'un ordre inférieur aux centaines, puisqu'il contient le facteur a^2 qui exprime le quarré des dixaines : il ne peut donc se trouver que dans la partie 398, qui reste du nombre 39823, après qu'on en a séparé les dixaines et les unités, partie qui contient en outre les centaines que fournissent le produit $3ab^2$ des dixaines par le quarré des unités, et le cube b^3 des unités.

103,823	47
64	48
39 8,23	

En divisant 398 par 48, qui exprime, dans l'exemple proposé, le triple quarré des dixaines, $3a^2$ ou 3×16, on trouvera pour quotient 8 ; mais ce qui précède fait voir qu'on ne doit pas adopter ce chiffre pour les unités de la racine cherchée sans l'avoir vérifié, et cela en formant les trois dernières parties du cube que doit contenir le reste 39823. En faisant $b = 8$, on trouve

$$3a^2b = 38400$$
$$3ab^2 = 7680$$
$$b^3 = 512$$

Total..... 46592

et ce résultat, surpassant 39823, prouve qu'il faut diminuer le nombre 8 pris pour les unités. En essayant 7 de la même manière, on voit qu'il satisfait aux conditions, et que par conséquent 47 est la racine demandée.

Au lieu de faire la vérification que je viens d'employer, on préfère ordinairement d'élever immédiatement au cube le nombre qu'expriment les deux chiffres trouvés, en le multipliant par son quarré. En opérant ainsi sur 48, on trouvera

$$48 \times 48 \times 48 = 110592,$$

et ce nombre, étant plus grand que le proposé 103823, montre encore que le chiffre 8 est trop fort.

147. Ce qu'on a pratiqué sur l'exemple ci-dessus doit s'effectuer de même sur tous les nombres exprimés par plus de trois chiffres et moins de 7. Ayant séparé les trois premiers vers la droite, on cherchera le plus grand cube contenu dans la partie restante à gauche; on portera sa racine à la place qui lui est destinée; on retranchera ce cube de la partie du nombre proposé sur laquelle on a opéré; à côté du reste, on abaissera les trois derniers chiffres; on séparera les dixaines et les unités, et on divisera ce qui reste à gauche par le triple du quarré des dixaines trouvées; mais avant d'écrire le quotient à la racine, on le vérifiera en élevant au cube le nombre qu'exprime ce chiffre joint aux dixaines connues. Si le résultat de cette opération est trop fort, on diminuera le chiffre des unités; on procédera à une nouvelle vérification, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve un résultat égal au nombre proposé, ou moindre

que ce nombre, s'il n'est pas un cube parfait. Dans ce cas, la racine trouvée n'est que celle du plus grand cube qu'il contient. Comme on a souvent des restes très considérables, voici à quoi on pourra reconnaître si le chiffre des unités n'est pas trop faible.

Le cube de $a+b$, lorsqu'on fait $b=1$, devient celui de $a+1$, et a pour expression

$$a^3+3a^2+3a+1,$$

quantité qui surpasse a^3, cube de a, de

$$3a^2+3a+1.$$

Il suit de là que *tant que le reste d'une extraction de la racine cubique sera moindre que trois fois le quarré de la racine, plus trois fois la racine, plus l'unité, cette racine ne sera pas trop faible.*

148. Pour extraire la racine de 1,05823817, on observera d'abord que, quel que soit le nombre de chiffres de cette racine, si on la décompose en unités et dixaines, le cube de celles-ci ne pourra faire partie des trois derniers chiffres vers la droite, et devra par conséquent se trouver dans 105823. Mais le plus grand cube contenu dans 105823 aura plus d'un chiffre à sa racine, qui pourra par conséquent se décomposer en unités et dixaines; et le cube de ces dixaines, ne descendant pas au-dessous des mille, ne pourra faire partie des trois derniers chiffres 823. Si, après la séparation de ceux-ci, il restait encore plus de trois chiffres vers la gauche, on répéterait le raisonnement précédent, et l'on parviendrait ainsi à marquer la place du cube des unités de l'ordre le plus élevé de la racine cherchée, en partageant le nombre proposé en tranches de trois chiffres, en allant de droite à gauche, la dernière pouvant en contenir moins de trois.

Cela posé, après avoir préparé l'opération comme

à l'ordinaire, on cherchera d'abord, par la règle du n° précédent, la racine cubique des deux premières tranches à gauche, et on trouvera 47 pour résultat; on retranchera le cube de ce nombre des deux tranches qui le contiennent; à côté du reste 2000, on abaissera la tranche suivante 817, et le nombre 2000817 doit renfermer les trois dernières parties du cube d'un nombre dont 47 exprime les dixaines, et dont on cherche les unités: on trouvera donc ces unités, comme dans l'exemple du numéro cité, en séparant les deux derniers chiffres vers la droite du reste, et en divisant la partie à gauche par 6627, triple du quarré de 47. On vérifiera le quotient 3, en élevant 473 au cube, et on trouvera pour résultat le nombre proposé lui-même, parce que ce nombre est un cube parfait.

105,823,817	473
64	48
41 8,23	6627
103 823	
2 0008,17	
105 823 817	
000 000 000	

L'explication de l'exemple ci-dessus peut tenir lieu de règle générale. Si le nombre proposé avait une tranche de plus, on continuerait l'opération comme on l'a fait pour la troisième; et il ne faudrait pas manquer de mettre un zéro à la racine, si le nombre à diviser sur la gauche du reste, ne contenait point celui par lequel il faut le diviser: on descendrait alors la tranche suivante, et on opérerait sur cette tranche réunie au reste, comme sur les précédentes.

149. Puisque *le cube d'une fraction s'obtient en multipliant cette fraction par son quarré, ou, ce qui revient au même, en cubant son numérateur, et en cubant son dénominateur*, il s'ensuit qu'*on retombera sur la racine, en prenant celle du nouveau numérateur et celle du nouveau dénominateur*. Le cube de $\frac{5}{6}$, par exemple,

est $\frac{125}{216}$; prenant la racine cubique de 125 et celle de 216, on retrouve $\frac{5}{6}$.

Tel est le procédé qu'il faut suivre lorsque le numérateur et le dénominateur sont tous deux des cubes parfaits : mais lorsque cela n'a pas lieu, on s'épargne la peine d'extraire la racine du dénominateur, en multipliant par son quarré les deux termes de la fraction proposée; car le dénominateur résultant de cette opération se trouve le cube du dénominateur primitif, et il ne reste qu'à prendre la racine du numérateur. Si l'on avait, par exemple, $\frac{3}{5}$, en multipliant les deux termes de cette fraction par 25, quarré du dénominateur, on aurait

$$\frac{75}{5\times5\times5};$$

la racine du dénominateur est 5 : quant à celle de 75, on trouve qu'elle est entre 4 et 5. En se bornant à 4, on aura $\frac{4}{5}$ pour la racine cubique de $\frac{3}{5}$, à moins d'un cinquième près. Pour avoir une exactitude plus grande, il faudra extraire la racine approchée de 75 par les moyens que j'indiquerai plus bas.

Lorsque le dénominateur sera déjà un quarré parfait, il suffira de multiplier les deux termes de la fraction par la racine quarrée du dénominateur. Ainsi pour trouver la racine cubique de $\frac{4}{9}$, je multiplie les deux termes par 3, racine quarrée de 9, et j'obtiens

$$\frac{12}{3\times3\times3};$$

prenant la racine du plus grand cube 8 contenu dans 12, il vient $\frac{2}{3}$ pour la racine cherchée, à moins d'un tiers.

150. Il suit des n° 97, 98 et 126, que les puissances

des fractions irréductibles sont aussi des fractions irréductibles, et que par conséquent la racine cubique d'un nombre qui n'est pas un cube parfait, ne peut s'exprimer exactement par aucune fraction, quelque grand que soit le dénominateur : c'est donc une quantité irrationnelle, mais d'une espèce différente de la racine quarrée ; car le plus souvent il est impossible d'exprimer l'une par l'autre.

151. On pourrait obtenir la racine cubique approchée, par le moyen des fractions ordinaires, en se servant d'un procédé analogue à celui que j'ai fait connaître, n° 103, sur la racine quarrée, et trop facile à imaginer pour que je m'y arrête, vu qu'il serait d'ailleurs peu commode.

La meilleure manière d'employer les fractions ordinaires pour cette recherche, consiste à extraire la racine en fractions d'une espèce donnée. Pour obtenir, par exemple, la racine cubique de 22, à moins d'un cinquième d'unité, on observera que le cube de $\frac{1}{5}$ est $\frac{1}{125}$, et on réduira par conséquent 22 en $\frac{2750}{125}$: la racine de 2750, étant prise en nombre entier, on aura $\frac{14}{5}$, ou $2\frac{4}{5}$, pour celle de 22.

152. Le moyen le plus en usage pour extraire par approximation, la racine cubique d'un nombre, consiste à convertir ce nombre en fraction décimale, mais en observant que ce ne peut être qu'en millièmes ou en millionièmes, etc., parce que les dixièmes deviennent des millièmes lorsqu'on les élève à la troisième puissance, les centièmes se changent en millionièmes, et en général, *le nombre des chiffres décimaux qui se trouvent au cube est triple de celui que contient la racine.* Il faut conclure de là qu'on doit mettre à la suite du nombre proposé, trois fois autant de zéros qu'on veut avoir de décimales à sa racine. On fera ensuite l'extraction d'après les règles exposées dans ce qui pré-

cède, et on séparera au résultat le nombre demandé de chiffres décimaux.

Si l'on voulait avoir, par exemple, la racine cubique de 327, à moins d'un centième près, on écrirait six zéros à la suite de ce nombre, et on extrairait, d'après la règle, la racine de 327000000. Voici l'opération :

327,000,000	688
216	108
1110,00	13872
314 432	
12 5680,00	
325 660 672	
1 339 328	

On séparerait ensuite deux chiffres décimaux sur la droite du résultat, et on aurait 6,88 ; mais il sera plus exact de prendre 6,89, parce que le cube de ce dernier nombre, quoique plus fort que 327, en approche davantage que celui de 6,88.

Si le nombre proposé contenait déjà des décimales, il faudrait, avant de commencer l'extraction, mettre à sa droite autant de zéros qu'il serait nécessaire pour rendre le nombre de chiffres décimaux multiple de 3. Soit, par exemple, 0,07, on écrira 0,070 : prenant la racine de 70 millièmes, on trouvera 0,4. Pour pousser l'exactitude jusqu'aux centièmes, il faudrait mettre encore trois zéros de plus, ce qui ferait 0,070000. La racine de 70000, extraite en nombres entiers, étant 41, celle de 0,07, à moins d'un centième près, serait 0,41.

153. Après avoir fourni les moyens d'extraire la racine quarrée et la racine cubique des nombres, la formule du binome conduit à un procédé analogue pour obtenir la racine d'un degré quelconque ; mais avant

d'exposer ce procédé, je ferai quelques remarques sur l'extraction des racines dont l'exposant est un nombre qui a des diviseurs.

L'extraction de la racine quatrième peut s'effectuer au moyen de deux extractions successives de la racine quarrée, car en prenant d'abord la racine quarrée d'une quatrième puissance, de a^4, par exemple, on tombe sur le quarré, ou a^2, résultat dont la racine quarrée est a, ou la quantité cherchée.

On verra de même que trois extractions successives de la racine quarrée équivalent à l'extraction de la racine huitième, puisque la racine quarrée de a^8 est a^4, que celle de a^4 est a^2, et qu'enfin celle de a^2 est a.

Il est évident de cette manière, que toute racine d'un degré marqué par quelqu'un des nombres 2, 4, 8, 16, 32, etc., c'est-à-dire par une puissance de 2, s'obtiendra par une suite d'extractions de la racine quarrée.

Les racines dont les exposans ne sont pas des nombres premiers, peuvent se ramener à d'autres d'un degré moins élevé; la racine sixième, par exemple, s'obtiendra par une extraction de la racine quarrée suivie d'une extraction de la racine cubique. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer qu'en opérant ainsi sur a^6, on trouve d'abord a^3, puis a; on pourrait aussi prendre d'abord la racine cubique, ce qui donnerait a^2, puis la racine quarrée, et on aurait a.

154. Je passe maintenant à la méthode générale, que j'appliquerai au cinquième degré. Sa marche sera plus facile à saisir sur un cas particulier; et en la rapprochant des règles que j'ai données pour l'extraction de la racine quarrée et pour celle de la racine cubique, on verra sans peine comment il faut opérer pour un degré quelconque.

Soit donc à extraire la racine cinquième de 23155400 7. J'observe d'abord que le plus petit nombre de 2 chiffres, c'est-à-dire 10, en a six à sa cinquième puissance, qui est 100000, et j'en conclus que la racine cinquième du nombre proposé a au moins deux chiffres : je pourrai donc représenter cette racine par $a + b$, a étant les dixaines, et b les unités ; et le nombre proposé aura pour expression

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + \text{etc.}$$

Je ne développe point tous les termes de cette puissance, parce qu'il suffit de connaître la composition des deux premiers, ainsi qu'on va le voir.

Cela posé, il est évident que a^5, ou la cinquième puissance des dixaines de cette racine, ne pouvant descendre au-dessous des centaines de mille, ne fait point partie des cinq premiers chiffres à droite ; je sépare donc ces cinq chiffres. S'il en restait plus de cinq à gauche, je ferais à leur égard le même raisonnement que tout à l'heure, et je séparerais ainsi le nombre proposé en tranches de cinq chiffres, en allant de droite à gauche : la dernière de ces tranches vers la gauche contiendra la cinquième puissance des unités de l'ordre le plus élevé qui soit dans la racine.

En formant les cinquièmes puissances des nombres d'un seul chiffre, je reconnais que 2315 tombe entre la cinquième puissance de 4, qui est 1024, et celle de 5, qui est 3125.

2315,54007	47
1024	
1291 5,4007	1280

Je prends donc 4 pour les dixaines de la racine cherchée ; et retranchant la cinquième puissance de ce nombre, ou 1024, de la première tranche du nombre proposé, j'ai pour reste 1291, à côté duquel je descends la tranche suivante. Le nombre qui en résulte doit contenir les

termes $5a^4b + 10a^3b^2$ + etc. restant de $(a+b)^5$, après qu'on en a retranché a^5; mais le plus élevé de ces termes est $5a^4b$, ou cinq fois la quatrième puissance des dixaines multipliée par les unités, parce qu'il ne descend pas au-dessous des dixaines de mille. Pour le considérer en particulier, on séparera les 4 derniers chiffres sur la droite, qui n'en font point partie, et le nombre 12915, restant à gauche, contiendra ce terme, plus les dixaines de mille provenant des termes qui le suivent. On voit donc qu'en divisant 12915 par $5a^4$, ou cinq fois la quatrième puissance des 4 dixaines trouvées, on ne parviendra qu'à approcher des unités. La quatrième puissance de 4 est 256; son quintuple s'élève à 1280; divisant 12915 par 1280, on trouverait 10 pour quotient; mais on ne saurait mettre plus de 9 à la racine, et il faut même, avant d'adopter ce chiffre, essayer si la racine 49 qu'il donne, en le joignant aux 4 dixaines qu'on a déjà, ne produit pas une cinquième puissance plus forte que le nombre proposé. On trouve de cette manière qu'il faut diminuer le nombre 49 de deux unités, et que la vraie racine est 47, avec un reste égal à 2209000; car la cinquième puissance de 47 est 229345007; c'est-à-dire que la racine exacte du nombre proposé tombe entre 47 et 48.

S'il y avait une tranche de plus, on l'abaisserait pour la joindre au reste qu'ont laissé les deux premières tranches, après la soustraction de la cinquième puissance des deux chiffres déjà trouvés; on opérerait sur ce reste comme on a fait sur le précédent, et ainsi de suite.

D'après ce qu'on vient de lire, il est facile d'étendre au cas actuel les règles données, tant pour extraire la racine quarrée et la racine cubique des fractions, que pour approcher des racines des puissances imparfaites de ces degrés.

155. C'est par des procédés fondés sur les mêmes principes, qu'on parvient à extraire les racines des quantités littérales; l'exemple suivant suffira pour montrer comment on doit s'y prendre dans un degré quelconque.

On a trouvé, dans le n° 143, la sixième puissance de $2x^3 - 5a^3$; je reprends cette puissance pour en extraire la racine sixième, et pour cela je la dispose comme il suit :

$$\begin{array}{l|l} 64x^{18} - 960a^3x^{15} + 6000a^6x^{12} - 20000a^9x^9 & \\ \quad + 37500a^{12}x^6 - 37500a^{15}x^3 & 2x^3 - 5a^3 \\ \quad + 15625a^{18} & \overline{192x^{15}} \\ -64x^{18} & \\ \hline \text{reste} \quad -960a^3x^{15} + \text{etc.} & \end{array}$$

La quantité proposée étant ordonnée par rapport à x, son premier terme doit être la sixième puissance du premier terme de la racine ordonnée de la même manière ; prenant en conséquence la racine sixième de $64x^{18}$, suivant la règle du n° 129, on a $2x^3$.

En élevant ce résultat à la sixième puissance, et la soustrayant de la quantité proposée, le reste qu'on obtient, commence nécessairement par le deuxième terme du développement de la sixième puissance des deux premiers termes de la racine. Or, dans l'expression

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5 b + \text{etc.},$$

ce terme est le produit de six fois la cinquième puissance du premier terme de la racine par le second; et si on le divisait par $6a^5$, le quotient serait le second terme b.

Il faut donc former six fois la cinquième puissance du premier terme $2x^3$ de la racine, ce qui donnera

$$6 \times 32x^{15} \text{ ou } 192x^{15},$$

et diviser par cette quantité le terme $-960a^3x^{15}$, qui commence le reste de l'opération précédente ; le quotient $-5a^3$ est le second terme de la racine. Pour le vérifier, on éleverait à la sixième puissance, le binome $2x^3-5a^3$; et le résultat donnerait la quantité proposée.

Si la racine devait contenir un terme de plus, on trouverait après l'opération ci-dessus, un second reste qui commencerait par six fois le produit de la cinquième puissance des deux premiers termes de la racine, par le troisième, et qu'il faudrait par conséquent diviser par $6(2x^3-5a^3)^5$: le quotient serait ce troisième terme de la racine ; et on le vérifierait en formant la sixième puissance des trois termes trouvés. On procéderait de même pour obtenir tous les termes suivans, en quelque nombre qu'ils fussent.

Des équations à deux termes.

156. Toute équation où l'inconnue se trouve à la même puissance dans chacun des termes qui la contiennent, peut toujours se réduire à deux termes, dont l'un est la réunion de tous ceux qui renferment l'inconnue, et l'autre comprend l'assemblage des quantités données : on l'a déjà vu pour le second degré, n° 105, et il est facile de le concevoir pour un degré quelconque.

Si l'on a par exemple l'équation

$$a^2x^5 - a^5b^2 = b^4c^3 + acx^5,$$

en passant tous les termes affectés de x dans un seul membre, on en déduira

$$a^2x^5 - acx^5 = b^4c^3 + a^5b^2$$

ou

$$(a^2 - ac)x^5 = b^4c^3 + a^5b^2.$$

Si maintenant on représente les quantités

$a^3 - ac$ par p, $b^4c^3 + a^5b^4$ par q,

l'équation précédente deviendra

$$px^5 = q;$$

et en dégageant la quantité x^5, on aura

$$x^5 = \frac{q}{p},$$

d'où l'on conclura

$$x = \sqrt[5]{\frac{q}{p}}.$$

En général, toute équation à deux termes étant ramenée à la forme

$$px^m = q,$$

donne alors

$$x^m = \frac{q}{p};$$

et prenant la racine du degré m de chaque membre, on a

$$x = \sqrt[m]{\frac{q}{p}}.$$

157. Il faut observer que si l'exposant m est un nombre impair, le radical n'aura qu'un seul signe, qui sera celui de la quantité qu'il affecte (131).

Quand l'exposant m sera pair, le radical aura le double signe $\pm$; il sera alors imaginaire si la quantité $\frac{q}{p}$ est négative, et la question sera absurde, comme pour le second degré (131).

Voici quelques exemples.

L'équation $x^5 = -1024$ donne

$$x = \sqrt[5]{-1024} = -4,$$

parce que l'exposant 5 est impair.

L'équation $x^4 = 625$ donne,

$$x = \pm\sqrt[4]{625} = \pm 5,$$

parce que l'exposant 4 est pair.

Enfin, l'équation $x^4 = -16$ donnant

$$x = \pm\sqrt{-16},$$

ne conduit qu'à des valeurs imaginaires, parce que l'exposant 4 étant pair, la quantité placée sous le radical est négative.

158. Avant d'aller plus loin, je ferai connaître un fait analytique qui sera très utile, tant pour la suite de cet ouvrage que pour son *Complément*, et qui est par lui-même assez remarquable : c'est que toutes les expressions $x - a$, $x^2 - a^2$, $x^3 - a^3$, et en général $x^m - a^m$ (m étant un nombre entier positif quelconque), sont exactement divisibles par $x - a$. La chose est évidente pour la première ; on sait que la seconde

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a) \quad (34),$$

et par la division, on décomposerait facilement les autres. En divisant de même $x^m - a^m$ par $x - a$, on trouverait pour quotient

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \text{etc.},$$

l'exposant de x diminuant toujours de l'unité, et celui de a augmentant pareillement ; mais au lieu de suivre le détail de cette opération, je poserai sur-le-champ l'équation

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1},$$

qu'on peut vérifier, en multipliant le second membre par $x-a$. Il devient alors

$$x^m+ax^{m-1}+a^2x^{m-2}\ldots\ldots\ldots+a^{m-2}x^2+a^{m-1}x$$
$$-ax^{m-1}-a^2x^{m-2}-a^3x^{m-3}\ldots\ldots\ldots-a^{m-1}x-a^m;$$

tous les termes de la première ligne, à partir du second, étant les mêmes, au signe près, que ceux qui précèdent le dernier de la seconde ligne, il reste seulement, après la réduction, x^m-a^m; c'est-à-dire le dividende proposé.

Il faut observer qu'à la suite du terme a^2x^{m-2} vient nécessairement, dans la ligne supérieure, le terme a^3x^{m-3}, qui se trouve détruit par son correspondant inférieur; et que de même, dans la ligne inférieure, on trouve, avant le terme $a^{m-1}x$, un terme $-a^{m-2}x^2$, qui détruit son correspondant supérieur. Ces termes ne sont point écrits, parce qu'ils sont censés compris dans l'intervalle indiqué par les points.

159. Ceci conduit à des conséquences fort importantes, relativement à l'équation à deux termes

$$x^m=\frac{q}{p}.$$

En désignant par a le nombre que donne l'extraction immédiate de la racine, opérée d'après les règles du n° 154, on a

$$\frac{q}{p}=a^m \quad \text{ou} \quad x^m=a^m;$$

et transposant le second membre dans le premier, il vient

$$x^m-a^m=0.$$

La quantité x^m-a^m se divise par $x-a$, et on a, par le numéro précédent,

$$x^m-a^m=(x-a)(x^{m-1}+ax^{m-2}\ldots\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1});$$

ce dernier résultat, qui s'évanouit lorsque $x=a$, deviendrait également nul si l'on avait

$$x^{m-1}+ax^{m-2}.....+a^{m-2}x+a^{m-1}=0 \quad (116);$$

et s'il existait par conséquent une valeur de x qui satisfît à cette dernière équation, elle satisferait également à la proposée.

Ces valeurs ont avec l'unité, des relations fort simples, que l'on découvrira en faisant $x=ay$; par là l'équation $x^m-a^m=0$ deviendra

$$a^m y^m-a^m=0 \quad \text{ou} \quad y^m-1=0,$$

et on obtiendra les valeurs de x en multipliant celles de y par le nombre a.

L'équation $y^m-1=0$ donne en premier lieu

$$y^m=1, \quad y=\sqrt[m]{1}=1;$$

puis, en divisant y^m-1 par $y-1$, il vient

$$y^{m-1}+y^{m-2}+y^{m-3}.....+y^2+y+1;$$

et ce quotient étant égalé à zéro, est l'équation d'où dépendent les autres valeurs de y, qui auront, aussi bien que l'unité, la propriété de satisfaire à l'équation

$$y^m-1=0 \quad \text{ou} \quad y^m=1,$$

c'est-à-dire que leur puissance du degré m sera l'unité.

De là résulte cette conséquence, singulière au premier coup-d'œil, que l'unité peut avoir plusieurs *racines* autres qu'elle-même.

Ces racines, qui sont négatives ou imaginaires, sont malgré cela d'un fréquent usage dans l'analyse; mais je ne peux faire connaître ici que celles des quatre premiers degrés, parce qu'il n'y a que pour ces degrés que l'on puisse résoudre, par ce qui précède, l'équation

$$y^{m-1}+y^{m-2}.....+1=0$$

qui les donne.

Soit, 1°. $m=2$, on a

$$y^2-1=0,$$

d'où l'on tire

$$y=+1,\quad y=-1.$$

2°. En faisant $m=3$, il vient

$$y^3-1=0,$$

d'où l'on tire

$$y=1,$$

puis

$$y^2+y+1=0.$$

Cette dernière équation étant résolue, donne

$$y=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad y=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2};$$

ainsi on a pour ce degré, les trois racines

$$y=1,\quad y=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad y=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Les deux dernières sont imaginaires; mais si l'on en fait le cube, en formant, d'après le n° 34, celui du numérateur, et si l'on observe que le quarré de $\sqrt{-3}$ étant -3, son cube est $-3\sqrt{-3}$, on trouvera encore $y^3=1$, comme par la racine $y=1$.

3°. Prenant $m=4$, on a

$$y^4-1=0,$$

d'où l'on déduit

$$y=1,$$

puis

$$y^3+y^2+y+1=0,$$

ce qui revient à

$$y^2(y+1)+y+1=(y+1)(y^2+1)=0,$$

et d'où l'on tire

$$y+1=0,\quad \text{ou}\quad y^2+1=0,$$

équations qui donnent

$$y = -1, \quad y = +\sqrt{-1}, \quad y = -\sqrt{-1};$$

les quatre racines de la proposée sont donc

$$y = +1, \quad y = -1, \quad y = +\sqrt{-1}, \quad y = -\sqrt{-1}.$$

De ces quatre valeurs, deux seulement sont réelles, et les deux autres imaginaires.

On les trouve aussi en observant que

$$y^4 - 1 = (y^2 - 1)(y^2 + 1),$$

d'où il résulte successivement

$$y^2 - 1 = 0, \quad y^2 + 1 = 0.$$

Cette multiplicité de racines de l'unité tient à une loi générale des équations, d'après laquelle une inconnue admet autant de valeurs qu'il y a d'unités dans l'exposant du degré de l'équation qui la détermine; et quand la question ne comporte pas ce nombre de solutions réelles, il est complété par des symboles purement algébriques, qui, lorsqu'on les soumet aux opérations indiquées dans l'équation, la vérifient.

Il suit de là que les racines des nombres ont deux espèces d'expressions ou de valeurs; la première, que j'appellerai *détermination arithmétique*, est le nombre qu'on trouve par les procédés exposés dans le n°. 154, et qui est unique pour chaque cas particulier; la seconde comprend les valeurs négatives et les expressions imaginaires, que je désignerai sous le nom de *déterminations algébriques*, parce qu'elles ne doivent leur existence qu'à la combinaison des signes de l'Algèbre.

Des équations qui peuvent se résoudre comme celles du second degré.

160. Le caractère de ces équations consiste en ce qu'elles ne contiennent que deux puissances différentes

de l'inconnue, et que l'exposant de l'une est double de celui de l'autre; leur formule générale est

$$x^{2m} + px^m = q,$$

p et q étant des quantités connues.

Si l'on prend d'abord x^m pour l'inconnue, ou que l'on fasse $x^m = u$, on aura

$$x^{2m} = u^2;$$

d'où

$$u^2 + pu = q,$$

$$u = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2} \quad (109);$$

remettant x^m pour u, il viendra

$$x^m = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2},$$

équation à deux termes, puisque l'expression

$$-\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2},$$

ne renfermant que des opérations connues, à effectuer sur des quantités données, doit être regardée comme représentant des quantités connues.

En désignant par a et par a', les deux valeurs de cette expression, on aura

$$x^m = a \text{ et } x^m = a',$$

d'où l'on tirera

$$x = \sqrt[m]{a} \text{ et } x = \sqrt[m]{a'}.$$

Si l'exposant m était pair, au lieu des deux valeurs ci-dessus, on en aurait quatre, puisque chaque radical serait susceptible du signe $\pm$: il viendrait

$$x = +\sqrt[m]{a}, \quad x = +\sqrt[m]{a'},$$

$$x = -\sqrt[m]{a}, \quad x = -\sqrt[m]{a'},$$

et ces quatre valeurs seraient réelles si les quantités a et a' étaient positives.

Toutes les valeurs de x seront comprises dans une seule formule, en indiquant immédiatement la racine des deux membres de l'équation

$$x^m = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2},$$

ce qui donnera

$$x = \sqrt[m]{-\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2}}.$$

La question suivante conduit à une équation de ce genre.

161. *Décomposer le nombre* 6 *en deux facteurs, tels que la somme de leurs cubes soit* 35.

Soit x l'un de ces facteurs, l'autre sera $\frac{6}{x}$, et on aura, par la somme de leurs cubes, x^3 et $\frac{216}{x^3}$, l'équation

$$x^3 + \frac{216}{x^3} = 35,$$

qui revient à

$$x^6 + 216 = 35x^3,$$

ou à

$$x^6 - 35x^3 = -216.$$

Si l'on regarde x^3 comme l'inconnue, on obtiendra, par la règle des équations du second degré,

$$x^3 = \tfrac{35}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{35}{2})^2 - 216}.$$

En effectuant les calculs numériques indiqués, on trouvera

$$(\tfrac{35}{2})^2 = \tfrac{1225}{4},$$

$$\sqrt{(\tfrac{35}{2})^2 - 216} = \pm\sqrt{\tfrac{361}{4}} = \pm\tfrac{19}{2},$$

et par conséquent

$$x^3 = \tfrac{35}{2} + \tfrac{19}{2} = \tfrac{54}{2} = 27,$$

$$x^3 = \tfrac{35}{2} - \tfrac{19}{2} = \tfrac{16}{2} = 8,$$

d'où

$$x = \sqrt[3]{27} = 3,$$

$$x = \sqrt[3]{8} = 2.$$

La première valeur donne pour le second facteur $\frac{6}{3}$ ou 2, tandis que la deuxième valeur conduit à $\frac{6}{2}$ ou 3; on a donc dans un cas 3 et 2 pour les facteurs cherchés, et dans l'autre 2 et 3. Ces deux solutions ne diffèrent ainsi que par un changement d'ordre dans les facteurs du nombre donné 6.

162. Les équations que je viens de considérer, sont également comprises dans la loi générale énoncée n° 159; car il faut multiplier les valeurs de $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{a'}$, par les racines de l'unité, dans le degré m.

En appliquant cette considération à l'équation

$$x^6 - 35x^3 = -216,$$

on lui trouvera les six racines suivantes :

$$x = 1 \times 3, \qquad x = 1 \times 2,$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \times 3, \qquad x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \times 2,$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \times 3, \qquad x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \times 2,$$

dont les deux premières sont les seules réelles.

Du calcul des radicaux.

163. Le grand nombre de cas dans lesquels on ne peut extraire exactement les racines, et la longueur de l'opération nécessaire pour les obtenir par approximation, a conduit les algébristes à tâcher d'effectuer immédiatement sur les quantités soumises aux signes radicaux, les

opérations fondamentales indiquées sur leurs racines, et d'en simplifier autant qu'il était possible les résultats, de manière à renvoyer à la fin du calcul l'opération la plus compliquée, c'est-à-dire, l'extraction, pour n'avoir à la pratiquer que sur les plus petits nombres ou les expressions les plus simples que puissent comporter les questions proposées.

L'addition et la soustraction des quantités radicales dissemblables ne peuvent que s'indiquer par les signes + et —. Par exemple, les sommes

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[5]{a}, \qquad \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b},$$

les différences

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[5]{a}, \qquad \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b},$$

ne sont pas susceptibles d'une autre expression.

Il n'en serait pas de même de la quantité

$$4a\sqrt[3]{2b}+\sqrt[3]{16a^3b}-\frac{5c}{ad}\sqrt[3]{2a^6b},$$

parce que les radicaux qui la composent peuvent devenir semblables, au moyen de la simplification indiquée dans le n° 130. On observerait d'abord que

$$\sqrt[3]{16a^3b}=\sqrt[3]{8a^3.2b} \quad \text{ou} \quad 2a\sqrt[3]{2b},$$

$$\sqrt[3]{2a^6b}=\sqrt[3]{a^6.2b} \quad \text{ou} \quad a^2\sqrt[3]{2b};$$

il viendrait

$$4a\sqrt[3]{2b}+2a\sqrt[3]{2b}-\frac{5a^2c}{ad}\sqrt[3]{2b},$$

et en réduisant, on obtiendrait

$$6a\sqrt[3]{2b}-\frac{5ac}{d}\sqrt[3]{2b} \quad \text{ou} \quad (6d-5c)\frac{a}{d}\sqrt[3]{2b}.$$

164. A l'égard des autres opérations, le calcul des radicaux repose sur ce principe déjà cité : *Si l'on élève les différens facteurs d'un produit à une même puissance, le produit sera élevé à cette puissance.* D'un autre côté, il est visible qu'on élève une quantité radicale à la puissance du même exposant que ce radical, en le supprimant. Par exemple, $\sqrt[7]{a}$ élevée à la septième puissance, est a seulement, puisque cette opération, inverse de celle qu'indique le signe $\sqrt[7]{\ }$, ne fait que ramener à son premier état la quantité a.

Cela posé, si, par exemple, dans l'expression

$$\sqrt[7]{a} \times \sqrt[7]{b},$$

on supprime les radicaux, le résultat ab sera la septième puissance du produit indiqué plus haut; et prenant la racine septième, on en conclura

$$\sqrt[7]{a} \times \sqrt[7]{b} = \sqrt[7]{ab}.$$

Ce raisonnement, qu'on peut appliquer à tout autre cas, montre que, *pour multiplier deux expressions radicales du même degré, il faut faire le produit des quantités soumises aux radicaux, et l'affecter d'un radical du même degré.*

Au moyen de cette règle, on a

$$3\sqrt{2ab^3} \times 7\sqrt{5a^3bc} = 21\sqrt{10a^4b^4c} =$$

$$21a^2b^2\sqrt{10c};$$

$$4\sqrt{a^2-b^2} \times \sqrt{a^2+b^2} = 4\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} =$$

$$4\sqrt{a^4-b^4};$$

$$\sqrt{\frac{2a^9-a^3b^6}{a^4-b^4}}\times\sqrt{\frac{a^2b^3c^2+b^5c^2}{d^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2a^9-a^3b^6}{a^4-b^4}\times\frac{a^2b^3c^2+b^5c^2}{d^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^3(2a^6-b^6)}{a^4-b^4}\times\frac{b^3c^2}{d^2}(a^2+b^2)}$$

$$=\sqrt{\frac{a^3b^3c^2}{d^2}\times\frac{2a^6-b^6}{a^2-b^2}},$$

a cause que

$$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2).$$

165. Si l'on considère que la septième puissance de l'expression $\frac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{b}}$, par exemple, est $\frac{a}{b}$, on conclura, en prenant la racine septième de ce dernier résultat, que

$$\frac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{b}}=\sqrt[7]{\frac{a}{b}},$$

d'où il suit que, *pour diviser l'une par l'autre deux quantités radicales du même degré, il faut prendre le quotient des quantités soumises aux radicaux, et l'affecter d'un radical du même degré.*

On trouve par cette règle, que

$$\frac{\sqrt{6ab}}{\sqrt{3a}}=\sqrt{\frac{6ab}{3a}}=\sqrt{2b};$$

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a+b}}=\sqrt{a-b};$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^4b}}{\sqrt[5]{b^3c^2}}=\sqrt[5]{\frac{a^4b}{b^3c^2}}=\sqrt[5]{\frac{a^4}{b^2c^2}}$$

166. Il suit de la règle de la multiplication des radicaux du même degré, donnée dans le n° 164, que, *pour élever une quantité radicale à une puissance quelconque, il suffit d'élever à cette puissance la quantité soumise au radical, et d'affecter de ce même radical le résultat ;*

car, par exemple, élever $\sqrt[5]{ab}$ à la troisième puissance, c'est effectuer le produit

$$\sqrt[5]{ab} \times \sqrt[5]{ab} \times \sqrt[5]{ab} ;$$

et comme les radicaux sont du même degré, il faut (164) multiplier entre elles les quantités qu'ils affectent, puis poser le radical sur le produit, ce qui donne

$$\sqrt[5]{a^3 b^3}.$$

De même, $\sqrt[7]{a^2 b^3}$ élevé à la puissance quatrième, donne $\sqrt[7]{a^8 b^{12}}$, qui se réduit à

$$ab\sqrt[7]{a b^5},$$

en décomposant $a^8 b^{12}$ en $a^7 b^7 \times ab^5$, et prenant la racine du facteur $a^7 b^7$ (130).

Il est à propos de remarquer aussi que *lorsque l'exposant du radical est divisible par celui de la puissance à laquelle on élève la quantité proposée, l'opération s'effectue en divisant le premier exposant par le second.* Par exemple,

$$\left(\sqrt[6]{a}\right)^2 = \sqrt[3]{a},$$

parce que $\frac{6}{2} = 3$.

En effet, $\sqrt[6]{a}$ désigne une quantité qui est six fois facteur dans a, et la quantité $\sqrt[3]{a}$, qu'on obtient en divisant l'exposant 6 par 2, n'étant plus que trois fois facteur

dans a, équivaut par conséquent au produit de deux des premiers facteurs; elle est donc la seconde puissance de l'un de ces facteurs, ou de $\sqrt[5]{a}$.

Le même raisonnement s'appliquerait à l'exemple ci-dessous, et à tout autre :

$$\left(\sqrt[12]{a^5 b}\right)^3 = \sqrt[4]{a^5 b}.$$

167. En renversant les règles de l'article précédent, on obtient celles qu'il faut suivre dans l'extraction des racines des quantités radicales.

On voit d'abord, par la première, que, *si les exposans des quantités soumises au radical sont divisibles par celui de la racine qu'on veut extraire, l'opération s'effectuera comme s'il n'y avait point de radical, et l'on affectera du radical primitif le résultat.*

On trouve, par exemple, que

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^6}} = \sqrt[5]{a^2},$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^4 b^8}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4 b^8}} = \sqrt[3]{ab^2}.$$

De la seconde règle du numéro précédent, on conclut que l'*extraction de la racine des quantités radicales s'indique en général, en multipliant l'exposant du radical par celui de la racine qu'on veut extraire.*

Par cette dernière règle, on trouve que

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}.$$

En effet, $\sqrt[5]{a^4}$ est une quantité qui est cinq fois facteur dans a^4 (24, 129); mais la racine cubique de $\sqrt[5]{a^4}$, devant être aussi trois fois facteur dans cette dernière

quantité, se trouvera 5×3 fois ou 15 fois facteur dans la première a^4 : donc $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$. On prouverait de même que $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$.

168. Puisqu'en multipliant par un nombre, l'exposant d'une quantité soumise à un radical, on élève à la puissance marquée par ce nombre, la racine indiquée (166), et qu'en multipliant aussi par le même nombre, l'exposant du radical, on tire du résultat une racine du degré égal à celui de la puissance qu'on a formée (167), il s'ensuit que cette seconde opération ramène à son premier état la quantité proposée.

L'expression $\sqrt[5]{a^3}$, par exemple, peut se changer en $\sqrt[35]{a^{21}}$, qui s'obtient en multipliant par 7 les exposans 5 et 3; car multiplier par 7 l'exposant de a^3, c'est former, par le radical $\sqrt[5]{a^{21}}$, la septième puissance du radical proposé, et multiplier par 7 l'exposant 5 du radical $\sqrt[5]{a^{21}}$, c'est prendre la racine septième du résultat, opération qui détruit l'effet de la première.

169. Par cette double opération, *on ramène au même degré un nombre quelconque de radicaux de degrés différens, en multipliant à la fois l'exposant de chaque radical et ceux des quantités qu'il affecte, par le produit des exposans de tous les autres radicaux.* L'identité des nouveaux exposans des radicaux est évidente par elle-même, puisqu'ils sont formés du produit de tous les exposans des radicaux primitifs; et d'après ce qui précède, chaque quantité radicale n'a pas changé de valeur.

On transforme par cette règle,

$$\sqrt{a^3b^2} \text{ et } \sqrt[7]{c^4d^3},$$

en $\sqrt[35]{a^{21}b^{14}}$ et $\sqrt[35]{c^{20}d^{15}}$;

de même les trois quantités

$$\sqrt[3]{ab^2}, \quad \sqrt[5]{a^2c^3}, \quad \sqrt{b^4c^3},$$

deviennent respectivement

$$\sqrt[105]{a^{35}b^{70}}, \quad \sqrt[105]{a^{42}c^{63}}, \quad \sqrt[105]{b^{60}c^{45}}.$$

S'il y avait des nombres sous les radicaux, il faudrait les élever à la puissance marquée par le produit des exposans des autres radicaux.

170. De même, on peut *passer sous un radical un facteur qui en est dehors, en l'élevant à la puissance marquée par l'exposant du radical.*

On changera, par exemple,

$$a^2 \text{ en } \sqrt[5]{a^{10}}, \text{ et } 2a\sqrt[3]{b} \text{ en } \sqrt[3]{8a^3b}.$$

171. Après avoir réduit au même degré, par la transformation précédente, des radicaux quelconques, on leur appliquera sans difficulté les règles données dans les n°s 164 et 165, pour la multiplication et la division des quantités radicales du même degré.

Soit en général

$$\sqrt[m]{a^pb^q} \times \sqrt[n]{b^rc^s};$$

je change (169)

$$\sqrt{a^pb^q}, \quad \sqrt{b^rc^s},$$

en $\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq}}$, $\sqrt[mn]{b^{mr}c^{ms}}$,

et la règle du n° 164 donne

$$\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq}} \times \sqrt[mn]{b^{mr}c^{ms}} = \sqrt[mn]{a^{np}b^{nq+mr}c^{ms}},$$

pour le produit des radicaux proposés.

On a aussi, par le n° 165

$$\frac{\sqrt[m]{a^p b^q}}{\sqrt[n]{b^r c^t}} = \frac{\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq}}}{\sqrt[mn]{b^{mr}c^{ms}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np}b^{nq}}{b^{mr}c^{ms}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np}\,b^{nq-mr}}{c^{ms}}}.$$

Remarques sur quelques cas singuliers du calcul des radicaux.

172. Les règles auxquelles on vient de ramener le calcul des radicaux, s'appliquent sans difficulté aux quantités réelles; mais elles induiraient en erreur par rapport aux quantités imaginaires, si on ne les accompagnait pas de quelques remarques qui tiennent aux propriétés des équations à deux termes.

Par exemple, la règle du n° 164 donne immédiatement

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{-a \times -a} = \sqrt{a^2};$$

et si on se contentait de prendre $+a$ pour $\sqrt{a^2}$, le résultat serait visiblement fautif, car le produit $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, étant le quarré de $\sqrt{-a}$, doit s'obtenir en supprimant le radical, et est par conséquent égal à $-a$.

Bézout a très bien expliqué cette difficulté, en observant que quand on ignore de quelle manière a été formé le quarré a^2, et qu'on en demande la racine, on doit assigner également $+a$ et $-a$; mais que quand on sait d'avance laquelle de ces deux quantités a été multipliée par elle-même pour former a^2, il n'est plus permis,

lorsqu'on revient sur ses pas, d'en prendre une autre. Ce cas est évidemment celui de l'expression $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$: on sait alors que la quantité a^2, comprise sous le radical $\sqrt{a^2}$, vient de $-a$ multiplié par $-a$; l'ambiguité cesse donc; et quand on revient à la racine, il faut mettre $-a$.

Le même embarras aurait lieu aussi pour le produit $\sqrt{a}\times\sqrt{a}$, si l'on n'était pas conduit, parce qu'il n'y a aucun signe — dans l'expression, à prendre immédiatement la valeur positive de $\sqrt{a^2}$. Il faudrait faire attention que, dans ce cas, a^2 venant de $+a$ multiplié par $+a$, sa racine doit être nécessairement $+a$.

Ces raisonnemens ne laissent aucun nuage sur le cas particulier qu'on vient de considérer; mais il y en a d'autres qui ne peuvent s'expliquer clairement que par les propriétés des équations à deux termes.

173. Si par exemple on demandait le produit $\sqrt[4]{a}\sqrt{-1}$, en réduisant le second radical au même degré que le premier (169), on aurait

$$\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{(-1)^2}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{+1}=\sqrt[4]{a};$$

résultat réel, quoiqu'il soit bien évident que la quantité réelle $\sqrt[4]{a}$, multipliée par la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$, doive donner un produit imaginaire. Il ne faut pas croire cependant que le résultat $\sqrt[4]{a}$ soit tout-à-fait faux, mais seulement qu'on le prend alors dans un sens trop particulier.

En effet, $\sqrt[4]{a}$, considérée algébriquement, étant l'expression de l'inconnue x, dans l'équation à deux termes

$$x^4-a=0,$$

est susceptible de quatre déterminations différentes (159);

car si l'on fait $a = \alpha^4$, en représentant par α la valeur numérique de $\sqrt[4]{a}$, abstraction faite de son signe, ou la détermination arithmétique de cette quantité, on aura les quatre valeurs

$$\alpha \times +1, \quad \alpha \times -1, \quad \alpha \times +\sqrt{-1}, \quad \alpha \times -\sqrt{-1},$$

dont la troisième est précisément le produit proposé.

Avec un peu d'attention, on reconnaît aisément la cause de l'ambiguité qu'on vient de remarquer. En élevant au quarré la quantité -1, pour changer le radical du second degré en un du quatrième, on arrive à $+1$, qui peut venir aussi bien de $+1 \times +1$, que de -1×-1, ce qui introduit dans la quantité $\sqrt{1}$ les deux nouvelles déterminations $+1$ et -1, qui ne se trouvaient pas dans $\sqrt{-1}$.

La même chose a lieu, en général, par suite des multiplications qu'on opère sous les radicaux (171); et le produit $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b}$ dépend d'une équation du degré mn, ce qu'on peut voir aussi en considérant que $\sqrt[m]{a}$ et $\sqrt[n]{b}$ désignent les valeurs de x et de y dans les équations $x^m = a$, $y^n = b$ (159).

Si l'on élève alors les deux membres de la première à la puissance n, ceux de la seconde à la puissance m, on aura

$$x^{mn} = a^n, \quad y^{mn} = b^m,$$

et multipliant, membre à membre, ces nouvelles équations, il en résultera

$$x^{mn} y^{mn} = (xy)^{mn} = a^n b^m, \quad \text{d'où} \quad xy = \sqrt[mn]{a^n b^m}.$$

On conçoit d'ailleurs aisément que le produit xy doit avoir mn déterminations, puisque pour le former, on peut combiner successivement chacune des m déter-

minations de x avec chacune des n déterminations de y, ce qui donne mn résultats.

Quand il s'agit de quantités réelles, le choix n'est pas embarrassant, parce que le nombre de déterminations de cette espèce ne surpasse jamais deux (157), qui ne diffèrent que par le signe.

174. En faisant usage de la transformation du n° 159, on fait tomber toute la difficulté sur les racines de $+1$, ou de -1; car si on pose $x=\alpha t$ et $y=\beta u$, α et β désignant les déterminations numériques de $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, sans égard au signe, les équations

$$x^m \mp a = 0, \quad y^n \mp b = 0,$$

deviennent

$$t^m \mp 1 = 0, \quad u^n \mp 1 = 0,$$

et on en tire l'expression

$$xy = \sqrt[m]{\pm a} \times \sqrt[n]{\pm b} = \alpha\beta tu = \alpha\beta \sqrt[m]{\pm 1} \times \sqrt[n]{\pm 1};$$

dans laquelle $\alpha\beta$ représente le produit des nombres $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, ou la détermination arithmétique de la racine du degré mn du nombre $a^n b^m$.

Quand on voudra particulariser le produit des radicaux $\sqrt[m]{\pm a}$, $\sqrt[n]{\pm b}$, par une détermination spéciale de ces radicaux, il faudra trouver, d'après les équations

$$t^m \mp 1 = 0, \quad u^n \mp 1 = 0,$$

les diverses expressions de $\sqrt[m]{\pm 1}$, $\sqrt[n]{\pm 1}$, et les combiner convenablement (*).

(*) Quand l'exposant m est impair, $\sqrt[m]{-1} = -\sqrt[m]{+1}$; mais quand il est pair, cela n'a plus lieu. Lorsque $m=4$, par exemple, on trouve que

$$y^4 + 1 = (y^2 + y\sqrt{2} + 1)(y^2 - y\sqrt{2} + 1).$$

Au reste, ces opérations ne se présentent guère que pour quelques cas fort simples, dont voici les principaux :

1°. $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\,(\sqrt{-1}\times\sqrt{-1})$;

je supprime le radical de $\sqrt{-1}$, et j'obtiens

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{ab}\times-1=-\sqrt{ab}:$$

2°. $\sqrt[4]{-a}\times\sqrt[4]{-b}=\sqrt[4]{ab}\,(\sqrt[4]{-1})^2$;

je ne multiplie point ici -1 par -1, parce que je tomberais sur l'ambiguité remarquée dans le n° 173; mais j'observe que le quarré de la racine quatrième n'est autre chose que la racine quarrée, et il vient alors

$$\sqrt[4]{-a}\times\sqrt[4]{-b}=\sqrt[4]{ab}\times\sqrt{-1}:$$

3°. $\sqrt[6]{-a}\times\sqrt[6]{-b}=\sqrt[6]{ab}\times(\sqrt[6]{-1})^3=\sqrt[6]{ab}\times\sqrt{-1}$

$$=\sqrt[6]{ab}\times-1=-\sqrt[6]{ab}.$$

On trouverait ainsi des résultats alternativement réels et imaginaires.

Du calcul des exposans fractionnaires.

175. Lorsqu'on remplace les radicaux par les exposans fractionnaires qui leur correspondent (132), l'application immédiate des règles des exposans, fournit les mêmes résultats que les procédés usités dans le calcul des radicaux.

En effet, si l'on transforme, par exemple,

$$\sqrt{a^3b^2},\quad \sqrt{a^3c^2},$$

et en égalant à zéro chacun de ces facteurs, on obtient les 4 expressions de $\sqrt{-1}$. (Voyez le *Complément*.)

en $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}$,

on aura

$$\sqrt{a^3b^2}\times\sqrt{a^3c^2}=a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{3}{3}}c^{\frac{2}{3}}=$$

$$a^{\frac{3}{3}+\frac{3}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{6}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}};$$

puis en observant que $\frac{6}{3}=1+\frac{1}{3}$, que par conséquent

$$a^{\frac{6}{3}}=a^{1+\frac{1}{3}}=a\times a^{\frac{1}{3}}\ (25),$$

et que $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}$ équivaut à $\sqrt[3]{ab^2c^2}$, il viendra

$$\sqrt{a^3b^2}\times\sqrt{a^3c^2}=a\sqrt[3]{ab^2c^2},$$

résultat non-seulement exact, mais encore réduit à sa plus simple expression.

Soit l'exemple général $\sqrt[m]{a^pb^q}\times\sqrt[n]{b^rc^s}$; les radicaux proposés se transformeront en

$$a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}},\quad b^{\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}},$$

et il viendra, suivant les règles des exposans (25),

$$a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}}\times b^{\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}}=a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}+\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}}.$$

Si maintenant on veut effectuer l'addition des fractions $\frac{q}{m}$, $\frac{r}{n}$, il faut les réduire au même dénominateur; et afin de donner de l'uniformité aux résultats, il faut en faire autant sur les fractions $\frac{p}{m}$, $\frac{s}{n}$: on obtient par ce moyen

$$a^{\frac{np}{mn}}\ b^{\frac{nq+mr}{mn}}\ c^{\frac{ms}{mn}};$$

et passant aux radicaux, on a, comme dans le n° 171,

$$\sqrt[m]{a^pb^q}\times\sqrt[n]{b^rc^s}=\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq+mr}c^{ms}}.$$

176. La division s'effectue aussi simplement : on a par exemple,

$$\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a^4c}} = \frac{a^{\frac{3}{5}}\,b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}}\,c^{\frac{1}{5}}} = \frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}}\,c^{\frac{1}{5}}} \quad (38),$$

ce qui se réduit à

$$\frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{1}{5}}\,c^{\frac{1}{5}}}$$

et en passant aux radicaux, il vient

$$\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a^4c}} = \sqrt[5]{\frac{b^2}{ac}}.$$

On a en général,

$$\frac{\sqrt[m]{a^pb^q}}{\sqrt[n]{b^rc^s}} = \frac{a^{\frac{p}{m}}\,b^{\frac{q}{m}}}{b^{\frac{r}{n}}\,c^{\frac{s}{n}}} = \frac{a^{\frac{p}{m}}\,b^{\frac{q}{m}-\frac{r}{n}}}{c^{\frac{s}{n}}};$$

et en réduisant au même dénominateur les exposans fractionnaires, pour effectuer la soustraction indiquée, on trouve

$$\frac{\sqrt[m]{a^pb^q}}{\sqrt[n]{b^rc^s}} = \frac{a^{\frac{np}{mn}}\,b^{\frac{nq-mr}{mn}}}{c^{\frac{ms}{mn}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np}\,b^{nq-mr}}{c^{ms}}}.$$

Il est aisé de voir que la réduction des exposans fractionnaires au même dénominateur, remplace ici la réduction des radicaux au même degré, et conduit précisément aux mêmes résultats (171).

177. Il est tout aussi évident, par la règle du n° 127,

que

$$\left(\sqrt[m]{a^p}\right)^n = \left(a^{\frac{p}{m}}\right)^n = a^{\frac{pn}{m}} = \sqrt[m]{a^{pn}},$$

et par celle du n° 129, que

$$\sqrt{\sqrt[m]{a^p}} = \sqrt{a^{\frac{p}{m}}} = a^{\frac{p}{2m}} = \sqrt[2m]{a^p}.$$

Le calcul des exposans fractionnaires est un des exemples les plus remarquables de l'utilité des signes, lorsqu'ils sont bien choisis. L'analogie qui règne entre les exposans fractionnaires et ceux qui sont entiers, rend les règles qu'il faut suivre dans le calcul de ceux-ci, applicables à celui des autres, tandis qu'il a fallu des raisonnemens particuliers pour découvrir les règles du calcul des radicaux, parce que le signe $\sqrt{\ }$, qui les exprime, n'a aucune liaison avec l'opération qui les engendre. Plus on avance dans l'Algèbre, et plus on reconnaît les nombreux avantages qu'a produits dans cette science la notation des exposans, imaginée par Descartes.

Théorie générale des Équations.

178. Les équations du premier et du second degré sont, à proprement parler, les seules dont on ait une solution complète; mais on a découvert, aux équations de degré quelconque, des propriétés générales qui conduisent à les résoudre lorsqu'elles sont numériques, et qui offrent de nombreuses conséquences pour les parties plus élevées de l'Algèbre. Ces propriétés tiennent à une forme particulière sous laquelle toute équation peut se mettre.

En la supposant aussi générale qu'elle peut l'être, pour un degré quelconque, une équation doit renfermer toutes les puissances de l'inconnue, depuis celle de ce degré, jusqu'à la première inclusivement, multipliées

chacune par des quantités connues, et en outre un terme tout connu.

L'équation générale du cinquième degré, par exemple, contiendra toutes les puissances de l'inconnue, depuis la cinquième jusqu'à la première inclusivement; et s'il y a plusieurs termes affectés de la même puissance de l'inconnue, il faudra les concevoir réunis en un seul, comme on l'a fait pour les équations du second degré dans le n° 108. Ensuite on passera, ainsi qu'on l'a fait dans ce numéro, tous les termes de l'équation dans un seul membre; l'autre sera nécessairement égal à zéro, et on rendra le premier terme positif en changeant, s'il le faut, tous les signes de l'équation.

On aura par ce moyen une expression semblable à la suivante,

$$nx^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0,$$

dans laquelle il faut bien observer que les lettres p, q, r, s, t, peuvent représenter des nombres négatifs aussi bien que des nombres positifs; puis divisant tout par n, afin de ne laisser au premier terme que l'unité pour coefficient, et faisant

$$\frac{p}{n} = P, \quad \frac{q}{n} = Q, \quad \frac{r}{n} = R, \quad \frac{s}{n} = S, \quad \frac{t}{n} = T,$$

il viendra

$$x^5 + Px^4 + Qx^3 + Rx^2 + Sx + T = 0.$$

Dorénavant je supposerai qu'on ait toujours préparé les équations ainsi que je viens de le faire, et je représenterai l'équation générale d'un degré quelconque par

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots\ldots + Tx + U = 0.$$

L'intervalle indiqué par les points se remplit lorsqu'on donne à l'exposant n une valeur particulière.

Toute quantité ou toute expression, soit réelle, soit

imaginaire, qui, mise à la place de l'inconnue x dans une équation préparée comme ci-dessus, en rend le premier membre égal à zéro, et par conséquent satisfait à la question, se nomme la *racine de l'équation proposée*; mais comme il ne s'agit pas ici de puissances, cette acception est plus générale que celle que j'ai donnée jusqu'à présent au mot *racine* (90, 129).

179. Voici une proposition analogue à celles des numéros 116 et 159, et que l'on doit regarder comme fondamentale.

La racine d'une équation quelconque

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots\ldots + Tx + U = 0,$$

étant représentée par a, *le premier membre de cette équation se divise exactement par le binome* $x - a$.

En effet, puisque q est une valeur de x, on a nécessairement

$$a^n + Pa^{n-1} + Qa^{n-2} \ldots\ldots + Ta + U = 0,$$

et par conséquent

$$U = -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \ldots\ldots - Ta;$$

en sorte que l'équation proposée est identiquement la même que

$$\left.\begin{array}{l} x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots\ldots + Tx \\ -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \ldots\ldots - Ta \end{array}\right\} = 0,$$

et revient à

$$\left.\begin{array}{l} x^n - a^n + P(x^{n-1} - a^{n-1}) + Q(x^{n-2} - a^{n-2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + T(x - a) \end{array}\right\} = 0.$$

Les quantités

$$x^n - a^n,\ x^{n-1} - a^{n-1},\ x^{n-2} - a^{n-2}, \ldots\ldots x - a,$$

étant toutes divisibles par $x - a$ (158), il est évident que le premier membre de l'équation proposée aura tous ses termes divisibles par cette quantité, et sera par con-

séquent divisible par $x-a$, comme le porte l'énoncé de la proposition (*).

180. Pour former le quotient, il n'y a qu'à substituer au lieu des quantités

$$x^n-a^n,\ x^{n-1}-a^{n-1},\ x^{n-2}-a^{n-2},\ \ldots\ldots\ x-a,$$

les quotiens qu'elles donnent, lorsqu'on les divise par $x-a$, et qui sont respectivement

$$\begin{aligned} &x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}\ldots\ldots+a^{n-1},\\ &\qquad x^{n-2}+ax^{n-3}\ldots\ldots+a^{n-2},\\ &\qquad\qquad x^{n-3}\ldots\ldots+a^{n-3},\\ &\qquad\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad +1. \end{aligned}$$

En ordonnant le résultat par rapport aux puissances de x, on trouvera

$$\begin{aligned} &x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}\ldots\ldots+a^{n-1}\\ &+Px^{n-2}+Pax^{n-3}\ldots\ldots+Pa^{n-2}\\ &\qquad+Qx^{n-3}\ldots\ldots+Qa^{n-3}\\ &\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad+T. \end{aligned}$$

(*) D'Alembert prouve la même proposition, ainsi qu'il suit.

Si l'on conçoit que le premier membre de l'équation proposée soit divisé par $x-a$, et que l'opération ait été poussée jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les termes affectés de x, le reste, s'il y en a un, ne pourra contenir x. En le représentant par R, et nommant Q le quotient quelconque auquel on sera parvenu, on aura nécessairement

$$x^n+Px^{n-1}\ldots\ldots+\text{etc.}=Q(x-a)+R.$$

Or, lorsqu'à la place de x on substitue a, le premier membre s'anéantit, puisque a est la valeur de x; le terme $Q(x-a)$ s'anéantit aussi, à cause du facteur $x-a$ qui devient zéro : on doit donc avoir $R=0$; et cela, indépendamment de la substitution; car ce reste ne contenant pas x, la substitution ne peut s'y effectuer, et il conserve après, la valeur qu'il avait auparavant.

Il suit de là que, dans tous les cas, $R=0$, et que par conséquent

$$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+\text{etc.},$$

est divisible exactement par $x-a$.

181. Il est visible, d'après les seules règles de la division, que le premier membre de l'équation

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \text{etc.} = 0,$$

étant divisé par $x - a$, donnera un quotient de la forme

$$x^{n-1} + P'x^{n-2} + Q'x^{n-3} + \text{etc.},$$

P', Q', etc., désignant des quantités connues, différentes de P, Q, etc.; on aura donc

$$x^n + Px^{n-1} + \text{etc.} = (x-a)(x^{n-1} + P'x^{n-2} + \text{etc.}),$$

et suivant l'observation du numéro 116, l'équation proposée se vérifiera de deux manières, savoir, en faisant

$$x - a = 0 \quad \text{ou} \quad x^{n-1} + P'x^{n-2} + \text{etc.} = 0.$$

Si maintenant l'équation

$$x^{n-1} + P'x^{n-2} + \text{etc.} = 0$$

a une racine b, son premier membre sera divisible par $x - b$; on aura encore

$$x^{n-1} + P'x^{n-2} + \text{etc.} = (x-b)(x^{n-2} + P''x^{n-3} + \text{etc.}),$$

et par conséquent

$$x^n + Px^{n-1} + \text{etc.} = (x-a)(x-b)(x^{n-2} + P''x^{n-3} + \text{etc.});$$

l'équation proposée pourra donc se vérifier de trois manières, savoir, en faisant

$$x - a = 0, \text{ ou } x - b = 0, \text{ ou } x^{n-2} + P''x^{n-3} + \text{etc.} = 0.$$

Si la dernière de ces équations a une racine c, son premier membre se décomposera encore en deux facteurs,

$$x - c, \quad x^{n-3} + P'''x^{n-4} + \text{etc.},$$

et l'on aura

$$x^n + Px^{n-1} + \text{etc.} = (x-a)(x-b)(x-c)(x^{n-3} + P'''x^{n-4} + \text{etc.});$$

d'où l'on voit que l'équation proposée pourra se vérifier de quatre manières, savoir, en faisant alternativement

$$x - a = 0, \; x - b = 0, \; x - c = 0, \; x^{n-3} + P'''x^{n-4} + \text{etc.} = 0.$$

En continuant de raisonner ainsi, on obtiendra suc-

cessivement des facteurs des degrés

$$n-4,\quad n-5,\quad n-6,\text{ etc.};$$

et si chacun de ces facteurs, égalé à zéro, est susceptible d'une racine, le premier membre de l'équation proposée sera ramené à la forme

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-l),$$

c'est-à-dire décomposé en autant de facteurs du premier degré qu'il y a d'unités dans l'exposant n de son degré. L'équation

$$x^n + Px^{n-1} + \text{etc.} = 0,$$

pourra donc se vérifier de n manières, savoir, en faisant

$x-a=0$, ou $x-b=0$, ou $x-c=0$, ou $x-d=0$,
..... ou enfin $x-l=0$.

Il faut bien remarquer que ces équations ne doivent être regardées comme vraies qu'alternativement, et qu'on tomberait dans des contradictions manifestes, si l'on supposait qu'elles aient lieu en même temps. En effet, de $x-a=0$, on tire $x=a$; tandis que $x-b=0$ conduit à $x=b$, conséquences qui ne peuvent s'accorder lorsque a et b sont des quantités inégales.

182. Le premier membre de l'équation proposée,

$$x^n + Px^{n-1} + \text{etc.} = 0,$$

étant décomposé en n facteurs du premier degré,

$$x-a,\quad x-b,\quad x-c,\quad x-d,\ldots\ldots x-l,$$

ne saurait être divisible par aucune autre expression de ce degré. En effet, si la division, par un binome $x-\alpha$, différent des premiers, était possible, on aurait

$$x^n + Px^{n-1} + \text{etc.} = (x-\alpha)(x^{n-1} + px^{n-2} + \text{etc.})$$

et par conséquent

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots\ldots(x-l) = (x-\alpha)(x^{n-1} + px^{n-2} + \text{etc.});$$

or, en changeant x en α, il vient

$$(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)(\alpha-d)\ldots\ldots(\alpha-l) = (\alpha-\alpha)(\alpha^{n-1} + p\alpha^{n-2} + \text{etc.});$$

le second membre s'évanouit à cause du facteur nul $a-a$; mais il n'en est pas de même du premier, qui est le produit de facteurs tous différens de zéro, tant que a diffère de chacune des racines a, b, c, d, ... l: la supposition n'est donc pas vraie; donc *une équation d'un degré quelconque ne peut admettre plus de diviseurs binomes du premier degré, qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de son degré, et ne peut avoir par conséquent un plus grand nombre de racines* (*).

183. En regardant une équation comme le produit d'un nombre de facteurs

$$x-a,\ x-b,\ x-c,\ x-d,\ \text{etc.},$$

égal à l'exposant de son degré, elle prendra la forme du produit indiqué dans le n° 135, avec cette modification, que les termes seront alternativement positifs et négatifs.

Si l'on se borne à quatre facteurs, par exemple, on aura

$$\begin{aligned} x^4 &- ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0. \\ &- bx^3 + acx^2 - abdx \\ &- cx^3 + adx^2 - acdx \\ &- dx^3 + bcx^2 - bcdx \\ &+ bdx^2 \\ &+ cdx^2 \end{aligned}$$

(*) Cette démonstration beaucoup plus simple que celle que j'avais donnée dans les éditions précédentes, est tirée des *Annales de Mathématiques* publiées par M. Gergonne. (*Voyez* le T. IV, page 209—210, note.)

Il est à propos de remarquer que c'est parce que le binome $x-a$ est *premier* avec les facteurs $x-a$, $x-b$, etc., qu'il ne peut diviser leur produit; proposition qui s'étend à tous les polynomes de la forme $x^m + Px^{m-1} +$ etc. En substituant ces polynomes aux nombres, dans les raisonnemens du n° 97, on démontrera facilement que *tout polynome qui divise le produit de deux polynomes* A *et* B, *et qui est premier avec l'un de ces polynomes, divise nécessairement l'autre.*

Les seconds termes des binomes $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc. étant les racines de l'équation, prises avec un signe contraire, les propriétés remarquées dans le n° 135, et prouvées en général dans le n° 136, auront lieu de la manière suivante, pour le cas actuel :

Le coefficient du second terme, pris avec un signe contraire, sera la somme des racines ;

Le coefficient du troisième terme sera la somme des produits des racines multipliées deux à deux ;

Le coefficient du quatrième terme, pris avec un signe contraire, sera la somme des produits des racines multipliées trois à trois, et ainsi de suite, en observant de changer le signe des coefficiens des termes de rang pair ;

Le dernier terme, soumis comme les autres à cette loi, *sera le produit de toutes les racines.*

En égalant, par exemple, à zéro le produit des trois facteurs

$$x-5,\ x+4,\ x+3,$$

on formera l'équation

$$x^3+2x^2-23x-60=0,$$

dont les racines seront

$$+5,\ -4,\ -3;$$

on aura, pour leur somme,

$$5-4-3=-2;$$

pour celle de leurs produits 2 à 2,

$$+5\times-4+5\times-3-4\times-3=-20-15+12=-23,$$

et pour le produit des 3,

$$+5\times-4\times-3=60.$$

C'est aussi ce qu'on déduirait des coefficiens 2, -23, -60, en changeant le signe de ceux du second et du quatrième terme.

Si l'on égale à zéro le produit des facteurs

$$x-2,\ x-3 \text{ et } x+5,$$

l'équation résultante

$$x^3-19x+30=0,$$

n'ayant point de terme affecté de x^2, puissance immédiatement inférieure à celle du premier terme, *manque de second terme*, et cela parce que la somme des racines, qui, prises avec un signe contraire, forme le coefficient de ce terme, est ici

$$2+3-5,$$

ou zéro, ou en d'autres termes, parce que la somme des racines positives est égale à celle des négatives (*).

(*) On pourrait croire que pour découvrir les racines d'une équation quelconque du quatrième degré

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0,$$

il suffirait de la comparer avec le produit du numéro 183, en observant d'égaler les quantités qui multiplient dans l'un et dans l'autre, les mêmes puissances de x; et c'est par là que la plupart des auteurs élémentaires pensent démontrer qu'*une équation d'un degré quelconque est le produit d'autant de facteurs simples qu'il y a d'unités dans l'exposant de son degré*: on verra par ce qui suit que leur raisonnement est fautif. Je n'ai conclu cette proposition que conditionnellement dans le numéro 182, parce qu'il faudrait, pour l'affirmer positivement, montrer qu'une équation d'un degré quelconque a une racine, soit réelle, soit imaginaire, ce qui ne paraît pas facile à faire dans les élémens, et ce qui heureusement n'est pas nécessaire alors: on peut d'ailleurs voir dans le *Complément* les réflexions que j'ai rapportées à ce sujet.

En formant les équations

$$\begin{aligned} -a-b-c-d&=p,\\ ab+ac+ad+bc+bd+cd&=q,\\ -abc-abd-acd-bcd&=r,\\ abcd&=s, \end{aligned}$$

pour en tirer les valeurs des lettres a, b, c, d, qui seraient les racines de l'équation proposée, le calcul serait fort compliqué, si l'on voulait

184. Quand on considère une équation comme formée du produit de plusieurs facteurs simples, ou du

---

employer à la détermination des inconnues a, b, c, d, le procédé du numéro 78; mais si l'on multiplie la première des équations ci-dessus par a^3, la seconde par a^2, la troisième par a, et qu'on ajoute, membre à membre ces trois produits avec la quatrième, on aura

$$-a^4 = pa^3 + qa^2 + ra + s,$$

d'où l'on conclut, par une simple transposition,

$$a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s = 0.$$

Cette équation ne contient plus que a, mais elle est entièrement semblable à la proposée : la difficulté d'obtenir a est donc la même que celle d'obtenir x.

Ainsi, comme l'a dit Castillon (*Mém. de Berlin*, année 1789) : « On prouve bien dans toutes les Algèbres, que par le produit de plusieurs binomes simples on forme une équation de tel degré qu'on » veut, mais on n'a pas fait voir qu'une équation formée par la » multiplication de plusieurs binomes simples, peut avoir tels coefficiens qu'on veut. »

Si, au lieu de multiplier les trois premières équations en a, b, c, d, par a^3, a^2 et a, respectivement, on les multipliait par b^3, b^2 et b, ou par c^3, c^2, c, ou par d^3, d^2, d, et qu'on ajoutât encore les produits à la quatrième, on aurait, dans le premier cas,

$$-b^4 = pb^3 + qb^2 + rb + s,$$

dans le second,

$$-c^4 = pc^3 + qc^2 + rc + s,$$

dans le troisième,

$$-d^4 = pd^3 + qd^2 + rd + s;$$

d'où il suit qu'on est conduit à la même équation, soit pour avoir a, soit pour avoir b, etc. En effet, les quantités a, b, c, d, étant toutes disposées de la même manière dans chaque équation, il n'y a pas de raison pour que l'une soit déterminée par aucune opération différente de celles qui déterminent l'autre; et en général, si, dans la recherche de plusieurs quantités inconnues, on est obligé d'employer pour chacune les mêmes raisonnemens, les mêmes opérations et les mêmes quantités connues, toutes ces quantités seront nécessairement racines d'une même équation.

premier degré, on prouve (182) qu'elle n'en peut avoir qu'un nombre marqué par l'exposant n de son degré ; mais si l'on combine ces facteurs deux à deux, on formera des quantités du second degré, qui seront aussi facteurs de l'équation proposée, et dont le nombre sera exprimé par

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \quad (140).$$

Par exemple, le premier membre de l'équation

$$\begin{aligned} x^4 &- ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0 \\ &- bx^3 + acx^2 - abdx \\ &- cx^3 + adx^2 - acdx \\ &- dx^3 + bcx^2 - bcdx \\ &+ bdx^2 \\ &+ cdx^2 \end{aligned}$$

étant le produit de

$$(x-a) \times (x-b) \times (x-c) \times (x-d),$$

peut se décomposer en facteurs du second degré, des six manières suivantes :

$$\begin{aligned} &(x-a)\,(x-b) \times (x-c)\,(x-d) \\ &(x-a)\,(x-c) \times (x-b)\,(x-d) \\ &(x-a)\,(x-d) \times (x-b)\,(x-c) \\ &(x-b)\,(x-c) \times (x-a)\,(x-d) \\ &(x-b)\,(x-d) \times (x-a)\,(x-c) \\ &(x-c)\,(x-d) \times (x-a)\,(x-b) ; \end{aligned}$$

et il en résulte qu'une équation du quatrième degré peut avoir six diviseurs du second.

En combinant les facteurs simples trois à trois, on formera les diviseurs du troisième degré de la proposée ; pour une équation du degré n, le nombre en sera

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3},$$

et ainsi de suite.

De l'élimination entre les équations des degrés supérieurs au premier.

185. La règle du n° 78, ou le procédé du n° 84, suffit toujours pour éliminer entre deux équations, une inconnue qui n'y passe pas le premier degré, quel que soit d'ailleurs celui des autres inconnues; et lors même que l'inconnue ne serait au premier degré que dans l'une des équations proposées, la règle du n° 78 s'y appliquerait encore.

Si l'on a, par exemple, les équations

$$ax^2 + bxy + cy^2 = m^2,$$
$$x^2 + xy = n^2,$$

on prendra dans la seconde la valeur de y, qui sera

$$y = \frac{n^2 - x^2}{x};$$

en substituant cette valeur et son quarré, à la place de y et de y^2 dans la première équation, on obtiendra un résultat en x seulement.

186. Si les équations proposées étaient toutes deux du second degré, par rapport à l'une et à l'autre des inconnues, on ne pourrait appliquer la méthode précédente qu'en résolvant une des équations, soit par rapport à x, soit par rapport à y.

Soient, par exemple, les équations

$$ax^2 + bxy + cy^2 = m^2,$$
$$x^2 + y^2 = n^2;$$

la seconde donne

$$y = \pm\sqrt{n^2 - x^2};$$

substituant dans la première, cette valeur de y et son quarré, on obtiendra

$$ax^2 \pm bx\sqrt{n^2 - x^2} + c(n^2 - x^2) = m^2$$

L'objet proposé semble rempli, puisque ce résultat

ne contient plus l'inconnue y; mais on ne peut résoudre l'équation en x, sans la ramener à une forme rationnelle, en faisant disparaître le radical où l'inconnue se trouve engagée.

Il est facile de voir que si le radical était seul dans un membre, on le ferait disparaître en élevant ce membre au quarré; en réunissant donc, par la transposition des termes $\pm bx\sqrt{n^2-x^2}$ et m^2, tous les termes rationnels dans un seul membre, on aura

$$ax^2+c(n^2-x^2)-m^2=\mp bx\sqrt{n^2-x^2},$$

et prenant le quarré de chaque membre, on formera l'équation

$$\left.\begin{array}{l} a^2x^4+c^2(n^2-x^2)^2+m^4 \\ -2acx^2(n^2-x^2)-2am^2x^2-2cm^2(n^2-x^2) \end{array}\right\}=b^2x^2(n^2-x^2),$$

qui ne contient plus de radical.

Le procédé qu'on vient d'employer pour faire disparaître le radical, doit être remarqué, parce qu'on a souvent occasion de s'en servir; il consiste à *isoler le radical qu'on veut faire disparaître, et ensuite à élever les deux membres de l'équation proposée à la puissance marquée par le degré de ce radical.*

187. La complication de ce procédé, qui devient très grande lorsqu'il y a plusieurs radicaux, jointe à la difficulté de résoudre l'une des équations proposées, par rapport à l'une des inconnues, difficulté qui est souvent insurmontable dans l'état actuel de l'Algèbre, a fait chercher une méthode au moyen de laquelle on pût opérer sans cela l'élimination, en sorte que la résolution des équations fût la dernière des opérations qu'exige la solution des problèmes.

Pour rendre les calculs plus faciles, on met les équations à deux inconnues sous la forme d'équations à une seule, en ne laissant en évidence que celle qu'on veut éliminer. Si l'on avait, par exemple,

$$x^2 + axy + bx = cy^2 + dy + e,$$

on transposerait tous les termes dans un seul membre, en les ordonnant par rapport à x, il viendrait

$$x^2 + (ay + b)\,x - cy^2 - dy - e = 0,$$

et faisant pour abréger,

$$ay + b = P, \quad -cy^2 - dy - e = Q,$$

on aurait $$x^2 + Px + Q = 0.$$

L'équation générale du degré m à deux inconnues doit contenir toutes les puissances de x et de y, qui ne passent pas ce degré, ainsi que les produits dans lesquels la somme des exposans de x et de y ne s'élève pas au-delà de m; on peut donc représenter ainsi l'équation générale du degré m, à deux inconnues :

$$x^m + (a+by)x^{m-1} + (c+dy+ey^2)x^{m-2} + (f+gy+hy^2+ky^3)x^{m-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (p+qy+ry^2 \ldots + uy^{m-1})x + p' + q'y + r'y^2 \ldots + v'y^m = 0.$$

On ne donne point de coefficient à x^m dans cette équation, parce qu'on peut toujours, par la division, dégager de son multiplicateur tel terme qu'on veut d'une équation; et si l'on fait

$$a+by = P,\ c+dy+ey^2 = Q,\ f+gy+hy^2+ky^3 = R,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p+qy \ldots\ldots + uy^{m-1} = T,\ p'+q'y \ldots\ldots + v'y^m = U,$$

l'équation ci-dessus prendra la forme

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots\ldots + Tx + U = 0.$$

188. Il est bon de remarquer que l'élimination de x entre deux équations du second degré,

$$x^2 + Px + Q = 0,\ x^2 + P'x + Q' = 0,$$

peut s'effectuer immédiatement en retranchant la seconde équation de la première. Cette opération donne

$$(P-P')x+Q-Q'=0,$$

d'où $$x=-\frac{Q-Q'}{P-P'};$$

substituant cette valeur dans l'une des deux équations proposées, la première, par exemple, on trouvera

$$\frac{(Q-Q')^2}{(P-P')^2}-\frac{P(Q-Q')}{P-P'}+Q=0;$$

faisant disparaître les dénominateurs, on aura

$$(Q-Q')^2-P(P-P')(Q-Q')+Q(P-P')^2=0;$$

et mettant $P-P'$ en facteur commun dans les deux derniers termes, il viendra

$$(Q-Q')^2+(P-P')(PQ'-QP')=0.$$

Il ne restera plus qu'à substituer pour P, Q, P' et Q', les valeurs particulières au cas qu'on examine.

189. Avant d'aller plus loin, je vais montrer comment on reconnaît que la valeur de l'une quelconque des inconnues satisfait en même temps aux deux équations proposées. Afin de mieux fixer les idées, je prendrai un exemple particulier; mais le raisonnement n'en sera pas moins général.

Soient les équations

$$x^3+3x^2y+3xy^2-98=0 \ldots\ldots (1),$$
$$x^2+4xy-2y^2-10=0 \ldots\ldots (2),$$

que je supposerai données par une question d'après laquelle on doit avoir $y=3$.

Pour vérifier cette dernière assertion, il faut d'abord substituer 3 à la place de y, dans les équations proposées, ce qui donne

$$x^3+9x^2+27x-98=0 \ldots\ldots (a),$$
$$x^2+12x-28=0 \ldots\ldots (b),$$

équations qui doivent admettre la même valeur de x, si

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2y+3y^2x-98 & x^2+4xy-2y^2-10 \\ \hline -x^3-4x^2y+2y^2x+10x & x-y \\ \hline -\ x^2y+5y^2x+10x-98 & \\ +\ x^2y+4y^2x-2y^3-10y & \\ \hline \end{array}$$

1er Reste.....$+(9y^2+10)x-2y^3-10y-98$

$$x^2+4xy-2y^2-10 \mid (9y^2+10)x-2y^3-10y-98$$

ou bien $(9y^2+10)x^2+36xy^3-18y^4-110y^2-100 \mid (9y^2+10)x-2y^3-10y-98$

$$+40xy$$

$$-(9y^2+10)x^2+2xy^3+98x \qquad x+38y^3+50y+98$$

$$+10xy$$

$$+38xy^3-18y^4-110y^2-100$$
$$+50xy$$
$$+98x$$

ou bien $(38y^3+50y+98)(9y^2+10)x-162y^6-1170y^4-2000y^2-1000$

$$-(38y^3+50y+98)(9y^2+10)x+76y^6+480y^4+392oy^3+500y^2+588oy+9604$$

2e Reste.....$-86y^6-690y^4+392oy^3-1500y^2+588oy+8604$

En égalant ce reste à zéro, divisant ensuite tous ses termes par 2, et rendant le premier positif, il vient

$$43y^6+345y^4-1960y^3+750y^2-2940y-4300=0.$$

celle qu'on a assignée pour y est vraie. Si l'on désigne la valeur de x par α, il faudra, en vertu de ce qui a été prouvé numéro 179, que l'équation (a) et l'équation (b) soient divisibles l'une et l'autre par $x-\alpha$; elles auront donc un diviseur commun dont $x-\alpha$ doit faire partie; et en effet, on trouve pour ce commun diviseur $x-2$ (48) : on a donc $\alpha=2$. Ainsi, la valeur $y=3$ convient à la question, et correspond à $x=2$.

S'il restait quelque doute que le commun diviseur des équations (a) et (b) dût donner la valeur de x, on le lèverait en observant que ces équations reviennent à

$$(x^2+11x+49)(x-2)=0,$$
$$(x+14)(x-2)=0,$$

d'où il est visible qu'elles sont satisfaites lorsque l'on y met 2 pour x.

190. Le moyen que je viens d'indiquer pour trouver la valeur de x, quand celle de y est connue, peut s'appliquer immédiatement à l'élimination de x.

En effet, quand on opère sur les équations (1) et (2), comme pour chercher si elles ont un commun diviseur en x, au lieu d'en trouver un, on arrive à un reste qui ne contient plus que l'inconnue y et des nombres donnés; et il est évident que si l'on y mettait à la place de y sa valeur 3, il devrait s'évanouir, puisque, par la même substitution, les équations (1) et (2) deviennent les équations (a) et (b), qui ont un commun diviseur. En égalant donc ce reste à zéro, on exprimera la condition que doivent remplir les valeurs de y, pour que les deux équations données puissent admettre en même temps une même valeur pour x.

Le tableau ci-joint contient les détails de l'opération relative aux équations,

$$x^3+3x^2y+3xy^2-98=0,$$
$$x^2+4xy-2y^2-10=0,$$

qui m'ont occupé dans le numéro précédent : on trouve pour le dernier diviseur,

$$(9y^2+10)x-2y^3-10y-98;$$

et le reste étant égalé à zéro, donne

$$43y^6+345y^4-1960y^3+750y^2-2940y-4302=0,$$

équation qui admet, outre la valeur $y=3$ indiquée ci-dessus, toutes les autres valeurs de y dont la question proposée est susceptible, et qu'on nomme pour cette raison *équation finale.*

Le reste ci-dessus étant annulé, l'avant-dernier reste devient le diviseur commun des équations proposées, en sorte qu'en l'égalant à zéro, il donne la valeur de x, lorsqu'on y met celle de y. Sachant, par exemple, que $y=3$, on mettra ce nombre dans la quantité

$$(9y^2+10)x-2y^3-10y-98,$$

qu'on égalera ensuite à zéro, et il viendra l'équation du premier degré

$$91x-182=0 \quad \text{d'où} \quad x=2.$$

191. L'opération que je viens de faire sur des équations particulières, peut s'appliquer également à des équations quelconques

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}\ldots+Tx+U=0,$$
$$x^n+P'x^{n-1}+Q'x^{n-2}+R'x^{n-3}\ldots+Y'x+Z'=0,$$

où la seconde inconnue est enveloppée dans les coefficiens P, Q, etc., P', Q', etc.; l'élimination de l'inconnue x s'effectuera en cherchant, comme ci-dessus, le plus grand diviseur commun aux premiers membres de ces équations, et en égalant à zéro le reste indépendant de x.

Le calcul, en général assez compliqué, peut dans les cas particuliers, recevoir plusieurs simplifications utiles; mais le détail en serait trop long pour m'y arrêter ici; elles sont d'ailleurs assez faciles à trouver : je supposerai donc que, dans le cours de l'opération, on ne supprime

aucun facteur en y qui serait commun à tous les termes d'un même reste, et je me bornerai à expliquer les résultats qui pourraient embarrasser. Premièrement il peut arriver que la valeur de y rende nul de lui-même l'avant-dernier reste; alors le reste précédent, ou celui dans lequel x entre au second degré, deviendra le diviseur commun des deux équations proposées. En y mettant la valeur de y, et l'égalant ensuite à zéro, on aura une équation du second degré en x seul, dont les deux valeurs correspondront à la valeur connue de y. Si cette valeur rendait encore nul le reste du second degré, il faudrait recourir au précédent, où x monterait au troisième degré, parce qu'il serait, dans ce cas, le diviseur commun des deux équations proposées; et la valeur de y correspondrait à trois valeurs de x. En général, il faudra remonter jusqu'à un reste qui ne s'anéantisse point par la substitution de la valeur de y.

Il peut encore arriver qu'on ne trouve pas de reste, ou bien que le reste ne renferme que des quantités connues.

Dans le premier cas, les deux équations ont un diviseur commun sans aucune détermination de y; elles sont donc de la forme

$$P \times D = 0, \qquad Q \times D = 0,$$

D étant le diviseur commun. Il est visible qu'on satisfait à toutes deux en même temps, en faisant d'abord $D = 0$; et cette équation déterminera l'une des inconnues par l'autre, quand le facteur D les contiendra toutes deux; mais s'il ne renferme que des quantités données et x, cette inconnue sera déterminée, et l'autre restera entièrement indéterminée. Quant aux facteurs qui ne contiendraient pas x, on les obtiendrait d'après la remarque du n° 50.

Si l'on fait ensuite

$$P = 0, \qquad Q = 0,$$

conjointement, on se procurera encore deux équations qui pourront fournir des solutions déterminées de la question proposée.

Soit, par exemple,

$$(ax+by-c)\ (mx+ny-d)=0,$$
$$(a'x+b'y-c')\ (mx+ny-d)=0;$$

en supposant d'abord nul le second facteur, commun aux deux équations, on n'aura, entre les inconnues x et y, que la seule équation

$$mx+ny-d=0;$$

et sous ce point de vue, la question sera indéterminée: mais en supprimant ce facteur, on tombera sur les équations

$$ax+by-c=0, \qquad a'x+b'y-c'=0,$$

ou

$$ax+by=c, \qquad a'x+b'y=c';$$

et dans ce sens, la question sera déterminée, puisqu'on aura autant d'équations que d'inconnues.

Dans le cas où le reste ne contient que des quantités données, les deux équations proposées sont contradictoires; car le diviseur commun qui établit leur existence simultanée, ne peut avoir lieu que par une condition qu'il est impossible de remplir, puisqu'elle tombe sur des quantités données, et qu'elle présente un résultat absurde. Ce cas se rapporte à ce qu'on a vu n°. 68 pour les équations du premier degré.

192. Il est encore à propos d'être prévenu que les polynômes en y, par lesquels on multiplie les dividendes partiels, pour rendre les divisions possibles, introduisent souvent dans le dernier reste des facteurs étrangers à la question, et qui font que ce reste n'en est pas la véritable équation finale. Pour n'être pas induit en erreur sur les valeurs de y qui proviennent de ces facteurs, l'idée qui se présente d'abord est de substituer immédiatement dans les équations proposées chacune des valeurs que donne l'équation en y seul, car toutes les valeurs qui

font acquérir à ces équations un commun diviseur, appartiennent nécessairement à la question, et les autres doivent être exclues. On sent aussi que l'équation finale pourrait devenir incomplète si l'on supprimait, dans le cours du calcul, quelque facteur en y; mais toutes ces circonstances, qui ont été discutées par M. Bret, dans le 15e cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, et par M. Lefébure, dans le n° 3 du 2e volume de la *Correspondance* sur la même école, rendent peu commode dans la pratique l'emploi du procédé indiqué ci-dessus, et doivent lui faire préférer celui que je vais exposer, d'après Euler, dans le numéro suivant (*).

193. Soient les deux équations

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$
$$x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S' = 0;$$

en représentant par $x-\alpha$ le facteur qui doit être commun à l'une et à l'autre, lorsque y est déterminé convenablement, on pourra considérer la première comme le produit de $x-\alpha$, par le facteur du deuxième degré, x^2+px+q, et la seconde comme le produit de $x-\alpha$, par le facteur du troisième degré..... $x^3+p'x^2+q'x+r'$, p et q, p', q' et r', étant des coefficiens indéterminés: on aura donc

$$x^3+Px^2+Qx+R=(x-\alpha)(x^2+px+q),$$
$$x^4+P'x^3+Q'x^2+R'x+S'=(x-\alpha)(x^3+p'x^2+q'x+r').$$

(*) On peut aisément conclure de ce qui précède, que la recherche de l'équation finale tirée de deux équations à deux inconnues, est, en général, un problème déterminé; mais la même équation finale peut répondre à une infinité de systèmes d'équations à deux inconnues. En renversant le procédé par lequel on obtient le plus grand commun diviseur de deux quantités, il serait extrêmement facile de former à volonté ces systèmes; mais cette question a trop peu d'usage dans les Mathématiques élémentaires, pour s'y arrêter ici, et pour s'appesantir sur les remarques minutieuses auxquelles elle pourrait donner lieu. Ce sont de ces objets qu'il faut laisser à la sagacité des lecteurs intelligens, qui ne manquent jamais de les trouver d'eux-mêmes, si quelque circonstance leur en fait sentir le besoin.

En éliminant le binome $(x-\alpha)$ comme une inconnue au premier degré (84), on trouvera

$$(x^3+Px^2+Qx+R)(x^3+p'x^2+q'x+r')=$$
$$(x^4+P'x^3+Q'x^2+R'x+S')(x^2+px+q).$$

Ce résultat doit se vérifier sans qu'il soit besoin d'assigner à x aucune valeur particulière; c'est ce qui ne peut arriver, à moins que le premier membre ne soit composé des mêmes termes que le second: il faudra donc, après avoir effectué les multiplications indiquées, égaler entre eux les coefficiens que chaque puissance de x aura dans les deux membres, et on obtiendra ainsi les équations suivantes:

$$P+p'=P'+p, \quad Rp'+Qq'+Pr'=S'+R'p+Q'q,$$
$$Q+Pp'+q'=Q'+P'p+q, \quad Rq'+Qr'=S'p+R'q,$$
$$R+Qp'+Pq'+r'=R'+Q'p+P'q', \quad Rr'=S'q.$$

Comme ces équations sont au nombre de six, et qu'elles ne renferment que cinq quantités indéterminées, savoir, p, q, p', q' et r', on pourra chasser ces quantités qui ne montent qu'au premier degré, et arriver à une équation qui, ne renfermant plus que les quantités P, Q, R, P', Q', R', et S', exprimera une condition sans laquelle on ne pourrait satisfaire à celles de la question, et sera par conséquent l'équation finale en y.

(*) La méthode d'Euler, exposée ici, revient à multiplier chacune des équations proposées par un facteur dont les coefficiens soient indéterminés, à égaler les produits, et à disposer des coefficiens de manière que les termes affectés de l'inconnue x se détruisent entre eux. C'est ainsi qu'il l'a présentée dans son *Introduction à l'analyse des infinis*. Là, k désignant l'exposant du degré des produits, celui des facteurs se trouve $k-m$ pour l'équation du degré m, et $k-n$ pour celle du degré n. Le premier terme de chacun de ces facteurs ayant l'unité pour coefficient, l'un contient $k-m$ coefficiens indéterminés, et l'autre $k-n$. La somme des produits renferme un nombre k de termes affectés de x; mais il n'en faut détruire que $k-n$, parce que celui qui contient la plus haute puissance de x, s'évanouit par lui-même. Il suit de là que le nombre total $2k-m-n$

Si cette équation se trouvait identique, il s'ensuivrait que les équations proposées auraient au moins un facteur de la forme $x-\alpha$, quel que fût y; et si au contraire l'équation finale ne comprenait que des quantités connues, les équations proposées seraient contradictoires.

Lorsque l'équation finale peut avoir lieu, on obtient le facteur $x-\alpha$ en divisant la première des équations proposées, par le polynome x^2+px+q; on trouve pour quotient

$$x+P-p,$$

et on néglige le reste, parce qu'il doit nécessairement être nul, lorsqu'on y met pour y une valeur tirée de l'équation finale. En égalant à zéro le quotient ci-dessus, on en tire

$$x=p-P,$$

et cette valeur de x sera connue, ou au moins exprimée en y, si l'on y remplace p par sa valeur déduite des équations du premier degré, formées plus haut.

Cette même expression prendra en général une forme fractionnaire, en sorte qu'on aura $x=\frac{M}{N}$, ou $Nx-M=0$; et on voit alors que les valeurs de y qui feraient évanouir simultanément M et N, vérifieraient l'équation précédente, indépendamment de x; cela viendrait de ce que, par ces valeurs, les deux équations proposées acquerraient un facteur commun d'un degré plus élevé que le premier. Il ne serait pas difficile de remonter jusqu'aux conditions immédiates

---

des coefficiens indéterminés doit être égal à $k-1$, et que par conséquent $k=m+n-1$: on doit donc multiplier l'équation du degré m par un facteur du degré $n-1$, celle du degré n par un facteur du degré $m-1$, et égaler les produits terme à terme, règle semblable à celle qu'on donne dans le texte. Il est bon de remarquer que cette première méthode d'Euler contient le germe de celle que Bézout a développée dans sa *Théorie des Equations algébriques*.

qui indiquent cette circonstance ; mais de semblables détails passent les bornes que je me suis prescrites dans ce Traité.

194. Soient d'abord pour exemple les équations

$$x^2+Px+Q=0, \qquad x^2+P'x+Q'=0;$$

les facteurs qui multiplient $x-\alpha$ seront ici du premier degré, ou $x+p$ et $x+p'$ seulement : on aura donc

$$R=0,\ R'=0,\ S'=0,\ q=0,\ q'=0,\ r'=0,$$

et il viendra

$$\left.\begin{array}{l} P+p' = P'+p, \\ Q+Pp'=Q'+P'p, \\ Qp'=Q'p, \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} p-p' = P-P', \\ P'p-Pp'=Q-Q', \\ Q'p-Qp'=0. \end{array}\right.$$

On tirera des deux premières équations,

$$p=\frac{(P-P')P-(Q-Q')}{P-P'},$$

$$p'=\frac{(P-P')P'-(Q-Q')}{P-P'};$$

substituant dans la troisième, il en résultera

$$(P-P')Q'P-(Q-Q')Q'=(P-P')P'Q-(Q-Q')Q$$

ou $$(P-P')(PQ'-QP')+(Q-Q')^2=0.$$

Maintenant si dans l'équation

$$x=p-P,$$

on met pour p sa valeur trouvée ci-dessus, on obtiendra, comme dans le n° 188,

$$x=-\frac{Q-Q'}{P-P'}.$$

195. Afin de donner au lecteur l'occasion de s'exercer, j'indiquerai les calculs à faire pour éliminer x entre les deux équations

$$x^3+Px^2+Qx+R=0, \qquad x^3+P'x^2+Q'x+R'=0.$$

Dans ce cas, on aura

$$S=0, \quad r=0 \ (193)$$

et il viendra ces cinq équations :

$$\begin{aligned} P+p' &= P'+p, \\ Q+Pp'+q' &= Q'+P'p+q, \\ R+Qp'+Pq' &= R'+Q'p+P'q, \\ Rp'+Qq' &= R'p+Q'q, \\ Rq' &= R'q, \end{aligned}$$

auxquelles je donnerai la forme suivante :

$$\begin{aligned} p-p' &= P-P', \\ P'p-Pp'+q-q' &= Q-Q', \\ Q'p-Qp'+P'q-Pq' &= R-R', \\ R'p-Rp'+Q'q-Qq' &= 0, \\ R'q-Rq' &= 0. \end{aligned}$$

On pourrait, par les règles du n° 88, tirer immédiatement de quatre quelconques de ces équations, les valeurs des inconnues p, p', q et q'; mais la simplicité de la première et de la dernière de ces mêmes équations, permet d'arriver plus promptement au résultat. Je fais, pour abréger,

$$P-P'=e, \quad Q-Q'=e', \quad R-R'=e'';$$

et je déduis ensuite de la première et de la dernière des équations proposées,

$$p'=p-e, \quad q'=\frac{R'q}{R};$$

puis, substituant dans les trois autres et faisant disparaître le dénominateur R, il vient

$$\begin{aligned} (P'-P)Rp+(R-R')q &= R(e'-Pe) \ldots (a), \\ (Q'-Q)Rp+(RP'-PR')q &= R(e''-Qe) \ldots (b), \\ (R'-R)Rp+(RQ'-QR')q &= -R^2e \ldots\ldots (c). \end{aligned}$$

Si maintenant on tire des équations (a) et (b) les valeurs de p et de q (88), et qu'on y supprime le fac-

teur R qui sera commun aux numérateurs et au dénominateur, on aura

$$p = \frac{(e'-Pe)(RP'-PR') - (R-R')(e''-Qe)}{(P'-P)(RP'-PR') - (R-R')(Q'-Q)},$$

$$q = \frac{(P'-P)(e''-Qe)R - R(e'-Pe)(Q'-Q)}{(P'-P)(RP'-PR') - (R-R')(Q'-Q)};$$

mettant ces valeurs dans l'équation (c), on obtiendra une équation finale, divisible par R et se réduisant à

$$(R'-R)[(e'-Pe)(RP'-PR') - (R-R')(e''-Qe)]$$
$$+(RQ'-QR')[(P'-P)(e''-Qe) - (e'-Pe)(Q'-Q)]$$
$$= -Re[(P'-P)(RP'-PR') - (R-R')(Q'-Q)],$$

où il ne reste plus qu'à remplacer les lettres e, e', e'', par les quantités qu'elles désignent.

196. Si l'on avait entre les trois inconnues x, y et z, un pareil nombre d'équations désignées par (1), (2) et (3), et qu'on voulût déterminer ces inconnues, on pourrait combiner, par exemple, l'équation (1) avec (2) et avec (3), pour éliminer x, et chasser ensuite y des deux résultats qu'on aurait obtenus; mais il faut observer que, par cette élimination *successive*, les trois équations proposées ne concourent pas de la même manière à former l'équation finale : l'équation (1) est employée deux fois, tandis que (2) et (3) ne le sont qu'une; et il arrive de là que le résultat auquel on parvient, est compliqué d'un facteur étranger à la question (84). Bézout, dans sa *Théorie des Équations*, a fait usage d'une méthode qui n'est point sujette à cet inconvénient, et par laquelle il prouve que *le degré de l'équation finale, résultante de l'élimination entre un nombre quelconque d'équations complètes, renfermant un pareil nombre d'inconnues et de degrés quelconques, est égal au produit des exposans qui marquent le degré de ces équations.* On trouvera dans le *Complément* de ce Traité, la démonstration de-

gante et courte que M. Poisson a donnée de cette proposition, qu'il est d'ailleurs fort aisé de vérifier sur les équations finales rapportées dans les nos 194 et 195. En supposant complètes les équations proposées dans ces numéros, l'inconnue y entre au premier degré dans P et P', au deuxième dans Q et Q', au troisième dans R et R'; il s'ensuit que e sera du premier degré, e' du second, e'' du troisième, et que les termes du degré le plus élevé des produits indiqués dans l'équation finale du n° 194, auront pour exposant 4, ~~4~~ 3, et ceux de l'équation finale du n° 195 auront 9, ou 3.3.

De la recherche des racines commensurables, et des racines égales des équations numériques.

197. Après avoir fait connaître les principales propriétés des équations algébriques, et la manière d'en éliminer les inconnues, lorsqu'il y en a plusieurs, je vais m'occuper de la résolution numérique des équations à une seule inconnue, c'est-à-dire, de la recherche de leurs racines, lorsque leurs coefficiens sont exprimés en nombres (*).

Je commencerai par montrer que *quand l'équation proposée n'a pour coefficiens que des nombres entiers, et que celui de son premier terme est l'unité, ses racines réelles ne sauraient s'exprimer par des fractions, et ne peuvent être par conséquent que des nombres entiers, ou des nombres incommensurables.*

(*) On n'a point, pour les degrés supérieurs au quatrième, de résolution générale; il n'y a même, à proprement parler, que celle des équations du second degré, que l'on puisse regarder comme complète. Les expressions des racines des équations du troisième et du quatrième degré sont fort compliquées, sujettes à des exceptions, et beaucoup moins commodes dans la pratique, que les procédés que je vais donner; on les trouvera d'ailleurs dans le *Complément*.

Pour le prouver, soit l'équation

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots\ldots + Tx + U = 0,$$

dans laquelle on substitue une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ à la place de x; elle deviendra

$$\frac{a^n}{b^n} + P\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + Q\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} \ldots\ldots + T\frac{a}{b} + U = 0;$$

et en réduisant tous ses termes au même dénominateur, on aura

$$a^n + Pa^{n-1}b + Qa^{n-2}b^2 \ldots\ldots + Tab^{n-1} + Ub^n = 0,$$

ce qui revient à

$$a^n + b(Pa^{n-1} + Qa^{n-2}b \ldots\ldots + Tab^{n-2} + Ub^{n-1}) = 0.$$

Le premier membre de cette dernière équation est formé de deux parties entières, dont l'une est divisible par b, et l'autre ne l'est pas (98), puisqu'on suppose la fraction $\frac{a}{b}$ réduite à sa plus simple expression, ou que a et b n'ont aucun diviseur commun; l'une de ces parties ne peut donc détruire l'autre.

198. C'est d'après cette remarque qu'on a reconnu l'utilité de faire disparaître les fractions d'une équation, ou de rendre ses coefficiens entiers, mais de manière néanmoins que le premier terme n'en acquière point d'autre que l'unité; et l'on y parvient *en faisant l'inconnue proposée égale à une nouvelle inconnue divisée par le produit de tous les dénominateurs de l'équation*, puis en réduisant tous les termes au même dénominateur, par le procédé du n° 52.

Soit pour exemple l'équation

$$x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{bx}{n} + \frac{c}{p} = 0;$$

on prendra $x = \frac{y}{m\,n\,p}$, et mettant cette expression de x dans l'équation proposée, on obtiendra

$$\frac{y^3}{m^3n^3p^3} + \frac{ay^2}{m^3n^2p^2} + \frac{by}{mn^2p} + \frac{c}{p} = 0;$$

le diviseur du premier terme contenant tous les facteurs des autres diviseurs, on multipliera par ce diviseur, et on réduira chaque terme à sa plus simple expression : on trouvera alors

$$y^3 + anpy^2 + bm^2np^2y + cm^3n^3p^2 = 0.$$

Quand les dénominateurs m, n, p, ont des diviseurs communs, il ne faut diviser y que par le plus petit nombre qui puisse se diviser en même temps par tous les dénominateurs. Ces simplifications sont trop faciles à apercevoir, pour qu'il soit besoin de s'y arrêter; je me bornerai seulement à faire observer que si tous les dénominateurs étaient égaux à m, il suffirait de faire $x = \frac{y}{m}$.

L'équation proposée, qui serait alors

$$x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{bx}{m} + \frac{c}{m} = 0$$

deviendrait

$$\frac{y^3}{m^3} + \frac{ay^2}{m^3} + \frac{by}{m^2} + \frac{c}{m} = 0,$$

et l'on aurait

$$y^3 + ay^2 + bmy + cm^2 = 0.$$

Il est visible que l'opération ci-dessus revient à multiplier toutes les racines de la proposée par le nombre m, puisque $x = \frac{y}{m}$ donne $y = mx$.

199. Maintenant, puisque a étant la racine de l'équation $x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots + Tx + U = 0$, on a

$$U = -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \ldots - Ta \text{ (179)},$$

il en résulte que a est nécessairement un des diviseurs du nombre entier U, et que par conséquent lorsque ce nombre a peu de diviseurs, il suffira de les substituer successivement à la place de x, dans l'équation proposée, pour reconnaître si elle a une racine en nombres entiers ou non.

Si l'on a, par exemple, l'équation

$$x^3 - 6x^2 + 27x - 38 = 0,$$

le nombre 38 n'ayant pour diviseurs que les nombres

$$1, \quad 2, \quad 19, \quad 38,$$

on les essaiera, tant positivement que négativement, et l'on trouvera que le seul nombre entier $+2$ satisfait à l'équation proposée, ou que $x = 2$. On divisera ensuite l'équation proposée, par $x - 2$; égalant à zéro le quotient, on formera l'équation

$$x^2 - 4x + 19 = 0,$$

dont les racines sont imaginaires; et en résolvant celle-ci on trouvera que la proposée a trois racines,

$$x = 2, \quad x = 2 + \sqrt{-15}, \quad x = 2 - \sqrt{-15}.$$

200. Le procédé que je viens d'indiquer pour découvrir le nombre entier qui satisfait à une équation, devient impraticable lorsque le dernier terme de cette équation a beaucoup de diviseurs; mais l'équation

$$U = -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \ldots - Ta,$$

fournit de nouvelles conditions qui abrègent beaucoup le calcul. Afin de rendre la méthode plus claire, je prendrai, comme exemple, l'équation

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0;$$

a désignant toujours la racine, on aura

$$a^4 + Pa^3 + Qa^2 + Ra + S = 0$$
$$S = -Ra - Qa^2 - Pa^3 - a^4,$$

d'où l'on tirera

$$\frac{S}{a} = -R - Qa - Pa^2 - a^3.$$

On voit d'abord par cette dernière équation, que $\frac{S}{a}$ doit être un nombre entier.

Passant ensuite R dans le second membre, il viendra

$$\frac{S}{a} + R = -Qa - Pa^2 - a^3;$$

faisant pour abréger $\frac{S}{a} + R = R'$, et divisant les deux membres de l'équation

$$R' = -Qa - Pa^2 - a^3$$

par a, on aura

$$\frac{R'}{a} = -Q - Pa - a^2,$$

d'où l'on conclura que $\frac{R'}{a}$ doit encore être un nombre entier.

Passant Q dans le premier membre, faisant $\frac{R'}{a} + Q = Q'$, puis divisant les deux membres par a, on obtiendra

$$\frac{Q'}{a} = -P - a,$$

d'où l'on conclura que $\frac{Q'}{a}$ doit être un nombre entier.

Passant enfin P dans le premier membre, faisant $\frac{Q'}{a} + P = P'$, et divisant par a, on aura

$$\frac{P'}{a} = -1.$$

Réunissant les conditions que je viens d'énoncer, on verra que le nombre a sera la racine de l'équation proposée, s'il satisfait aux équations

$$\frac{S}{a} + R = R',$$

$$\frac{R'}{a} + Q = Q',$$

$$\frac{Q'}{a} + P = P',$$

$$\frac{P'}{a} + 1 = 0,$$

de manière que R', Q' et P', soient des nombres entiers.

Il suit de là que, pour s'assurer si l'un des diviseurs a du dernier terme S peut être la racine de l'équation proposée, il faut,

1°. *Diviser le dernier terme par le diviseur* a, *et ajouter au quotient le coefficient du terme affecté de* x;

2°. *Diviser cette somme par le diviseur* a, *et ajouter au quotient le coefficient du terme affecté de* x^2;

3°. *Diviser cette somme par le diviseur* a, *et ajouter au quotient le coefficient du terme affecté de* x^3;

4°. *Diviser cette somme par le diviseur* a, *et ajouter au quotient l'unité, ou le coefficient du terme affecté de* x^4; *le résultat devra être égal à zéro; si* a *est en effet la racine.*

Les règles ci-dessus conviennent à un degré quelconque, en observant que l'on ne doit trouver zéro pour

résultat que lorsqu'on sera parvenu au premier terme de l'équation proposée (*).

201. Lorsqu'on applique ces règles à un exemple numérique, on peut disposer le calcul de manière à faire subir chaque épreuve à tous les diviseurs du dernier terme en même temps.

Voici, pour l'équation

$$x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0,$$

le tableau du calcul :

+15,	+ 5,	+ 3,	+ 1,	— 1,	— 3,	— 5,	—15,
+ 1,	+ 3,	+ 5,	+15,	—15,	— 5,	— 3,	— 1,
—19,	—17,	—15,	— 5,	—35,	—25,	—23,	—21;
		— 5,	— 5,	+35,			
		+18,	+18,	+58,			
		+ 6,	+18,	—58,			
		— 3,	+ 9,	—67,			
		— 1,	+ 9,	+67,			
		0.					

Tous les diviseurs du dernier terme 15 sont rangés par ordre de grandeur, tant avec le signe + qu'avec le signe —, sur une même ligne (c'est la ligne des diviseurs a.)

La seconde ligne contient les quotiens du nombre 15, divisé successivement par tous ses diviseurs $\left(\text{c'est la ligne des quantités } \frac{S}{a}\right)$.

(*) Il ne serait pas difficile de s'assurer par la formule des quotiens donnée dans le numéro 180, que les quantités $\frac{S}{a}$, $\frac{R'}{a}$, $\frac{Q'}{a}$, prises avec le signe —, sont, en commençant par le dernier terme, les coefficiens du quotient du polynome

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S$$

divisé par $x - a$, et qui est par conséquent

$$x^3 - \frac{Q'}{a}x^2 - \frac{R'}{a}x - \frac{S}{a}.$$

La troisième ligne a été formée en ajoutant à la précédente le coefficient — 20 qui multiplie x (c'est la ligne des quantités $R' = \frac{S}{a} + R$).

La quatrième ligne contient les quotiens de chaque nombre de la précédente par le diviseur qui lui correspond $\left(\text{c'est la ligne des quantités } \frac{R'}{a}\right)$. On a négligé dans cette ligne tous les nombres qui n'étaient pas entiers.

La cinquième ligne résulte des nombres écrits dans la précédente, ajoutés avec le nombre 23 qui multiplie x^4 (cette ligne comprend les quantités Q').

La sixième ligne contient les quotiens des nombres de la précédente par le diviseur qui leur correspond, $\left(\text{elle renferme les quantités } \frac{Q'}{a}\right)$.

La septième comprend les sommes des nombres de la précédente et du coefficient — 9 qui multiplie x^3 (on y trouve les quantités $\frac{Q'}{a} + P$).

La huitième enfin s'obtient en divisant chacun des nombres de la précédente par le diviseur correspondant $\left(\text{c'est la ligne de } \frac{P}{a}\right)$; et comme on ne trouve — 1 que dans la colonne marquée + 3, on en conclut que l'équation proposée n'a qu'une racine commensurable, savoir + 3; en sorte qu'elle est divisible par $x - 3$ (*).

On peut omettre dans le tableau les diviseurs + 1 et — 1, que l'on éprouve plus facilement par leur substitution immédiate dans l'équation proposée.

(*) En formant le quotient d'après la note précédente, on trouve $x^3 - 6x^2 + 5x - 5$.

202. Soit encore, pour exemple, l'équation

$$x^3 - 7x^2 + 36 = 0.$$

Après s'être assuré que les nombres $+1$ et -1 ne satisfont point à cette équation, on formera, d'après les règles précédentes, le tableau ci-dessous, en observant que le terme multiplié par x, manquant à cette équation, il doit être censé avoir 0 pour coefficient; il faut donc supprimer la troisième ligne, et déduire immédiatement la quatrième de la seconde.

$+36, +18, +12, +9, +6, +4, +3, +2, -2, -3, -4, -6, -9, -12, -18, -36,$
$+1, +2, +3, +4, +6, +9, +12, +18, -18, -12, -9, -6, -4, -3, -2, -1,$

$+1, \quad +4, +9, +9, +4, \quad +1$
$-6, \quad -3, +2, +2, -3, \quad -6$
$-1, \quad -1, +1, -1, +1, \quad +1$
$0, \quad 0, \quad 0.$

On trouve dans cet exemple trois nombres qui satisfont à toutes les conditions, savoir : $+6$, $+3$ et -2; on obtient par conséquent, en même temps, les trois racines dont l'équation proposée est susceptible, et l'on reconnaît qu'elle est le produit des trois facteurs simples $x-6$, $x-3$ et $x+2$.

203. Il est bon d'observer qu'il y a des équations littérales qui se transforment sur-le-champ en équations numériques.

Si l'on avait, par exemple,

$$y^3 + 2py^2 - 33p^2y + 14p^3 = 0,$$

en faisant $y = px$, il viendrait

$$p^3x^3 + 2p^3x^2 - 33p^3x + 14p^3 = 0$$

résultat divisible par p^3, et qui se réduit à

$$x^3 + 2x^2 - 33x + 14 = 0.$$

Le diviseur commensurable de cette dernière équation

étant $x+7$, et donnant $x=-7$, on aura

$$y=-7p.$$

L'équation en y est de celles que l'on appelle *équations homogènes*, parce qu'en faisant abstraction des coefficiens numériques, chacun de ses termes renferme le même nombre de facteurs (*).

204. Lorsqu'on connaît une des racines d'une équation, on peut prendre pour inconnue la différence entre cette racine et l'une quelconque des autres; on parvient par ce moyen à une équation d'un degré moindre que la proposée, et qui jouit de plusieurs propriétés remarquables.

Soit l'équation générale

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}\ldots\ldots+Tx+U=0,$$

et soient a, b, c, d, etc., ses racines; en y substituant $a+y$ au lieu de x, et développant les puissances, on a

$$\left.\begin{array}{l}
a^m+ma^{m-1}y+\dfrac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y^2+\ldots+y^m \\
Pa^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}y+\dfrac{(m-1)(m-2)}{2}Pa^{m-3}y^2+\ldots \\
Qa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}y+\dfrac{(m-2)(m-3)}{2}Qa^{m-4}y^2+\ldots \\
Ra^{m-3}+(m-3)Ra^{m-4}y+\dfrac{(m-3)(m-4)}{2}Ra^{m-5}y^2+\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Ta+Ty \\
U
\end{array}\right\}=0,$$

(*) Les lecteurs qui voudraient plus de détails sur la recherche des *diviseurs commensurables* des équations, les trouveront dans la IIIe partie des *Elémens d'Algèbre* de Clairaut. Ce Géomètre s'est occupé des équations littérales aussi bien que des équations numériques.

résultat dont la première colonne, semblable à l'équation proposée, s'évanouit d'elle-même, puisque a est une des racines de cette équation; on peut donc supprimer cette colonne, et diviser ensuite par y tous les termes restans: il vient alors

$$\left.\begin{array}{l} ma^{m-1}+\dfrac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y+\ldots+y^{m-1} \\ +(m-1)Pa^{m-2}+\dfrac{(m-1)(m-2)}{2}Pa^{m-3}y+\ldots \\ +(m-2)Qa^{m-3}+\dfrac{(m-2)(m-3)}{2}Qa^{m-4}y+\ldots \\ +(m-3)Ra^{m-4}+\dfrac{(m-3)(m-4)}{2}Ra^{m-5}y+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +T \end{array}\right\}=0.$$

Cette équation aura visiblement pour ses $m-1$ racines,

$$y=b-a,\quad y=c-a,\quad y=d-a,\text{ etc.}$$

Je la représenterai par

$$A+\frac{B}{2}y+\frac{C}{2.3}y^2.\ldots\ldots+y^{m-1}=0\ldots\ldots\ldots(d),$$

en faisant, pour abréger,

$$ma^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}\ldots.+T=A,$$
$$m(m-1)a^{m-2}+(m-1)(m-2)Pa^{m-3}\ldots.\quad=B,$$

etc.,

et je désignerai par V l'expression

$$a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}\ldots\ldots+Ta+U.$$

205. Si l'équation proposée a deux racines égales, si l'on a, par exemple, $a=b$, l'une des valeurs de y, savoir, $b-a$, deviendra nulle; il faudra donc que l'équation (d) soit satisfaite en y faisant $y=0$; or cette hypothèse fait évanouir tous les termes, excepté le terme tout

connu A : ce dernier doit donc être nul par lui-même ; la valeur de a doit donc satisfaire en même temps aux deux équations

$$V=0 \quad \text{et} \quad A=0.$$

Quand la proposée aura trois racines égales à a, savoir, $a=b=c$, deux des racines de l'équation (d) deviendront nulles en même temps, savoir, $b-a$ et $c-a$; dans ce cas, l'équation (d) sera divisible deux fois de suite par $y-0$ (179) ou y ; or c'est ce qui ne peut arriver que quand les coefficiens A et B sont nuls : il faut donc que la valeur de a satisfasse en même temps aux trois équations

$$V=0, \quad A=0, \quad B=0.$$

En poursuivant ces raisonnemens, on verra que lorsque la proposée aura quatre racines égales, l'équation (d) aura trois racines égales à zéro, ou sera divisible trois fois de suite par y, ce qui exige que les coefficiens A, B et C, soient nuls en même temps, et que la valeur de a satisfasse par conséquent à la fois aux quatre équations

$$V=0, \quad A=0, \quad B=0, \quad C=0.$$

Non-seulement on peut, par ce moyen, reconnaître si une racine donnée a se trouve plusieurs fois parmi celles de l'équation proposée ; mais on en déduit encore un procédé pour s'assurer si cette équation a des racines répétées dont on ignore la valeur.

Pour cela, il faut observer que dans le cas où l'on a $A=0$, ou

$$m a^{m-1} + (m-1) P a^{m-2} + (m-2) Q a^{m-3} \ldots + T = 0,$$

on peut regarder a comme la racine de l'équation

$$m x^{m-1} + (m-1) P x^{m-2} + (m-2) Q x^{m-3} \ldots + T = 0,$$

x désignant alors une inconnue quelconque ; et puisque a se trouve aussi la racine de l'équation $V=0$, ou

$$x^m + P x^{m-1} + \text{etc.} = 0,$$

il suit du n° 189, que $x-a$ est un facteur commun des deux équations ci-dessus.

Changeant de même a en x dans les quantités B, C, etc., le binome $x-a$ deviendra pareillement facteur des nouvelles équations $B=0$, $C=0$, etc., si la racine a annulle les quantités primitives B, C, etc.

Ce que l'on vient de dire pour la racine a conviendrait également à toute autre racine qui serait répétée plusieurs fois; ainsi, en cherchant, par la méthode du plus grand commun diviseur, les facteurs communs aux équations

$$V=0, \quad A=0, \quad B=0, \quad C=0, \text{ etc.},$$

ces facteurs donneront les racines égales de la proposée, dans l'ordre suivant.

Les facteurs communs aux deux premières équations seulement, sont des facteurs doubles de la proposée, c'est-à-dire que si l'on trouve pour commun diviseur entre $V=0$ et $A=0$, une expression de la forme $(x-a)(x-\epsilon)$, par exemple, l'inconnue x aura deux valeurs égales à a, et deux autres égales à ϵ, ou la proposée aura ces quatre facteurs :

$$(x-a), (x-a), (x-\epsilon), (x-\epsilon).$$

Les facteurs communs à la fois aux trois premières des équations ci-dessus, indiquent des facteurs triples dans la proposée; c'est-à-dire que si les premiers sont de la forme $(x-a)(x-\epsilon)$, par exemple, les seconds seront de celle-ci : $(x-a)^3(x-\epsilon)^3$. Il est facile de pousser ces considérations aussi loin qu'on voudra.

206. Il est à propos de remarquer que l'équation $A=0$, qui, par le changement de a en x, devient $mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}\ldots+T=0$, se déduit immédiatement de l'équation $V=0$, ou de la proposée

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+Tx+U=0,$$

en multipliant chacun des termes de cette dernière par l'exposant de la puissance de x qu'il renferme, et diminuant ensuite cet exposant d'une unité; sur quoi il faut observer que le terme U, étant équivalent à $U \times x^0$, doit s'anéantir dans cette opération, où il se trouve multiplié par 0. L'équation $B=0$ se tire de $A=0$, comme $A=0$ se tire de $V=0$; $C=0$ se tire de $B=0$, comme celle-ci se tire de $A=0$, et ainsi de suite (*).

207. Pour éclaircir ceci par un exemple, je prendrai l'équation

$$x^5 + 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108 = 0;$$

l'équation $A=0$ devient dans ce cas

$$5x^4 - 52x^3 + 201x^2 - 342x + 216 = 0;$$

son diviseur commun avec la proposée est

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18.$$

Ce diviseur étant du troisième degré, doit renfermer lui-même plusieurs facteurs; il faut donc chercher s'il n'en aurait pas de communs avec l'équation $B=0$, qui est ici

$$20x^2 - 156x^2 + 402x - 342 = 0;$$

et on trouve en effet pour résultat $x-3$: donc la proposée a trois racines égales à 3, ou admet $(x-3)^3$ au nombre de ses facteurs. Divisant alors le premier diviseur commun par $x-3$ autant de fois de suite qu'il est possible, c'est-à-dire deux fois, on trouve $x-2$. Ce diviseur n'étant commun qu'à l'équation proposée et à l'équation $A=0$, n'entre que deux fois dans la pro-

(*) On conclurait facilement de ce qui précède, que le diviseur commun entre les équations $V=0$ et $A=0$, contient les facteurs égaux, élevés à une puissance moindre d'une unité que dans la proposée; mais la connaissance de cette proposition n'étant pas nécessaire pour ce qui suit, je l'ai renvoyée au *Complément*, où elle est prouvée d'une manière qui me paraît assez simple.

posée. On voit enfin que cette équation est équivalente à

$$(x-3)^3\,(x-2)^2=0.$$

208. L'équation (d), qui donne les différences entre la racine b et chacune des autres, lorsqu'on y met b pour a, les différences entre la racine c et chacune des autres, lorsqu'on y met c pour a, etc., ne changeant point de forme par ces diverses substitutions, et conservant les mêmes coefficiens ainsi que la proposée, peut être généralisée de manière à renfermer toutes les différences des racines combinées deux à deux. Pour cela il suffit d'en éliminer a au moyen de l'équation

$$a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}\ldots\ldots+Ta+U=0;$$

car le résultat ne dépendant que des coefficiens, et ne conservant aucune trace de la racine qu'on a considérée en particulier, conviendra également à toutes.

Il est visible que l'équation finale doit s'élever au degré $m(m-1)$; car ses racines

$$\begin{array}{llll} a-b, & a-c, & a-d, & \text{etc.},\\ b-a, & b-c, & b-d, & \text{etc.},\\ c-a, & c-b, & c-d, & \text{etc.},\\ \text{etc.}, & & & \end{array}$$

sont en même nombre que les permutations qu'on peut former en arrangeant, deux à deux, les m lettres a, b, c, etc. De plus, puisque les quantités

$a-b$ et $b-a$, $a-c$ et $c-a$, $b-c$ et $c-b$, etc, ne diffèrent que par le signe, les racines de l'équation seront égales deux à deux, abstraction faite du signe, en sorte que quand on aura $y=\alpha$, on aura en même temps $y=-\alpha$. Il résulte de là que cette équation ne doit renfermer que des termes où l'inconnue monte à un degré pair; car son premier membre doit être le produit d'un certain nombre de facteurs du second

degré de la forme

$$y^2 - a^2 = (y - a)\ (y + a)\ (184);$$

elle sera donc elle-même de la forme

$$y^{2n} + py^{2n-2} + qy^{2n-4} \ldots\ldots + ty^2 + u = 0.$$

En faisant $y^2 = z$, on la changera en

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} \ldots\ldots + tz + u = 0;$$

et l'inconnue z étant le quarré de y, aura pour valeurs les quarrés des différences des racines de la proposée.

Il est à propos de remarquer que les différences entre les racines réelles de la proposée, étant nécessairement réelles, leurs quarrés seront positifs, et que par conséquent l'équation en z n'aura que des racines positives, si la proposée n'en a que de réelles.

Soit pour exemple l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0;$$

en y faisant $x = a + y$, on aura

$$\left.\begin{array}{l} a^3 + 3a^2y + 3ay^2 + y^3 \\ -7a - 7y \\ +7 \end{array}\right\} = 0.$$

En supprimant les termes $a^3 - 7a + 7$, dont l'ensemble est nul, d'après l'équation proposée, et divisant le reste par y, il viendra

$$3a^2 - 7 + 3ay + y^2 = 0;$$

éliminant a entre cette équation et l'équation

$$a^3 - 7a + 7 = 0,$$

on aura

$$y^6 - 42y^4 + 441y^2 - 49 = 0$$

faisant $z = y^2$, il viendra

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0.$$

209. La substitution de $a + y$ au lieu de x, dans l'équation

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots\ldots + U = 0 \quad (204),$$

s'emploie aussi quelquefois pour faire disparaître un des termes de cette équation. On ordonne alors le résultat par rapport aux puissances de y qui remplace l'inconnue x, et on regarde la quantité a comme une seconde inconnue, qu'on détermine en égalant à zéro le coefficient du terme qu'on veut faire disparaître ; on a de cette manière

$$\left.\begin{array}{l} y^m + may^{m-1} + \dfrac{m(m-1)}{2}a^2y^{m-2} \ldots\ldots + a^m \\ \quad + Py^{m-1} + (m-1)\,Pay^{m-2} \ldots\ldots + Pa^{m-1} \\ \qquad\quad + \quad Qy^{m-2} \ldots\ldots + Qa^{m-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + U \end{array}\right\} = 0.$$

Si le terme qu'on veut ôter est le second, ou celui qui est affecté de y^{m-1}, on fait $ma + P = 0$, d'où l'on tire $a = -\dfrac{P}{m}$. Substituant cette valeur dans le résultat, il ne reste que les termes affectés de

$$y^m,\ y^{m-2},\ y^{m-3},\ \text{etc.}$$

Il suit de là, *qu'on fait évanouir le second terme d'une équation, en substituant à l'inconnue de cette équation une nouvelle inconnue, à laquelle on joint le coefficient du second terme pris avec un signe contraire à celui dont il est affecté, et divisé par l'exposant du premier terme.*

Soit, pour exemple, l'équation

$$x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0;$$

la règle donne

$$x = y - \tfrac{6}{3} = y - 2;$$

et substituant, il viendra

$$\left.\begin{array}{r} y^3 - 6y^2 + 12y - 8 \\ +6y^2 - 24y + 24 \\ -3y + 6 \\ +4 \end{array}\right\} = 0,$$

ce qui se réduit à

$$y^3 - 15y + 26 = 0,$$

où le terme affecté de y^2 n'entre plus. On ferait disparaître le troisième terme (affecté de y^{m-2}), en égalant à zéro l'assemblage des quantités qui le multiplient, c'est-à-dire en posant l'équation

$$\frac{m(m-1)}{2}a^2 + (m-1)Pa + Q = 0.$$

En suivant cette marche, on reconnaîtra sans peine que l'évanouissement du quatrième terme dépend d'une équation du troisième degré, et ainsi de suite jusqu'au dernier, qu'on ne peut faire évanouir qu'en posant l'équation

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots\ldots + U = 0,$$

absolument semblable à la proposée.

La raison de cette ressemblance est aisée à découvrir. Égaler à zéro le dernier terme de l'équation en y, c'est supposer que l'une des valeurs de cette inconnue est zéro; et si l'on fait cette hypothèse dans l'équation $x = y + a$, il en résulte $x = a$; c'est-à-dire que dans ce cas la quantité a est nécessairement une des valeurs de x.

210. On a quelquefois besoin de décomposer une équation en facteurs d'un degré supérieur au premier; je ne saurais exposer ici en détail les divers procédés que l'on peut employer à cet effet; je donnerai seulement un exemple de cette recherche.

Soit l'équation

$$x^5 - 24x^3 + 12x^2 - 11x + 7 = 0,$$

dont il faut déterminer les facteurs du troisième degré; je représente l'un de ces facteurs par

$$x^3 + px^2 + qx + r;$$

les coefficiens p, q et r étant indéterminés. Ils doivent être tels, que le premier membre de l'équation proposée soit exactement divisible par le facteur

$$x^3 + px^2 + qx + r,$$

indépendamment d'aucune valeur de x; mais en faisant actuellement la division, on trouve pour reste,

$$-(p^3 - 2pq - 24p + r - 12)x^2$$
$$-(p^2q - pr - q^2 - 24q + 11)x$$
$$-(p^2r - qr - 24r - 7),$$

expression qui s'annullerait d'elle-même, et indépendamment de x, si l'on y mettait pour les lettres p, q, et r, les valeurs qui conviennent à l'état de la question: on aurait donc alors

$$p^3 - 2pq - 24p + r - 12 = 0,$$
$$p^2q - pr - q^2 - 24q + 11 = 0,$$
$$p^2r - qr - 24r - 7 = 0.$$

Ces trois équations renferment les conditions nécessaires pour déterminer les inconnues p, q, et r; et c'est à leur résolution que se réduit la question proposée.

De la résolution par approximation des équations numériques.

211. Après avoir épuisé la recherche des diviseurs commensurables, il faut recourir aux méthodes d'approximation, qui reposent sur le principe suivant:

Lorsqu'on a trouvé deux quantités qui, substituées dans une équation à la place de l'inconnue, donnent deux résultats de signes contraires, on doit en conclure

qu'une des racines de l'équation proposée est comprise entre ces deux quantités, et est par conséquent réelle.

Soit, pour exemple, l'équation

$$x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = 0;$$

si l'on substitue successivement 2 et 20 à la place de x, le premier membre, au lieu de se réduire à zéro, devient égal à -31 dans le premier cas, à $+2939$ dans le second, et il suit de là que cette équation a une racine réelle comprise entre 2 et 20, c'est-à-dire, plus grande que 2 et moindre que 20.

Comme j'aurai souvent besoin d'exprimer cette relation, j'emploierai les signes $>$ et $<$ dont se servent les algébristes pour marquer l'inégalité de deux grandeurs, en plaçant la plus grande des deux quantités devant l'ouverture du signe, et l'autre à la pointe. J'écrirai, en conséquence,

$x > 2$, pour x plus grand que 2,
$x < 20$, pour x plus petit que 20.

Cela posé, pour prouver l'assertion précédente, on peut raisonner comme il suit. En réunissant d'un côté les termes positifs de l'équation proposée, et de l'autre les termes négatifs, on a

$$x^3 + 7x - (13x^2 + 1),$$

quantité qui s'est trouvée négative lorsqu'on a fait $x = 2$, parce que, dans cette hypothèse,

$$x^3 + 7x < 13x^2 + 1,$$

et qui est devenue positive lorsqu'on a fait $x = 20$, parce qu'alors

$$x^3 + 7x > 13x^2 + 1;$$

de plus il est visible que les quantités

$$x^3 + 7x \quad \text{et} \quad 13x^2 + 1$$

augmentent toutes deux, lorsqu'on donne à x des valeurs de plus en plus grandes, et qu'en prenant ces valeurs aussi proches les unes des autres qu'on voudra, on pourra faire croître les quantités proposées par des degrés de telle petitesse qu'on le jugera à propos. Mais puisque la première des quantités ci-dessus, d'abord plus petite que la seconde, est devenue ensuite plus grande, il est évident qu'elle a un accroissement plus rapide que l'autre, au moyen duquel elle compense l'excès que cette dernière avait sur elle, et la dépasse ensuite : il y a donc un moment où ces deux quantités sont égales.

La valeur de x, quelle qu'elle soit (mais dont l'existence vient d'être prouvée), qui rend

$$x^3+7x=13x^2+1,$$

donnant

$$x^3+7x-(13x^2+1)=0,$$

ou

$$x^3-13x^2+7x-1=0,$$

est nécessairement la racine de l'équation proposée.

Ce qu'on vient de voir sur l'équation particulière

$$x^3-13x^2+7x-1=0,$$

peut s'appliquer à une équation quelconque, dont je désignerai la somme des termes positifs par P, et celle des termes négatifs par N. Soit a la valeur de x qui a donné un résultat négatif, et b celle qui en a donné un positif; ces deux circonstances n'ont pu avoir lieu que parce que, par la première substitution, on avait $P<N$, et par la seconde $P>N$: P ayant donc dépassé N, on en conclura, comme ci-dessus, qu'il existe une valeur de x comprise entre a et b, qui donne $P=N$. (*)

(*) Les raisonnemens ci-dessus, regardés en général comme assez évidens, ont reçu de M. Encontre des développemens utiles, que

Le raisonnement ci-dessus exige que les valeurs qu'on donne à x soient toutes deux positives ou toutes deux négatives; car lorsqu'elles ont des signes différens, celle qui est négative fait changer de signe les termes de l'équation proposée, qui contiennent des puissances impaires de x, et par conséquent les expressions P et N ne sont pas composées de la même manière dans une substitution et dans l'autre. Cette difficulté disparaît en faisant $x = 0$; par là l'équation proposée se réduit à son dernier terme, qui se trouve nécessairement de signe contraire à celui du résultat de la première ou de la seconde substitution. Soit, par exemple, l'équation

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 15x - 3 = 0,$$

dont le premier membre, lorsqu'on y fait

---

je crois devoir rapporter ici pour les lecteurs qui désireraient des preuves plus détaillées.

1°. Voici comment on peut s'assurer de la possibilité de faire prendre des accroissemens aussi petits qu'on le voudra, aux polynomes P et N. Soit $P = ax^m + Cx^n \ldots + dx^r$, m étant le plus haut exposant de x; si l'on y met $a + y$ au lieu de x, ce polynome prendra la forme

$$A + By + Cy^2 \ldots + Ty^m,$$

les coefficiens A, B, C,...T, étant en nombre fini et de valeur finie; le premier terme A sera la valeur que prend le polynome P, lorsque $x = a$; le reste

$$By + Cy^2 \ldots + Ty^m = y(B + Cy \ldots + Ty^{m-1})$$

sera la quantité dont ce même polynome s'accroît quand on augmente de y la valeur $x = a$. Cela posé, si S désigne le plus grand des coefficiens B, C,... T, on aura

$$B + Cy \ldots + Ty^{m-1} < S(1 + y \ldots + y^{m-1});$$

or

$$1 + y \ldots + y^{m-1} = \frac{1 - y^m}{1 - y} \text{ (158)};$$

donc

$$(B + Cy \ldots + Ty^{m-1}) < Sy \frac{(1 - y^m)}{1 - y},$$

$$x=-1 \quad \text{et} \quad x=2,$$

devient $+12$ et -45. En supposant $x=0$, il se réduit à -3; les deux substitutions

$$x=0 \quad \text{et} \quad x=-1$$

donnent donc deux résultats de signes contraires; mais en mettant $-y$ au lieu de x, l'équation proposée se change en

$$y^4+2y^3-3y^2+15y-3=0,$$

et l'on a

$$P=y^4+2y^3+15y, \quad N=3y^2+3,$$

d'où

---

et par conséquent l'accroissemet du polynome P sera plus petit qu'une quantité donnée quelconque c, si l'on rend $\frac{Sy(1-y^m)}{1-y}$ moindre que cette quantité : or c'est à quoi l'on parviendra en faisant $\frac{Sy}{1-y}=c$, parce qu'alors, $y=\frac{c}{S+c}$, étant <1, la quantité $\frac{Sy(1-y^m)}{1-y}$, égale à $\frac{Sy}{1-y}-\frac{Sy^{m+1}}{1-y}$, sera nécessairement moindre que la quantité c, dont rien ne limite la petitesse.

2°. Si l'on désigne par h l'accroissement du polynome P, par k celui du polynome N, le changement qui en résultera dans la valeur de leur différence sera $h-k$, et pourra être rendu plus petit qu'une quantité donnée, en rendant plus petit que cette même quantité, l'accroissement qui est le plus grand des deux : on pourra donc, dans l'intervalle de $x=a$ à $x=b$, faire changer par des quantités aussi petites qu'on voudra, la différence des polynomes P et N; et puisqu'elle passe du négatif au positif dans cet intervalle, elle s'approchera nécessairement de zéro d'aussi près qu'on voudra (Voyez les *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, publiées par M. Gergonne, T. IV, pag. 210.)

$$P < N, \text{ lorsque } y = 0,$$
$$P > N, \text{ lorsque } y = 1.$$

On peut donc raisonner dans le cas actuel comme dans le précédent, et en conclure que l'équation en y a une racine réelle comprise entre 0 et $+1$; d'où il suit que celle de l'équation en x se trouve entre 0 et -1, et par conséquent entre $+2$ et -1.

La proposition que j'ai énoncée ne pouvant présenter que des cas qui rentrent dans l'un ou l'autre de ceux que je viens d'examiner, est suffisamment prouvée.

212. Avant d'aller plus loin, je ferai remarquer que, *quels que soient le degré d'une équation et ses coefficiens, on peut toujours assigner un nombre qui, substitué à l'inconnue, rende le premier terme supérieur à la somme de tous les autres.* On sent d'abord la vérité de cette assertion, pour peu qu'on ait observé la marche que suivent les accroissemens des diverses puissances d'un nombre plus grand que l'unité (126), puisque parmi ces puissances, la plus élevée surpasse d'autant plus celles qui lui sont inférieures, que le nombre dont il s'agit est plus considérable, en sorte que rien ne limite l'excès de la première sur chacune des autres; de plus, voici comment on peut trouver un nombre qui remplisse la condition énoncée.

Il est visible que le cas le plus défavorable serait celui où l'on rendrait tous les coefficiens de l'équation égaux au plus grand, c'est-à-dire, si au lieu de

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots + Tx + U = 0,$$

on prenait

$$x^m + Sx^{m-1} + Sx^{m-2} \ldots + Sx + S = 0,$$

S désignant le plus fort des coefficiens $P, Q, \ldots T, U$. La différence entre le premier terme et la somme de

tous les autres étant alors

$$x^m - S(x^{m-1} + x^{m-2} \ldots + 1),$$

on remarquera que

$$x^{m-1} + x^{m-2} \ldots + 1 = \frac{x^m - 1}{x - 1} \quad (158),$$

et par cette expression, on changera la précédente en

$$x^m - \frac{S(x^m - 1)}{x - 1}, \text{ ou en } x^m - \frac{S\,x^m}{x-1} + \frac{S}{x-1}.$$

Si l'on met ensuite M au lieu de x, il viendra

$$M^m - \frac{S\,M^m}{M-1} + \frac{S}{M-1},$$

quantité qu'on rendra positive, si l'on fait

$$M^m = \frac{S\,M^m}{M-1};$$

car si l'on divise chaque membre de cette équation par M^m, on aura

$$1 = \frac{S}{M-1}, \quad \text{d'où } M = S + 1.$$

En substituant donc au lieu de x le plus grand des coefficiens de l'équation, augmenté de l'unité, on rendra le premier terme plus fort que la somme de tous les autres; et par conséquent son signe déterminera celui du résultat de la substitution.

Le nombre M pourrait être plus petit, si l'on ne voulait que rendre la partie positive de l'équation proposée plus grande que la partie négative; car il suffirait, pour cela, de rendre le premier terme supérieur à la somme que donneraient tous les autres, quand même leurs coefficiens seraient égaux, non pas au plus grand de tous, mais seulement au plus grand des

coefficiens négatifs : on n'aurait donc qu'à prendre pour M ce coefficient augmenté de l'unité (*).

Il suit de là que les racines positives de l'équation proposée sont nécessairement comprises entre o et $S+1$.

On peut aussi découvrir par le même moyen une limite des racines négatives; il faut pour cela substituer $-y$ au lieu de x, dans l'équation proposée, et faire ensorte de rendre le premier terme positif, s'il devient négatif (178). Il est évident, par cette transformation, que les valeurs positives de y répondent aux valeurs négatives de x, et réciproquement. Si R est le plus grand coefficient négatif après ce changement, $R+1$ sera une limite des valeurs positives de y; par conséquent $-R-1$ sera celle des valeurs négatives de x.

Enfin si l'on voulait obtenir pour la plus petite des racines une limite plus approchante que zéro, on y parviendrait en substituant $\frac{1}{y}$ à la place de x dans l'équation proposée, et en préparant la transformée en y, comme on l'a prescrit dans le n° 178. Les valeurs de y étant inverses de celles de x, la plus grande des premières correspondrait à la plus petite des secondes, et réciproquement. Si donc $S'+1$ désignait la limite supérieure des valeurs de y, ou qu'on eût

$$y < S'+1,$$

ce qui donnerait

(*) On trouve dans la *Résolution des équations numériques* par Lagrange, des formules qui donnent des limites plus resserrées; mais ce que j'ai dit ci-dessus suffit pour rendre indépendantes de la considération de l'infini, les propositions fondamentales de la résolution des équations.

$$\frac{1}{x} < S' + 1,$$

il en résulterait successivement

$$1 < (S' + 1)\,x, \quad \frac{1}{S' + 1} < x.$$

En effet, il est facile de voir qu'on peut, sans troubler l'ordre de grandeur de deux quantités séparées par des signes $<$ et $>$, les multiplier ou les diviser par une même quantité, et qu'on peut aussi ajouter ou soustraire la même quantité de chaque côté de ces signes, qui jouissent à cet égard des mêmes propriétés que le signe d'égalité.

213. Il suit de ce qui précède, que *toute équation de degré impair a nécessairement une racine réelle d'un signe contraire à celui de son dernier terme ;* car si l'on prend le nombre M tel, que le signe de la quantité

$$M^m + P\,M^{m-1} + Q\,M^{m-2} \ldots\ldots + TM \pm U$$

ne dépende que de celui de son premier terme M^m, l'exposant m étant impair, le terme M^m sera de même signe que le nombre M (128). Cela posé, si le dernier terme U a le signe $+$, et qu'on fasse $x = -M$, on aura un résultat de signe contraire à celui que donne la supposition de $x = 0$; d'où l'on voit que la proposée a une racine entre 0 et $-M$, c'est-à-dire négative. Si le dernier terme U a le signe $-$, on fait alors $x = +M$; il vient un résultat de signe contraire à celui qui correspond à la supposition de $x = 0$; et dans ce cas, la racine se trouve entre 0 et $+M$, c'est-à-dire positive.

214. Lorsque l'équation proposée est d'un degré pair, le premier terme M^m restant positif, quelque signe qu'on donne à M, on ne peut s'assurer, par ce qui précède, de l'existence d'une racine réelle, si le dernier

terme a le signe +, puisque, soit qu'on fasse $x = 0$, ou $x = \pm M$, on a toujours un résultat positif; mais quand ce terme est négatif, on trouve, en faisant

$$x = +M, \quad x = 0, \quad x = -M,$$

trois résultats affectés respectivement des signes +, — et +, et par conséquent l'équation proposée a au moins deux racines réelles dans ce cas, l'une positive, comprise entre M et 0, l'autre négative, comprise entre 0 et $-M$: donc *toute équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative.*

215. Je viens maintenant à la résolution des équations par approximation, et afin de rendre plus clair ce que j'ai à dire sur ce sujet, je prends d'abord un exemple. Soit l'équation

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 27 = 0;$$

son plus grand coefficient négatif étant -4, il suit du n° 212 que sa plus grande racine positive sera moindre que 5. En y substituant $-y$ au lieu de x, elle devient

$$y^4 + 4y^3 + 3y + 27 = 0;$$

et ce résultat ayant tous ses termes positifs, montre que y doit être négatif, d'où il suit que x est nécessairement positif, et que l'équation proposée ne saurait avoir de racines négatives : les racines réelles sont donc comprises entre 0 et +5.

La première méthode qui se présente pour parvenir à des limites plus approchées, consiste à supposer successivement

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3, \quad x = 4;$$

et si deux de ces nombres, substitués dans l'équation

proposée, donnent des résultats de signes contraires, ils seront de nouvelles limites des racines. Or, en faisant

$x = 1$, son premier membre devient $+ 21$;
$x = 2$ ..... $+ 5$;
$x = 3$ ..... $- 9$,
$x = 4$ ..... $+ 15$;

on voit donc que cette équation a deux racines réelles, l'une comprise entre 2 et 3, et l'autre entre 3 et 4. Pour approcher encore plus de la première, on prendra le milieu entre les deux nombres qui la renferment, ce qui donnera 2,5 (*Arithm.* 129); on supposera ensuite $x = 2,5$: le résultat de cette substitution, qui est

$$+ 39,0625 - 62,5 - 7,5 + 27 = - 3,9375,$$

fait voir, puisqu'il est négatif, que la racine cherchée est entre 2 et 2,5. Prenant le milieu de ces deux nombres, il viendra 2,25; en se bornant à $x = 2,3$, on aura la racine cherchée, à moins d'un dixième près de sa valeur, et on en approchera très rapidement par le procédé suivant, dû à Newton.

On fera $x = 2,3 + y$; il est évident que l'inconnue y ne sera qu'une petite fraction dont on pourra négliger le quarré et les puissances supérieures : on aura de cette manière

$$\begin{aligned} x^4 &= (2,3)^4 + 4(2,3)^3 y, \\ - 4x^3 &= - 4(2,3)^3 - 12(2,3)^2 y, \\ - 3x &= - 3(2,3) - 3y; \end{aligned}$$

par ces substitutions, l'équation proposée deviendra

$$- 0,5839 - 17,812 y = 0,$$

et donnera

$$y = -\frac{0,5839}{17,812}.$$

Dans cette première opération, on n'ira pas au-delà des centièmes; et il en résultera

$$y = -0,03 \text{ et } x = 2,3 - 0,03 = 2,27.$$

Pour obtenir une nouvelle valeur de x plus exacte que la précédente, on supposera $x = 2,27 + y'$; et en substituant dans l'équation proposée, on ne tiendra compte que des premières puissances de y': On trouvera

$$-0,04595359 - 18,046468y' = 0,$$

d'où

$$y' = -\frac{0,04595359}{18,046468} = -0,0025,$$

et par conséquent $x = 2,2675$. On peut, en continuant ce procédé, approcher aussi près qu'on voudra de la vraie valeur de x.

La seconde racine réelle, comprise entre 3 et 4, calculée de cette manière, sera

$$x = 3,6797,$$

en s'arrêtant à la quatrième décimale.

216. On appréciera l'exactitude de la méthode que je viens d'exposer, en cherchant la limite des valeurs des termes qu'on néglige.

Si l'équation proposée était

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots\ldots + Tx + U = 0,$$

la substitution de $a + y$, au lieu de x, donnerait pour résultat le premier de ceux que j'ai trouvés dans le n° 204, parce que a n'étant pas la racine de l'équation, mais seulement une valeur approchée de x, ne rend pas nulle la quantité

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots\ldots + Ta + U.$$

En représentant cette dernière par V, on aura, au lieu de l'équation (d) du n° cité, la suivante,

$$V+\frac{A}{1}y+\frac{B}{1.2}y^2+\frac{C}{1.2.3}y^3\ldots\ldots+y^m=0,$$

de laquelle on tirera

$$Ay=-V-\frac{B}{1.2}y^2-\frac{C}{1.2.3}y^3\ldots\ldots-y^m,$$

$$y=-\frac{V}{A}-\frac{By^2}{1.2A}-\frac{Cy^3}{1.2.3A}\ldots\ldots-\frac{y^m}{A}.$$

En négligeant les puissances de y, supérieures à la première, on s'arrête à

$$y=-\frac{V}{A},$$

et l'erreur est

$$-\frac{By^2}{1.2A}-\frac{Cy^3}{1.2.3A}\ldots\ldots-\frac{y^m}{A}.$$

Si a ne diffère de la vraie valeur de x que d'une quantité moindre que $\frac{1}{p}a$, l'erreur ci-dessus deviendra moindre que le nombre qu'on obtiendrait en y mettant $\frac{1}{p}a$ au lieu de y, ce qui donnerait

$$-\frac{B}{1.2A}\left(\frac{a}{p}\right)^2-\frac{C}{1.2.3A}\left(\frac{a}{p}\right)^3\ldots\ldots-\frac{1}{A}\left(\frac{a}{p}\right)^m.$$

En calculant cette quantité, on s'assurera si elle peut être négligée vis-à-vis de $\frac{V}{A}$; et si on la trouvait trop considérable pour cela, il faudrait chercher pour a un nombre plus près de la vraie valeur de x.

Au reste, lorsqu'on a calculé plusieurs des nombres y, y', y'', etc., et que les résultats obtenus forment une suite décroissante, l'approximation ne saurait être douteuse.

217. La méthode dont je viens de faire usage, est connue sous le nom de *Méthode des Substitutions successives*. Lagrange l'a considérablement perfectionnée. (Voyez la *Résolution des Équations numériques*.) Il a d'abord remarqué qu'en ne substituant que des nombres entiers, on pouvait passer au-delà de plusieurs racines sans les apercevoir. En effet, si l'on avait, par exemple, l'équation

$$(x-\tfrac{1}{3})(x-\tfrac{1}{2})(x-3)(x-4)=0,$$

et qu'on substituât au lieu de x, les nombres 0, 1, 2, 3, etc., on passerait au-delà des racines $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ sans en reconnaître l'existence, car on aurait

$$(0-\tfrac{1}{3})(0-\tfrac{1}{2})(0-3)(0-4)=+\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\times 3\times 4,$$
$$(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{2})(1-3)(1-4)=+\tfrac{2}{3}\times\tfrac{1}{2}\times 2\times 3,$$

résultats de même signe. Il est facile de voir que cette circonstance tient à ce que la substitution de 1 au lieu de x, fait changer en même temps de signe aux deux facteurs $x-\frac{1}{3}$ et $x-\frac{1}{2}$, qui, de négatifs qu'ils étaient lorsqu'on mettait 0 à la place de x, deviennent tous deux positifs; mais si l'on eût remplacé x par un nombre compris entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$, le facteur $x-\frac{1}{3}$ seul aurait changé de signe, et on aurait obtenu un résultat négatif.

On tombera nécessairement sur un pareil nombre en substituant, au lieu de x, des nombres dont la différence soit moindre que celle des racines $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$. Si par exemple on fait les substitutions $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, etc., on trouvera deux changemens de signe.

On pourrait objecter à l'exemple ci-dessus, que lorsqu'on a fait disparaître les coefficiens fractionnaires d'une équation, elle ne peut avoir pour racines que des nombres entiers ou irrationnels, et non pas des fractions; mais il est facile de voir que les nombres irrationnels, qu'on a remplacés ici par des fractions, pour plus de simplicité, peuvent différer de moins que l'unité.

En général, les résultats seront de même signe toutes les fois que les substitutions changeront le signe d'un nombre pair de facteurs (*). Pour obvier à cet inconvénient, il faut mettre entre les nombres à substituer, depuis la plus petite limite jusqu'à la plus grande, une différence moindre que la plus petite des différences que peuvent avoir entre elles les racines réelles de l'équation proposée; par ce moyen les substitutions tomberont nécessairement entre les racines consécutives, et ne feront changer de signe qu'à un seul facteur (**). Cette opération n'exige pas qu'on connaisse la plus petite différence des racines réelles, mais seulement qu'on ait une limite au-dessous de laquelle elle ne saurait tomber.

Pour se procurer cette limite, on formera l'équation au quarré des différences des racines (208).

Soit

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} \ldots + tz + u = 0 \ldots (D),$$

cette équation; pour obtenir la plus petite limite de ses racines, on fera $z = \frac{1}{x}$ (212), et il viendra

(*) Il n'est donc pas possible de découvrir par ce procédé les racines égales, lorsqu'elles sont en nombre pair; mais alors on emploie celui du n° 205.

(**) On ne tient pas compte ici des racines imaginaires, parce qu'elles sont toujours en nombre pair et se groupent, deux à deux, en facteurs réels du second degré, qui ne changent point de signe quelque valeur qu'on donne à x. (Voy. le *Complément*.)

$$\frac{1}{v^n} + p\frac{1}{v^{n-1}} + q\frac{1}{v^{n-2}} \ldots + t\frac{1}{v} + u = 0,$$

ou, en réduisant tous les termes au même dénominateur,

$$1 + pv + qv^2 \ldots + tv^{n-1} + uv^n = 0,$$

puis, en dégageant v^n,

$$v^n + \frac{t}{u}v^{n-1} \ldots + \frac{q}{u}v^2 + \frac{p}{u}v + \frac{1}{u} = 0;$$

et si $\frac{r}{u}$ désigne le plus grand coefficient négatif de cette équation, on aura

$$\sqrt{\frac{r}{u} + 1}$$

Il ne faut considérer ici que la limite positive, la seule qui se rapporte aux racines réelles de la proposée.

Connaissant la limite

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{u} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{r + u}},$$

moindre que le quarré de la plus petite différence des racines de la proposée, on en extraira la racine quarrée, ou du moins on prendra le nombre rationnel immédiatement au-dessous de cette racine; ce nombre, que je désignerai par k, marquera l'intervalle qu'il faudra mettre entre chacun des nombres à substituer. On formera ainsi les deux suites

$$0, +k, +2k, +3k, \text{ etc.},$$
$$-k, -2k, -3k, \text{ etc.},$$

desquelles on ne prendra que les termes compris entre les limites de la plus petite et de la plus grande des racines positives, et entre celles de la plus petite et de la plus grande des racines négatives de l'équation proposée. Les changemens de signe qu'offrira la série des résultats obtenus par la substitution de chacun de ces nombres à la place de x, dans l'équation proposée, manifesteront ses diverses racines réelles, soit positives, soit négatives.

218. Soit pour exemple l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

qui m'a conduit, dans le n° 208, à l'équation

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0;$$

en faisant $z = \frac{1}{v}$, et en ordonnant, par rapport à v, le résultat de cette substitution, on a

$$v^3 - 9v^2 + \frac{42}{49}v - \frac{1}{49} = 0,$$

d'où l'on tire

$$v < 10, \; z > \frac{1}{10};$$

il faudra donc prendre $k =$ ou $< \frac{1}{\sqrt{10}}$. On satisferait à cette condition en prenant $k = \frac{1}{4}$; mais il suffit de supposer $k = \frac{1}{3}$; car en mettant 9 à la place de v, dans l'équation précédente, on obtient un résultat positif, et qui ne peut devenir que plus grand lorsqu'on donnera à v une valeur plus considérable, puisque les termes v^3 et $9v^2$ se détruisent déjà, et que $\frac{42}{49}v$ l'emporte sur $\frac{1}{49}$.

La plus grande limite des racines positives de l'équation proposée

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

est 8, et celle des racines négatives est -8; on aura donc à substituer pour x les nombres

$$0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{3},\ \ldots\ldots\ \frac{24}{3},$$

$$-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{3}{3},-\frac{4}{3},\ \ldots\ldots\ -\frac{24}{3}.$$

On peut éviter les fractions en faisant $x=\frac{x'}{3}$; car alors les différences entre les valeurs de x', seront triples de celles qui se trouvent entre les valeurs de x, et surpasseront par conséquent l'unité : il n'y aura plus qu'à substituer successivement

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ 24,$$

$$-1,-2,-3,\ \ldots\ldots\ -24,$$

dans l'équation

$$x'^3-63x'+189=0.$$

Les signes des résultats changeront de $+4$ à $+5$, de $+5$ à $+6$, et de -9 à -10, en sorte qu'on aura les valeurs positives

$$\left.\begin{array}{l} x'>4 \text{ et } <5 \\ x'>5 \text{ et } <6 \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} x>\frac{4}{3} \text{ et } <\frac{5}{3}, \\ x>\frac{5}{3} \text{ et } <\frac{6}{3}, \end{array}\right.$$

et la valeur négative de x' tombant entre -9 et -10, celle de x sera entre $-\frac{9}{3}$ et $-\frac{10}{3}$.

Connaissant maintenant les diverses racines de l'équation proposée, à moins de $\frac{1}{3}$ près, on pourrait en approcher davantage, comme dans le numéro 215.

219. Ce qu'on a pratiqué sur l'exemple du n° 215 et sur celui du numéro précédent, s'appliquera à une équation d'un degré quelconque, et fera connaître les valeurs approchées de toutes les racines réelles de cette équa-

tion. On ne saurait disconvenir néanmoins que le calcul ne devienne pénible, lorsque l'équation proposée s'élève un peu haut; mais dans beaucoup de cas il ne sera pas nécessaire d'avoir recours à l'équation (*D*), ou bien on y suppléera par des moyens que l'étude des branches ultérieures de l'Analyse fera connaître (*).

Je ferai remarquer cependant que les substitutions successives des nombres 0, 1, 2, 3, etc. à la place de x, offrent souvent des indices suffisans pour faire soupçonner l'existence des racines dont la différence est moindre que l'unité. Dans l'exemple qui m'occupe, elles donnent les résultats

$$+7,\quad +1,\quad +1,\quad +13,$$

qui redeviennent croissans après avoir décru de $+7$ à $+1$. Cette marche rétrograde porte naturellement à croire qu'entre les deux nombres $+1$ et $+2$, il tombe deux racines, ou égales, ou presque égales. Pour vérifier ce soupçon, il faut multiplier l'inconnue. En faisant $x = \frac{y}{10}$, on trouve

$$y^3 - 700y + 7000 = 0,$$

équation qui a deux racines positives, l'une entre 13 et 14, et l'autre entre 16 et 17.

Le nombre des tâtonnemens nécessaires pour découvrir ces racines, n'est pas très grand; car ce n'est qu'en-

(*) On peut voir aussi dans le *Traité de la Résolution des Équations numériques*, une méthode très élégante donnée par Lagrange, pour éviter l'emploi de l'équation (*D*).

D'autres géomètres ont encore enrichi ce sujet de procédés ingénieux, mais qui ne me paraissent pas non plus devoir entrer dans les élémens. Ce n'est que parce qu'elles complètent la théorie des équations, que les considérations ci-dessus ont quelque importance. Presque jamais l'application du calcul à la Mécanique et à la Physique ne mène à résoudre des équations d'un degré élevé.

tre 10 et 20 qu'il faut chercher y ; et les valeurs de cette inconnue étant déterminées en nombres entiers, on en conclut celles de x, à un dixième d'unité près.

220. Lorsque les coefficiens de l'équation que l'on se propose de résoudre, sont des nombres très considérables, il est commode de la transformer en une autre dont les coefficiens soient resserrés dans des limites plus étroites. Si l'on avait, par exemple,

$$x^4 - 80x^3 + 1998x^2 - 14937x + 5000 = 0,$$

on ferait $x = 10z$; il viendrait

$$z^4 - 8z^3 + 19{,}98z^2 - 14{,}937z + 0{,}5 = 0.$$

Dans ce résultat, on se contenterait d'abord de prendre les nombres entiers qui approchent le plus des coefficiens, et l'on aurait ainsi

$$z^4 - 8z^3 + 20z^2 - 15z + 0{,}5 = 0.$$

On trouverait sans peine que z a deux valeurs réelles comprises entre 0 et 1, entre 1 et 2, d'où il suit que celles de la proposée sont entre 0 et 10, et entre 10 et 20 ; mais on ne doit regarder ceci que comme une indication qu'il faut vérifier ; car il peut arriver qu'un petit changement dans les coefficiens d'une équation rende imaginaires des racines qui étaient d'abord réelles, et réciproquement.

Je ne parlerai point ici de la recherche des racines imaginaires, parce qu'elle repose sur des principes dont l'exposition me mènerait trop loin ; je la renvoie au *Complément* de ce Traité.

221. Lagrange a donné aux substitutions successives une forme qui a l'avantage de faire connaître immédiatement à chaque opération de combien on s'est approché de la vraie racine, et qui n'exige pas qu'on en ait d'abord la valeur à moins d'un dixième près.

Je représente par a le nombre entier immédiatement

au-dessous de la racine cherchée ; il ne faudra, pour obtenir cette racine, qu'augmenter a d'une fraction : on aura donc $x = a + \frac{1}{y}$. L'équation en y qui résultera de la substitution de cette valeur dans la proposée, aura nécessairement une racine plus grande que l'unité; nommant b le nombre entier immédiatement au-dessous de cette racine, il viendra pour seconde approximation $x = a + \frac{1}{b}$.

Mais b n'étant, par rapport à y, que ce qu'est a par rapport à x, on pourra, dans l'équation en y, faire $y = b + \frac{1}{y'}$, et y' sera nécessairement plus grand que l'unité ; nommant b' le nombre entier immédiatement au-dessous de la racine de l'équation en y', on aura

$$y = b + \frac{1}{b'} = \frac{b\,b' + 1}{b'} :$$

remettant cette valeur dans celle de x, il en résultera

$$x = a + \frac{b'}{b\,b' + 1},$$

pour la troisième valeur approchée de x. On en trouvera une quatrième en faisant $y' = b' + \frac{1}{y''}$; car si b'' désigne le nombre entier immédiatement au-dessous de y'', on aura

$$y' = b' + \frac{1}{b''} = \frac{b'\,b'' + 1}{b''},$$

d'où

$$y = b + \frac{b''}{b'\,b'' + 1} = \frac{b\,b'\,b'' + b'' + b}{b'\,b'' + 1},$$

$$x = a + \frac{b'\,b'' + 1}{b\,b'\,b'' + b'' + b},$$

et ainsi de suite.

222. Je vais appliquer cette méthode à l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

On a déjà vu (218) que la plus petite des racines positives de cette équation était entre $\frac{4}{7}$ et $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, entre 1 et 2; je ferai donc $x = 1 + \frac{1}{y}$, et j'aurai

$$y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0.$$

La limite des racines positives de cette dernière est 5; et en substituant successivement 0, 1, 2, 3, 4, au lieu de y, on reconnaîtra bientôt qu'elle a deux racines plus grandes que l'unité, savoir, une entre 1 et 2, et l'autre entre 2 et 3: il en résultera donc

$$x = 1 + \frac{1}{1} \quad \text{et} \quad x = 1 + \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire,

$$x = 2 \quad \text{et} \quad x = \frac{3}{2}.$$

Ces deux valeurs correspondent à celles que j'ai trouvées entre $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$, entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$, et qui ne diffèrent pas d'une unité.

Pour porter plus loin le degré d'exactitude de la première, qui répond à $y = 1$, on fera

$$y = 1 + \frac{1}{y'},$$

et l'on aura

$$y'^3 - 2y'^2 - y' + 1 = 0.$$

On ne trouvera à cette équation qu'une seule racine plus grande que l'unité, et comprise entre 2 et 3, ce qui donnera

$$y' = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

d'où

$$x = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Supposant ensuite $y' = 2 + \frac{1}{y''}$, il en résultera

$$y''^3 - 3y''^2 - 4y'' - 1 = 0;$$

on trouvera y'' entre 4 et 5, et prenant la plus petite limite 4, il viendra

$$y' = 2 + \frac{1}{4}, \quad y = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}, \quad x = 1 + \frac{9}{13} = \frac{22}{13}.$$

Rien n'est plus facile que de poursuivre ce procédé, en faisant $y'' = 4 + \frac{1}{y'''}$, et ainsi de suite.

Je reviens maintenant à la seconde valeur de x, que j'ai trouvée égale à $\frac{3}{2}$, par une première approximation, et qui répond à $y = 2$, je fais $y = 2 + \frac{1}{y'}$, et je substitue dans l'équation en y; j'aurai, après avoir changé les signes pour rendre le premier terme positif,

$$y'^3 + y'^2 - 2y' - 1 = 0.$$

Cette équation n'aura, comme sa correspondante dans l'opération ci-dessus, qu'une racine qui surpasse l'unité, savoir, entre 1 et 2; et prenant $y' = 1$, il en résultera

$$y = 3, \qquad x = \frac{4}{3}.$$

Posant encore

$$y' = 1 + \frac{1}{y''},$$

il viendra

$$y''^3 - 3y''^2 - 4y'' - 1 = 0$$

équation qui donne y'' entre 4 et 5, et d'où il suit par conséquent

$$y' = \frac{5}{4}, \quad y = \frac{14}{5}, \qquad x = \frac{19}{14}.$$

Pour aller au-delà, on fera $y'' = 4 + \frac{1}{y'''}$, et ainsi de suite.

L'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$ a aussi une racine négative comprise entre -3 et -4. Pour en approcher

davantage, on fera $x = -3 - \frac{r}{y}$; ce qui donnera

$$y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0, \quad y > 20 \text{ et } < 21,$$

d'où il résultera

$$x = -3 - \frac{1}{20} = -\frac{61}{20}.$$

En poussant plus loin, on supposera $y = 20 + \frac{1}{y'}$, etc., et l'on obtiendra successivement des valeurs de plus en plus exactes.

Les différentes transformées en y, y', y'', etc. n'auront jamais qu'une racine plus grande que l'unité, tant que deux ou un plus grand nombre de racines de la proposée ne seront pas comprises entre les mêmes limites a et $a+1$; mais quand cette circonstance aura lieu, comme on l'a vu dans l'exemple ci-dessus, on trouvera dans quelques-unes des équations en y, y', etc. plusieurs valeurs plus grandes que l'unité, desquelles partiront les suites d'équations qui feront connaître en particulier les diverses racines que la proposée a entre les limites a et $a+1$.

Le lecteur pourra s'exercer encore sur l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

dont la racine réelle tombe entre 2 et 3; il trouvera pour les valeurs entières de y, y', etc.,

10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, etc.,

et pour les valeurs approchées de x,

$$\frac{2}{1}, \frac{21}{10}, \frac{23}{11}, \frac{44}{21}, \frac{111}{53}, \frac{155}{74}, \frac{576}{275}, \frac{731}{349}, \frac{1307}{624}, \frac{16415}{7837}.$$

Des proportions et des progressions.

223. On a vu dans l'Arithmétique, la définition et les propriétés fondamentales de la *proportion* et de l'*équidif-*

férence, c'est-à-dire, de ce qu'on appelait la *proportion géométrique* et la *proportion arithmétique*; j'appliquerai ici l'Algèbre à ces notions, et j'arriverai par ce moyen à quelques résultats qui sont d'un usage fréquent dans la Géométrie.

Je commencerai par faire observer que l'équidifférence et la proportion peuvent s'exprimer par des équations. Soient A, B, C, D, les quatre termes de la première, a, b, c, d, ceux de la seconde; on aura

$$B-A=D-C \text{ (Arithm. 127)}, \quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \text{ (Arithm. 111)},$$

équations qui doivent être regardées comme équivalentes aux expressions

$$A.B : C.D, \qquad a : b :: c : d,$$

et qui donnent

$$A+D=B+C, \qquad ad=bc.$$

Il suit de là que, *dans l'équidifférence, la somme des termes extrêmes égale celle des termes moyens*, et que *dans la proportion, le produit des termes extrêmes est égal à celui des termes moyens*, ainsi qu'on l'a vu dans l'Arithmétique (127, 113), par des raisonnemens dont les équations ci-dessus ne sont que la traduction.

Les propositions réciproques des précédentes se démontrent facilement; car, des équations

$$A+D=B+C, \qquad ad=bc,$$

on revient sur-le-champ à

$$B-A=D-C, \qquad \frac{b}{a}=\frac{d}{c},$$

et par conséquent, *lorsque quatre quantités sont telles, que deux d'entr'elles donnent la même somme ou le même produit que les deux autres, les premières sont les*

moyens et les secondes les extrêmes (ou réciproquement) d'une équidifférence ou d'une proportion.

Quand $B = C$, l'équidifférence est dite *continue;* il en est de même de la proportion quand $b = c$, et l'on a

$$A + D = 2B, \qquad ad = b^2,$$

c'est-à-dire que, *dans une équidifférence continue, la somme des extrêmes est égale au double du moyen*, et que, *dans une proportion continue, le produit des extrêmes est égal au quarré du moyen.* On tire de là

$$B = \frac{A+D}{2}, \qquad b = \sqrt{ad},$$

la quantité B est le *milieu* (ou la *moyenne proportionnelle arithmétique*) entre A et D, et la quantité b la *moyenne proportionnelle* (*géométrique*) entre a et d.

Les équations fondamentales

$$B - A = D - C, \qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

conduisent encore aux suivantes :

$$C - A = D - B, \qquad \frac{c}{a} = \frac{d}{b};$$

ce qui fait voir que l'on peut, dans les expressions $A.B::C.D$, $a:b::c:d$, changer les moyens de place, et en déduire $A.C::B.D$, $d:c::b:d$. En général, on pourra faire toutes les transpositions de termes qui s'accorderont avec les équations

$$A + D = B + C \text{ et } ad = bc \text{ (}Arithm.\text{ 114.)}$$

Je laisserai maintenant de côté l'équidifférence, pour ne m'occuper que de la proportion.

224. On peut, aux deux membres de l'équation $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, ajouter ou retrancher une même quantité m,

en sorte qu'on aura

$$\frac{b}{a} \pm m = \frac{d}{c} \pm m;$$

réduisant les termes de chaque membre au même dénominateur, il viendra

$$\frac{b \pm m\,a}{a} = \frac{d \pm m\,c}{c},$$

équation qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{c}{a} = \frac{d \pm m\,c}{b \pm m\,a},$$

et qui revient à cette proportion :

$$b \pm m\,a : d \pm m\,c :: a : c;$$

et comme $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$, on aura pareillement

$$\frac{d \pm m\,c}{b \pm m\,a} = \frac{d}{b}$$

ou $$b \pm m\,a : d \pm m\,c :: b : d.$$

Ces deux proportions peuvent s'énoncer ainsi : *Le premier conséquent, plus ou moins un certain nombre de fois son antécédent, est au second conséquent, plus ou moins le même nombre de fois son antécédent, comme le premier terme est au troisième, ou comme le second est au quatrième.*

En comparant séparément les sommes entre elles et les différences entre elles, on aura

$$\frac{d + m\,c}{b + m\,a} = \frac{c}{a}, \qquad \frac{d - m\,c}{b - m\,a} = \frac{c}{a},$$

d'où l'on conclura

$$\frac{d + m\,c}{b + m\,a} = \frac{d - m\,c}{b - m\,a},$$

c'est-à-dire,

$$b+ma : d+mc :: b-ma : d-mc,$$

ou bien, en changeant les moyens de place,

$$b+ma : b-ma :: d+mc : d-mc;$$

et si l'on fait $m=1$, on aura seulement

$$b+a : b-a :: d+c : d-c,$$

ce qui s'énonce ainsi :

La somme des deux premiers termes est à leur différence comme la somme des deux derniers est à leur différence.

225. La proportion $a : b :: c : d$ pouvant s'écrire ainsi,

$$a : c :: b : d,$$

on aura

$$\frac{c}{a} \pm m = \frac{d}{b} \pm m,$$

d'où

$$\frac{c \pm ma}{a} = \frac{d \pm mb}{b},$$

et enfin,

$$c \pm ma : d \pm mb :: a : b \text{ ou } :: c : d,$$

d'où il résulte que *le second antécédent, plus ou moins un certain nombre de fois le premier, est au second conséquent, plus ou moins le même nombre de fois le premier, comme l'un quelconque des antécédens est à son conséquent.*

Cette proposition peut aussi se conclure immédiatement de celle du numéro précédent; car en changeant de place les moyens dans la proportion primitive

$$a : b :: c : d,$$

puis en lui appliquant la proposition citée, on a successivement

$$a : c :: b : d,$$
$$c \pm ma : d \pm mb :: a : b \text{ ou } :: c : d,$$

et rendant pour cette dernière, aux lettres a, b, c, d, la dénomination qu'elles ont dans la proportion primitive, on a l'énoncé précédent.

Faisant $m = 1$, on en tirera les proportions particulières

$$c \pm a : d \pm b :: a : b$$
$$:: c : d,$$
$$c + a : c - a :: d + b : d - b;$$

ce qui veut dire que *la somme ou la différence des antécédens est à la somme ou à la différence des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent*, et que *la somme des antécédens est à leur différence comme celle des conséquens est à leur différence.*

En général, soit une suite de fractions égales,

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e} = \frac{h}{g} = \text{etc.};$$

et qu'on fasse $\frac{b}{a} = q$, on aura

$$\frac{d}{c} = q, \quad \frac{f}{e} = q, \quad \frac{h}{g} = q, \text{ etc.}$$

ce qui donnera

$$b = aq, \quad d = cq, \quad f = eq, \quad h = gq, \text{ etc.},$$

et en ajoutant ces équations membre à membre, il viendra

$$b + d + f + h + \text{etc.} = aq + cq + eq + gq + \text{etc.},$$

ou

$$b + d + f + h + \text{etc.} = q\,(a + c + e + g + \text{etc.}),$$

d'où il suit

$$\frac{b + d + f + h + \text{etc.}}{a + c + e + g + \text{etc.}} = q = \frac{b}{a}.$$

On énonce ce résultat en disant que *dans une suite de*

rapports égaux, $a : b :: c : d :: e : f :: g : h :: etc.$, *la somme d'un nombre quelconque d'antécédens est à la somme d'un pareil nombre de conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.*

226. Lorsqu'on a ces deux équations,

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \text{ et } \frac{f}{e} = \frac{h}{g},$$

on en peut multiplier les premiers membres entre eux, et les seconds entre eux, et il viendra

$$\frac{bf}{ae} = \frac{dh}{cg},$$

équation équivalente à la proportion

$$ae : bf :: cg : dh,$$

laquelle s'obtiendrait aussi en multipliant chaque terme de la proportion

$$a : b :: c : d,$$

par celui qui lui correspond dans la proportion

$$f :: g : h.$$

Deux proportions multipliées ainsi terme par terme, sont dites *multipliées par ordre*; et les produits qui en résultent sont, comme on le voit, en proportion : les nouveaux rapports sont les rapports *composés* des rapports primitifs (*Arith.* 123).

Il est aisé de se convaincre qu'on arriverait également à une proportion, en divisant deux proportions terme à terme, ou par *ordre*.

227. Lorsqu'on a

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

on en peut conclure que

$$\frac{b^m}{a^m} = \frac{d^m}{c^m},$$

ce qui donne

$$a^m : b^m :: c^m : d^m,$$

d'où il suit que *les quarrés, les cubes, et en général les puissances semblables de quatre quantités en proportion, sont aussi en proportion.*

La même chose aurait lieu pour des puissances fractionnaires, puisque

$$\sqrt[m]{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}},$$

et que

$$\sqrt[m]{\frac{d}{c}} = \frac{\sqrt[m]{d}}{\sqrt[m]{c}};$$

car il en résulte

$$\frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}} = \frac{\sqrt[m]{d}}{\sqrt[m]{c}},$$

ou

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d},$$

si $a : b :: c : d$, c'est-à-dire, *que les racines du même degré, de quatre quantités en proportion, sont elles-mêmes en proportion.*

Tels sont les principaux points de la théorie des proportions. Cette théorie n'a été inventée que pour découvrir des quantités, en les comparant avec d'autres. On a conservé pendant long-temps les noms latins attachés aux différens changemens ou transformations

que peut subir une proportion : on commence aujourd'hui à n'en plus charger la mémoire de ceux qui étudient les Mathématiques; et tout l'échafaudage des proportions deviendrait inutile, si on leur substituait les équations correspondantes, ce qui donnerait, je pense, plus d'uniformité aux méthodes, et plus de netteté aux idées.

228. Des proportions aux progressions le passage est facile. Ayant conçu, dans l'équidifférence continue, trois quantités, dont la dernière surpassait la seconde autant que celle-ci surpassait la première, on a bientôt imaginé de considérer un nombre indéfini de quantités, a, b, c, d, etc., telles que chacune d'elles surpassât celle qui la précède d'une même quantité δ, en sorte que

$$b=a+\delta,\ c=b+\delta,\ d=c+\delta,\ e=d+\delta,\ \text{etc.}$$

L'ensemble de ces quantités s'écrit ainsi,

$$\div a.b.c.d.e.f.\text{etc.},$$

et se nommait *progression arithmétique;* mais j'ai cru devoir changer ce nom en celui de *progression par différence.* (Voyez *Arith.*, note du n° 127.)

On peut calculer un terme quelconque de cette progression, sans le secours des intermédiaires. En effet, si l'on met pour b sa valeur dans celle de c, il en résultera

$$c=a+2\delta;$$

avec cette dernière on trouvera

$$d=a+3\delta,\ \text{puis}\ e=a+4\delta,$$

et ainsi de suite; d'où l'on voit qu'en nommant l le terme dont le rang serait marqué par n, on aurait

$$l=a+(n-1)\delta.$$

Soit, par exemple, la progression

$$\div 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 : 17, \text{ etc.};$$

ici le premier terme $a = 3$, la différence (ou la *raison*) $\delta = 2$; on trouvera pour le huitième terme,

$$3 + (8 - 1)\,2 = 17,$$

ainsi qu'on le conclut en calculant tous ceux qui le précèdent.

La progression que je viens de considérer était *croissante;* en l'écrivant dans un ordre inverse, tel que celui-ci :

$$\div 17 . 15 . 13 . 11 . 9 . 7 . 5 . 3 . 1 . -1 . -3, \text{ etc.},$$

elle serait *décroissante*. On en trouverait encore un terme quelconque au moyen de la formule $a + (n-1)\,\delta$, en observant que δ doit y être supposé négatif, puisque la différence doit alors se retrancher d'un terme quelconque pour obtenir le suivant.

229. On parvient aussi très simplement à connaître la somme d'un nombre quelconque de termes de la progression par différence. Cette progression étant représentée par

$$\div a . b . c \ldots\ldots\ldots\ldots i . k . l,$$

et S désignant la somme de tous ses termes, on aura

$$S = a + b + c \ldots\ldots\ldots + i + k + l.$$

En écrivant les termes du second membre de cette équation, dans un ordre inverse du précédent, on aura encore

$$S = l + k + i \ldots\ldots\ldots + b + c + a.$$

Si l'on ajoute ces équations, et qu'on réunisse les termes qui se correspondent, il viendra

$$2S = (a+l) + (b+k) + (c+i) \ldots\ldots + (i+c) + (k+b) + (l+a);$$

mais par la nature de la progression, on a, en partant du premier terme,

$$a+\delta=b,\ b+\delta=c,\ \ldots\ldots i+\delta=k,\ k+\delta=l,$$

et par conséquent, en partant du dernier,

$$l-\delta=k,\ k-\delta=i,\ \ldots\ldots c-\delta=b,\ b-\delta=a;$$

l'addition des équations correspondantes fait voir sur-le-champ que

$$a+l=b+k=c+i, \text{ etc.},$$

et que par conséquent

$$2S=n(a+l);$$

d'où il suit

$$S=\frac{n(a+l)}{2}.$$

En appliquant cette formule à la progression

$$\div 3.5.7.9. \text{ etc.},$$

on trouvera pour la somme des huit premiers termes,

$$\frac{(3+17)8}{2}=80.$$

230. L'équation

$$l=a+(n-1)\delta,$$

jointe à

$$S=\frac{(a+l)n}{2},$$

donne le moyen de trouver deux quelconques des cinq quantités a, δ, n, l et S, lorsqu'on connaît les trois autres; je ne m'arrêterai pas à traiter chacun des cas qui peuvent se présenter.

231. On a tiré de la proportion, la progression par *quotient* (ou la progression *géométrique*), qui consiste dans une suite de termes tels, que le quotient d'un

terme divisé par celui qui le précède, est le même, quelque part que soient pris ces deux termes. Les suites

$$\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : \text{etc.},$$
$$\div\ 45 : 15 : 5 : \tfrac{5}{3} : \tfrac{5}{9} : \text{etc.},$$

sont des progressions de ce genre; le quotient (ou la *raison*) est 3 dans l'une et $\frac{1}{3}$ dans l'autre : la première est croissante, et la seconde décroissante. Chacune de ces progressions forme une suite de rapports égaux, et c'est pour cela qu'on les écrit comme ci-dessus.

Soit

$$\div\ a : b : c : d : \ldots\ldots\ldots\ldots k : l,$$

une progression quelconque par quotient; en faisant $\frac{b}{a} = q$, j'aurai, par la nature de cette progression,

$$q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} \ldots = \frac{l}{k},$$

ou $b = aq$, $c = bq$, $d = cq$, $e = dq$, $\ldots l = kq$.

Mettant successivement la valeur de b dans celle de c, cette dernière dans celle de d, et ainsi des autres, il viendra

$$b = aq,\ c = aq^2,\ d = aq^3,\ e = aq^4, \ldots l = aq^{n-1},$$

en désignant par n le rang du terme l, ou le nombre des termes que l'on considère dans la progression proposée.

A l'aide de la formule $l = aq^{n-1}$, on peut calculer un terme quelconque sans passer par tous les intermédiaires. Le dixième terme de la progression

$$\div\ 2 : 6 : 18 : \text{etc.}$$

par exemple, est égal $2 \times 3^9 = 39366$.

232. On peut obtenir aussi la somme d'autant de termes qu'on voudra de la progression

$$a : b : c : d : \text{etc.},$$

en ajoutant entre elles les équations

$$b = aq,\ c = bq,\ d = cq,\ e = dq,\ \ldots\ l = kq;$$

car il en résultera

$$b + c + d + e \ldots + l = (a + b + c + d \ldots + k)\, q,$$

et, en nommant S la somme cherchée, on aura

$$b + c + d + e \ldots + l = S - a,$$
$$a + b + c + d \ldots + k = S - l,$$

d'où l'on conclura

$$S - a = q(S - l),$$

et par conséquent

$$S = \frac{ql - a}{q - 1}.$$

Dans l'exemple ci-dessus, on trouverait pour la somme des dix premiers termes de la progression

$$2 : 6 : 18 : \text{etc.},$$

$$\frac{2 \times 3^{10} - 2}{2} = 3^{10} - 1 = 59048.$$

233. Les deux équations

$$l = aq^{n-1},\quad S = \frac{ql - a}{q - 1},$$

renferment les relations que les cinq quantités a, q, n, l et S, doivent avoir entre elles dans la progression par quotient, et feront connaître deux quelconques de ces quantités, lorsque les trois autres seront données.

234. Si l'on substitue aq^{n-1} à la place de l, dans l'expression de S, il viendra

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Lorsque q surpassera l'unité, la quantité q^n sera d'autant plus grande, que le nombre n sera plus considérable; et S sera susceptible de surpasser telle quantité que l'on voudra, en donnant à n une valeur convenable, c'est-à-dire, en prenant un nombre suffisant de termes de la progression proposée. Mais si q est une fraction représentée par $\frac{1}{m}$, on aura

$$S = \frac{a\left(\frac{1}{m^n} - 1\right)}{\frac{1}{m} - 1} = \frac{am\left(1 - \frac{1}{m^n}\right)}{m-1} = \frac{am - \frac{a}{m^{n-1}}}{m-1};$$

et il est évident que plus le nombre n deviendra grand, plus le terme $\frac{a}{m^{n-1}}$ deviendra petit, et plus par conséquent la valeur de S approchera de la quantité $\frac{am}{m-1}$, dont elle ne diffère que de

$$\frac{a}{(m-1)\,m^{n-1}};$$

donc, plus on prendra de termes dans la progression proposée, plus leur somme approchera de $\frac{am}{m-1}$. Elle pourra même en différer de moins que telle petite quantité qu'on puisse assigner, sans jamais lui être rigoureusement égale.

La quantité $\frac{am}{m-1}$, que je désignerai par L, est, comme on voit, une limite dont les sommes partielles représentées par S, s'approchent de plus en plus.

En appliquant ces considérations à la progression

$$1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{16} : \text{etc.},$$

on aura

$$a = 1, \quad q = \frac{1}{m} = \frac{1}{2};$$

d'où

$$m = 2, \quad L = \frac{am}{m-1} = 2;$$

et plus on prendra de termes dans la progression ci-dessus, plus leur somme approchera d'être égale à 2. On trouve en effet

$$1 = 1 = 2 - 1,$$
$$1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} = 2 - \tfrac{1}{2},$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{4} = 2 - \tfrac{1}{4},$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{15}{8} = 2 - \tfrac{1}{8},$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{31}{16} = 2 - \tfrac{1}{16},$$

etc.

L'expression de L peut être considérée comme la somme de la progression décroissante par quotient, continuée à l'infini, et c'est ainsi qu'on la présente ordinairement; mais on ne peut cependant s'en former une idée bien nette, qu'en l'envisageant sous le point de vue d'une limite.

235. On peut tirer de l'expression

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1},$$

tous les termes qui composent la progression dont elle représente la somme; car si l'on effectue la division de $q^n - 1$ par $q - 1$ (158), on trouvera

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 \ldots\ldots + q^{n-1},$$

ce qui donne

$$S = a + aq + aq^2 \ldots\ldots + aq^{n-1}.$$

La valeur de L jouit de la même propriété, lorsqu'on effectue la division de m par $m - 1$, comme il suit;

$$\begin{array}{r|l} m & m-1 \\ \hline -m+1 & 1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\text{etc.} \\ \hline -1+\frac{1}{m} & \\ -\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2} & \\ -\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3} & \\ \text{etc.} & \end{array}$$

On divise d'abord m, comme à l'ordinaire, par le premier terme du diviseur, ce qui donne pour quotient 1; on multiplie ce quotient par le diviseur, et on retranche le produit du dividende; on divise ensuite le reste 1 par le premier terme du diviseur; on trouve pour quotient $\frac{1}{m}$, qu'on multiplie par le diviseur, et on a pour reste $\frac{1}{m}$: on opère sur ce reste comme sur le précédent. En continuant ainsi, on aperçoit bientôt la loi que suivent tous les quotiens partiels, et l'on voit que l'expression $\frac{m}{m-1}$ est équivalente à la série

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\text{etc.},$$

continuée à l'infini; mettant pour m sa valeur $\frac{1}{q}$, et multipliant par a, on retrouve

$$a+aq+aq^2+aq^3+\text{etc.},$$

pour la progression dont L exprime la limite.

236. On regarde le développement

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\text{etc}$$

comme la valeur de la fraction $\frac{m}{m-1}$, toutes les fois qu'il est *convergent*, c'est-à-dire, que les termes qui le composent diminuent en s'éloignant du premier.

En effet, si l'on arrête la division précédente successivement au premier, au second, au troisième..... reste, on trouve

les quotiens 1	et les restes 1
$1+\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$
$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}$	$\frac{1}{m^2}$
etc.	etc.

les uns n'approchent de la vraie valeur qu'autant que les autres vont en diminuant; et cette circonstance n'a lieu que lorsque m surpasse l'unité. Dans tous les autres cas, on ne peut se permettre de négliger les restes, qui, croissant sans cesse, font voir que les quotiens s'éloignent de plus en plus de la vraie valeur.

Pour éclaircir ceci, il suffit de faire successivement $m=2$, $m=1$, $m=\frac{1}{2}$. La première supposition donne

$$\frac{m}{m-1}=2=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\text{etc.};$$

et l'on a déjà vu (234) qu'en effet la série qui compose le second membre s'approchait de plus en plus de 2.

La seconde supposition conduit à

$$\frac{m}{m-1}=\tfrac{1}{0}=1+1+1+1+1+1+\text{etc.}$$

Ce résultat, $1+1+1+1+$ etc., continué à l'infini, donne bien une quantité infinie, comme le demande la nature de l'expression $\frac{1}{0}$: cependant si l'on ne tenait pas compte des restes dans cet exemple, on tomberait dans

une absurdité ; car puisque le diviseur, multiplié par le quotient, doit reproduire le dividende, il faut que

$$1 = (1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots).0 ;$$

or le second membre s'anéantit rigoureusement : on aurait donc $1 = 0$.

La troisième supposition mène à des conséquences non moins absurdes, quand on néglige les restes, et qu'on regarde la série résultante comme exprimant la valeur de la fraction dont elle dérive. En faisant $m = \frac{1}{2}$, on trouve

$$\frac{m}{m-1} = -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \text{etc}$$

ce qui est bien évidemment faux. Ces contradictions disparaissent quand on observe la marche des restes.

Dans le second cas, les restes

$$1, \frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{m^3}, \text{etc.},$$

sont tous égaux à 1, et puisqu'ils ne diminuent pas, il n'est pas permis de les négliger, quelque loin que l'on pousse la série. En ajoutant donc l'un de ces restes au second membre de l'équation

$$1 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots).0,$$

elle devient exacte.

Dans le troisième cas, les restes

$$1, \frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{m^3}, \text{etc.},$$

forment la progression croissante 1, 2, 4, 8, 16, etc., et en ajoutant à chaque quotient la fraction qui résulte du reste qui l'accompagne, les expressions rigoureuses de $\frac{m}{m-1}$, sont

$$1+\frac{1}{m-1},$$

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m(m-1)},$$

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2(m-1)}$$

etc.,

qui toutes s'accordent à donner -1, lorsque $m=\frac{1}{2}$.

Si l'on prenait $m=-n$, la fraction $\frac{m}{m-1}$ deviendrait $\frac{n}{n+1}$; la série qui exprime le développement de cette fraction se changerait en

$$1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\text{etc.};$$

et en y faisant $n=1$, on aurait

$$1-1+1-1+1-1+\text{etc.},$$

développement qui devient tantôt 1 et tantôt 0, et qui s'écarte par conséquent, tantôt par excès, tantôt par défaut, de la vraie valeur de $\frac{n}{n+1}$, égale dans ce cas à $\frac{1}{2}$: mais la série ci-dessus, n'étant point convergente, ne peut donner cette vraie valeur; et il faut nécessairement tenir compte du reste, à quelque terme que l'on s'arrête.

Si l'on suppose dans la série précédente $n=2$, on aura

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}-\text{etc.}$$

suite dont les sommes partielles $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$, etc. sont alternativement plus petites et plus grandes que la vraie valeur de $\frac{n}{n+1}$, qui est $\frac{2}{3}$, mais dont elles approchent

indéfiniment, parce que la série proposée est convergente.

Quoique les séries *divergentes*, c'est-à-dire celles dont les termes vont en augmentant, s'écartent sans cesse de la vraie valeur de l'expression dont elles dérivent, considérées néanmoins comme développemens de ces expressions, elles peuvent faire connaître celles de leurs propriétés qui ne dépendent point de leur *sommation*, c'est-à-dire de la détermination de leur somme.

237. En poussant quelque division algébrique que ce soit, comme j'ai fait ci-dessus (235), pour celle de m par $m-1$, on parviendra toujours à exprimer le quotient par une suite infinie de termes *monomes*. Les extractions des racines, continuées de la même manière sur les restes successifs, dans le cas des puissances imparfaites, conduiront aussi à des suites infinies; mais ces suites s'obtiendront plus facilement par la formule du *binome*, ainsi que je le ferai voir dans le *Complément*, où je traiterai des suites les plus connues.

Théorie des quantités exponentielles et des logarithmes.

238. Dans toutes les questions résolues jusqu'ici, les inconnues n'entraient pour rien dans les exposans; mais il n'en serait pas de même si l'on voulait déterminer le nombre des termes d'une progression par quotient, dont le premier terme, le dernier et la raison seraient donnés. En effet, on aurait pour cela l'équation

$$l = a\,q^{n-1} \quad (231),$$

dans laquelle l'inconnue serait n; et en faisant, pour abréger, $n-1=x$, il viendrait $l=a\,q^x$. Les méthodes directes exposées précédemment ne sauraient résoudre cette équation; et les quantités telles que x ne peuvent être

représentées par aucun des signes dont j'ai déjà fait usage. Pour répandre plus de lumière sur ce sujet, je rappellerai, d'après Euler, la liaison qui existe entre les diverses opérations de l'Algèbre, et comment chacune d'elles donne naissance à une nouvelle espèce de quantités.

239. Soient a et b deux quantités qu'on se propose d'ajouter ensemble; on a

$$a+b=c;$$

et si de cette équation on veut tirer a ou b, on trouve

$$a=c-b, \quad b=c-a:$$

voilà, comme on voit, l'origine de la soustraction; or quand cette dernière opération ne peut s'effectuer dans l'ordre où elle est indiquée, le résultat devient négatif.

L'addition répétée d'une même quantité engendre la multiplication: a désignant le multiplicateur, b le multiplicande, et c le produit, on a

$$ab=c,$$

d'où l'on tire

$$a=\frac{c}{b}, \quad b=\frac{c}{a};$$

et de là naissent la division et les fractions qui en sont la suite, lorsqu'elle ne peut s'effectuer sans reste.

La multiplication répétée d'une quantité par elle-même, produit les puissances de cette quantité; en exprimant par b le nombre de fois que a est facteur dans la puissance que l'on considère, on a

$$a^b=c.$$

Cette équation diffère essentiellement des précédentes, en ce que les quantités a et b n'y entrent pas toutes deux de la même manière, d'où il suit qu'on ne peut pas résoudre l'équation par rapport à l'une comme par

rapport à l'autre. Si c'est a qu'on cherche, une simple extraction de racine suffit pour le trouver; et cette opération donne lieu à une nouvelle espèce de quantités, savoir, les irrationnelles; mais la détermination de b dépend de méthodes particulières que je ferai connaître lorsque j'aurai exposé les principales propriétés de l'équation $a^b = c$.

240. Il est facile de voir qu'en conservant la même valeur pour la lettre a, que je supposerai au-dessus de l'unité, et variant convenablement celle de b, on pourra obtenir pour c tous les nombres possibles. En effet, en faisant $b = 0$, on a $c = 1$; puis lorsque b croîtra, les valeurs correspondantes de c surpasseront de plus en plus l'unité, et pourront augmenter autant qu'on voudra. Le contraire aura lieu si l'on prend b négatif; l'équation $a^b = c$ se changeant en $a^{-b} = c$, ou $\frac{1}{a^b} = c$, les valeurs de c iront sans cesse en diminuant, et pourront devenir aussi petites qu'on voudra. On peut donc de la même équation tirer tous les nombres positifs possibles, soit entiers, soit fractionnaires, dans le cas où a surpasse l'unité. Il en serait de même, si l'on avait $a < 1$: seulement, les valeurs de c marcheraient en sens inverse de celles du cas précédent; mais en supposant $a = 1$, on trouverait toujours $c = 1$, quelque valeur qu'on donnât à b: on doit donc, dans tout ce qui va suivre, regarder a comme différant essentiellement de l'unité.

Pour mieux désigner que a ne change point, et que les deux autres quantités b et c sont indéterminées, je les représenterai par les lettres x et y, et j'aurai l'équation $a^x = y$, dans laquelle à chaque valeur de y répond une valeur de x, en sorte que l'une de ces quantités est déterminée par l'autre, et réciproquement.

241. Cette génération de tous les nombres par le

moyen des puissances d'un seul, est très importante, non-seulement par rapport à l'Algèbre, mais encore par le secours qu'elle fournit pour abréger les calculs numériques. En effet, si l'on considère un autre nombre y', et que l'on désigne par x' la valeur correspondante de x, on aura $a^{x'} = y'$, et par conséquent si l'on multiplie y par y', il viendra

$$yy' = a^x \times a^{x'} = a^{x+x'};$$

si l'on divise, on trouvera

$$\frac{y'}{y} = \frac{a^{x'}}{a^x} = a^{x'-x};$$

enfin, si l'on prend la puissance m de y et la racine $n^{ème}$, on aura

$$y^m = (a^x)^m = a^{mx}$$

pour l'une, et

$$y^{\frac{1}{n}} = (a^x)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{x}{n}}$$

pour l'autre.

Il suit des deux premiers résultats que, connaissant les exposans x et x' relatifs aux nombres y et y', on trouvera, en prenant leur somme, l'exposant qui répond au produit yy', et en prenant leur différence, celui qui répond au quotient $\frac{y'}{y}$. Les deux dernières équations font voir que l'exposant relatif à la puissance $m^{ème}$ de y s'obtient par une simple multiplication, et celui qui répond à la racine $n^{ème}$, par une simple division.

Il est facile de conclure de là, que si l'on avait une table dans laquelle, à côté de chacun des nombres y, se trouvassent les valeurs correspondantes de x, en sorte qu'étant donné y, on pût avoir x, et réciproquement, *la multiplication de deux nombres quelconques se réduirait à une simple addition*, parce qu'au lieu d'opérer sur ces

nombres, on ajouterait les valeurs de x qui s'y rapportent, et cherchant ensuite dans la table le nombre auquel répond cette somme, on aurait ainsi le produit demandé. Le quotient des nombres proposés se trouverait dans la même table, vis-à-vis de la différence des valeurs de x qui leur correspondent, et *la division s'effectuerait alors par une soustraction.*

Ces deux exemples font assez entrevoir l'utilité dont peuvent être des tables semblables à celle dont on vient de parler; aussi l'usage en est-il bien répandu depuis Neper, qui les imagina le premier. Les valeurs de x y sont désignées sous le nom de *logarithmes*, et par conséquent *les logarithmes sont les exposans des puissances auxquelles il faut élever un nombre invariable, pour en déduire successivement tous les nombres possibles.*

Le nombre invariable se nomme base *de la table ou du système de logarithmes.*

Dans la suite, je représenterai le logarithme de y, par $\mathrm{l}y$; on aura $x = \mathrm{l}y$, et à cause de $y = a^x$, il viendra $y = a^{\mathrm{l}y}$.

242. Les propriétés des logarithmes étant indépendantes des valeurs particulières du nombre a ou de leur base, il s'ensuit qu'on peut former une infinité de tables différentes, en donnant à ce nombre toutes les valeurs possibles, autres que l'unité. Prenant pour exemple $a = 10$, on aura $y = (10)^{\mathrm{l}y}$, et on trouvera sur-le-champ que les nombres

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, etc.,

qui sont tous des puissances de 10, ont pour logarithmes dans cette hypothèse, les nombres

0, 1, 2, 3, 4, 5, etc.

On peut déjà vérifier sur cette suite les propriétés que j'ai énoncées dans le numéro précédent: en ajoutant les

logarithmes de 10 et de 1000, qui sont 1 et 3, on voit que leur somme 4 se trouve au-dessous de 10000, qui est le produit des nombres proposés.

243. Les logarithmes des nombres intermédiaires entre 1 et 10, 10 et 100, 100 et 1000, etc., ne peuvent s'obtenir que par approximation. S'il s'agissait, par exemple, d'avoir le logarithme de 2, il faudrait résoudre l'équation $(10)^x = 2$, en y appliquant la méthode donnée n° 221, et trouver d'abord le nombre entier le plus approchant de la valeur de x. On voit bientôt que x est entre 0 et 1, puisque $(10)^0 = 1$, $(10)^1 = 10$; on fera donc $x = \frac{1}{z}$, et il viendra $(10)^{\frac{1}{z}} = 2$, ou $10 = 2^z$; or z se trouve entre 3 et 4: on supposera donc $z = 3 + \frac{1}{z'}$, et il en résultera

$$10 = 2^{3+\frac{1}{z'}} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{z'}} = 8 \times 2^{\frac{1}{z'}},$$

ou
$$2^{\frac{1}{z'}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4},$$

ou enfin
$$2 = (\tfrac{4}{5})^{z'}.$$

La valeur de z' tombant entre 3 et 4, on fera

$$z' = 3 + \frac{1}{z''};$$

on aura

$$2 = (\tfrac{4}{5})^{3+\frac{1}{z''}} = (\tfrac{4}{5})^3 (\tfrac{4}{5})^{\frac{1}{z''}},$$

d'où l'on tirera

$$(\tfrac{4}{5})^{\frac{1}{z''}} = 2(\tfrac{4}{5})^3 = \tfrac{128}{125}, \text{ ou } (\tfrac{128}{125})^{z''} = \tfrac{5}{4};$$

et après un petit nombre d'essais, on trouvera que z'' est entre 9 et 10. On pourra pousser plus loin de la même

manière; mais comme je n'ai indiqué ce procédé que pour montrer la possibilité de trouver les logarithmes de tous les nombres, je me bornerai à supposer $z''=9$; et en remontant, on obtiendra

$$z'=\frac{28}{9},\quad z=\frac{91}{28},\quad x=\frac{28}{93}.$$

Cette valeur de x, réduite en décimales, est exacte jusqu'au quatrième chiffre, car elle donne

$$x=0{,}30107;$$

et des calculs portés à un plus haut degré de rigueur, ont appris qu'en poussant jusqu'à 7 décimales, on aurait

$$x=0{,}3010300.$$

Pour interpréter cette valeur de x comme celle d'un exposant, il faut concevoir que si on élève le nombre 10 à la puissance marquée par le nombre 3010300, et qu'on extraye du résultat une racine du degré 10000000, on aura un nombre très approchant de 2; c'est-à-dire, que $(10)^{\frac{3010300}{10000000}}=2$, à fort peu près : le premier membre est un peu plus grand que 2; mais le nombre $(10)^{\frac{3010299}{10000000}}$ serait plus petit (*).

(*) La méthode indiquée dans ce numéro ne serait pas praticable pour des nombres un peu grands; mais en voici une autre donnée par Long, géomètre anglais, dans les *Transactions philosophiques*, pour l'année 1724, n° 339, qui peut être très utile.

La détermination de x dans l'équation $(10)^x=y$ étant très laborieuse, on peut procéder dans un ordre inverse, se donner x pour obtenir y, et former une table des valeurs de y correspondantes à celles de x, qui servira ensuite, comme on va le voir, à déterminer x par y.

On prend d'abord pour x des valeurs depuis 0,1 jusqu'à 0,9; et tout se réduit à déterminer la valeur de y, qui répond à $x=0{,}1$, ou qui est $(10)^{\frac{1}{10}}$, parce que les autres valeurs de y, savoir:

244. En multipliant successivement par 2, 3, 4, etc., le logarithme de 2, on obtient ceux des nombres 4, 8, 16, etc. qui sont les 2e, 3e, 4e, etc., puissances de 2.

En ajoutant au logarithme de 2 les logarithmes de 10, de 100, de 1000, etc., on en déduit ceux de 20, de 200, de 2000, etc.; et il est évident qu'il suffit d'avoir les logarithmes des nombres premiers pour trouver les logarithmes de tous les nombres composés, qui ne peuvent être que des puissances ou des produits de nombres premiers. Le nombre 210, par exemple, étant égal à

$$2\times 3\times 5\times 7,$$

son logarithme sera égal à

$$l2+l3+l5+l7,$$

et à cause que $5=\frac{10}{2}$, on aura

$$l5=l10-l2.$$

245. Les logarithmes, qui sont toujours exprimés

$(10)^{\frac{2}{10}}$, $(10)^{\frac{3}{10}}$, etc.,

sont les 2e, 3e, etc., puissances de la première.

L'extraction de la racine quarrée fait d'abord connaître

$$(10)^{\frac{5}{10}} \text{ ou } (10)^{\frac{1}{2}}=3,162\,277\,660;$$

puis en extrayant la racine cinquième de ce résultat, on parvient à

$$(10)^{\frac{1}{10}}=1,258\,925\,412.$$

Par un procédé semblable, on tirera de

$$(10)^{\frac{1}{10}}=1,258\,925\,412$$

la valeur de

$$\sqrt{(10)^{\frac{1}{10}}}=(10)^{\frac{1}{20}}=(10)^{\frac{2}{40}}=(10)^{\frac{1}{100}}=1,122\,018\,454;$$

puis prenant la racine cinquième, on formera

$$(10)^{\frac{1}{100}}=1,023\,292\,992;$$

et remontant aux puissances 2e, 3e.....9e, on obtiendra les valeurs de y, correspondantes à celles de x, depuis 0,01 jusqu'à 0,09.

On conçoit facilement que de cette manière on formera encore les valeurs de y pour celles de x, depuis 0,901 jusqu'à 0,909, depuis

en décimales, sont nécessairement composés de deux parties, savoir, des unités, placées à la gauche de la

0,0001 jusqu'à 0,0009, et qu'on pourra composer la table ci-dessous.

Log.	Nombres natur.	Log.	Nombres natur.
0,9	7,943282347	0,00009	1,000207254
8	6,309573445	8	1,000184224
7	5,011872336	7	1,000161194
6	3,981071706	6	1,000138165
5	3,162277660	5	1,000115136
4	2,511886432	4	1,000092108
3	1,995262315	3	1,000069080
2	1,584893192	2	1,000046053
1	1,258925412	1	1,000023026
0,09	1,230268771	0,000009	1,000020723
8	1,202264435	8	1,000018421
7	1,174897555	7	1,000016118
6	1,148153621	6	1,000013816
5	1,122018454	5	1,000011513
4	1,096478196	4	1,000009210
3	1,071519305	3	1,000006908
2	1,047128548	2	1,000004605
1	1,023292992	1	1,000002303
0,009	1,020939484	0,0000009	1,000002072
8	1,018591388	8	1,000001842
7	1,016248693	7	1,000001612
6	1,013911386	6	1,000001382
5	1,011579454	5	1,000001151
4	1,009252886	4	1,000000921
3	1,006931669	3	1,000000691
2	1,004615790	2	1,000000461
1	1,002305238	1	1,000000230
0,0009	1,002074475	0,00000009	1,000000207
8	1,001843766	8	1,000000184
7	1,001613109	7	1,000000161
6	1,001382506	6	1,000000138
5	1,001151956	5	1,000000115
4	1,000921458	4	1,000000092
3	1,000691014	3	1,000000069
2	1,000460623	2	1,000000046
1	1,000230285	1	1,000000023

virgule, et des chiffres décimaux qui se trouvent à la droite. La première porte le nom de *caractéristique*, parce que, dans les logarithmes que je considère pour le moment, qui résultent de la supposition de $a=10$,

---

[1] Par le moyen de cette table, on trouvera le logarithme d'un nombre quelconque, en le divisant par 10, un nombre de fois suffisant. Pour obtenir, par exemple, celui de 2549, on divisera ce nombre d'abord par $(10)^3$ ou 1000, qui est la plus grande puissance de 10, à exposant entier, qu'il puisse contenir, et on aura

$$2549 = (10)^3 \times 2{,}549;$$

puis on cherchera dans la table la puissance de 10, immédiatement au-dessous de 2,549, on trouvera

$$(10)^{0,4} = 2{,}511886432,$$

et divisant 2,549 par ce dernier nombre, il viendra

$$2{,}549 = (10)^{0,4} \times 1{,}014775177.$$

Cherchant encore dans la table la puissance de 10, immédiatement au-dessous de 1,014775177, on trouvera

$$(10)^{0,006} = 1{,}013911386;$$

puis divisant par ce nombre le quotient précédent, 1,014775177, on aura un 3e quotient 1,000851742.

On continuera d'opérer ainsi jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un quotient qui ne diffère de l'unité que dans l'ordre de décimales qu'on se propose de négliger.

En regardant ici le troisième comme égal à l'unité, le nombre proposé sera décomposé en facteurs, qui seront des puissances de 10, car on aura

$$2549 = (10)^3 \times (10)^{0,4} \times (10)^{0,006} = (10)^{3,406},$$

d'où l'on voit que 3,406 est le logarithme du nombre 2549. En poussant les divisions jusqu'au nombre de 7, on trouvera que ce logarithme est 3,406369.

La même table sert encore plus facilement à trouver un nombre par son logarithme; en voici un exemple.

Soit 2,547 le logarithme donné; le nombre cherché sera

$$(10)^{2,547} = (10)^2 \times (10)^{0,5} \times (10)^{0,04} \times (10)^{0,007};$$

il sera donc égal au produit des nombres

et qu'on appelle *logarithmes ordinaires*, cette partie fait connaître dans quel ordre d'unités tombe le nombre dont on a le logarithme. Tous les logarithmes des nombres compris entre 1 et 10, tombant entre 0 et 1, ont nécessairement 0 pour caractéristique; tous ceux des nombres compris entre 10 et 100, ont 1; tous ceux des nombres compris entre 100 et 1000, ont 2: en général, la caractéristique d'un logarithme a autant d'unités que le nombre proposé a de chiffres moins un.

246. Une remarque non moins importante, c'est que les logarithmes des nombres qui sont décuples les uns des autres, ont la même partie décimale : par exemple,

54360 a pour log.	4,7352794;
5436	3,7352794,
543,6	2,7352794,
54,36	1,7352794,
5,436	0,7352794;

car chacun de ces nombres étant le quotient de celui qui le précède, divisé par 10, le logarithme de l'un s'obtient en ôtant une unité à la caractéristique de l'autre (241, 242).

$(10)^2 = 100,$
$(10)^{0,5} = 3,162277660,$
$(10)^{0,54} = 1,096478196,$
$(10)^{0,007} = 1,016248693,$

pris dans la table citée; et on aura par conséquent

$2,547 = l.\ 352,357.$

En 1742, à Londres, Dodson a publié, sous le titre d'*Anti-logarithmio Canon*, une table de même espèce que celle-ci, mais beaucoup plus étendue, et dont l'objet est de faire trouver à quel nombre répond un logarithme donné. Voyez aussi dans les Mémoires de l'*Académie de Berlin*, pour 1786 — 1787, page 456, une table analogue fort étendue, calculée par M. Burja, et d'après laquelle j'ai corrigé quelques fautes dans celle de Long.

247. D'après ce qui a été dit n° 240, les logarithmes des nombres fractionnaires sont négatifs dans l'hypothèse actuelle; et on les déduit facilement de ceux des nombres entiers, en observant qu'une fraction représente le quotient de la division du numérateur par le dénominateur. Quand le numérateur est moindre que le dénominateur, son logarithme est aussi plus petit que celui du dénominateur, et par conséquent, en retranchant le dernier du premier, on a un reste négatif.

Pour obtenir le logarithme de la fraction $\frac{1}{2}$, par exemple, on retranchera de 0, qui exprime le logarithme de 1, la fraction 0,3010300, qui est celui de 2, et il viendra

$$-0{,}3010300.$$

En retranchant de 0 le nombre 1,3010300, qui est le logarithme de 20, on aura le logarithme de $\frac{1}{20}$, égal à

$$-1{,}3010300;$$

le logarithme de 3 étant 0,4771213, celui de $\frac{2}{3}$ sera

$$0{,}3010300 - 0{,}4771213 = -0{,}1760913.$$

248. Par la manière dont on les obtient, les logarithmes des fractions, abstraction faite de leur signe, appartiennent (241) au quotient de la division du dénominateur par le numérateur, et répondent par conséquent au nombre par lequel il faudrait diviser l'unité pour obtenir la fraction proposée. En effet, $\frac{2}{3}$, par exemple, peut être mis sous la forme $\frac{1}{\frac{3}{2}}$, et $l\frac{3}{2} = l3 - l2 = 0{,}1760913$.

Il serait peu commode, pour trouver la valeur de la fraction à laquelle appartient un logarithme négatif donné, de chercher le nombre auquel il répond lorsqu'il est positif, puisqu'il faudrait effectuer la division de l'unité par ce nombre; mais si l'on retranche ce loga-

rithme de 1, 2, 3, etc. unités, le reste appartiendra au nombre qui exprime la fraction cherchée, lorsqu'on la convertit en décimales, puisque cette soustraction répond à la division des nombres 10, 100, 1000, etc. par le nombre du logarithme proposé.

Soit pour exemple, — 0,3010300; si, en n'ayant point égard à son signe, on ôte ce logarithme de 1, ou 1,0000000, le reste 0,6989700, répondant à 5, montre que la fraction cherchée est égale à 0,5, puisqu'on a supposé l'unité composée de 10 parties.

Si, lorsqu'on cherche le logarithme d'une fraction, on conçoit tout de suite l'unité formée de 10, ou 100, ou 1000, ou etc. parties, ou; ce qui revient au même, si l'on augmente la caractéristique du logarithme du numérateur d'un nombre d'unités suffisant pour qu'on puisse faire la soustraction de celui du dénominateur, on aura de cette manière un logarithme positif, qui pourra s'employer au lieu de celui qu'on a indiqué plus haut.

Afin de mettre de l'uniformité dans les calculs, on augmente le plus souvent de 10 unités la caractéristique du logarithme du numérateur. Relativement à la fraction $\frac{2}{3}$, par exemple, on a

$$10,3010300 - 0,4771213 = 9,8239087.$$

Il est facile de voir que ce logarithme surpasse de 10 unités le logarithme négatif — 0,1760913, et que par conséquent chaque fois qu'on l'ajoutera à d'autres, on introduira 10 unités de trop dans le résultat; mais la soustraction de ces 10 unités ne doit pas compter pour une opération, et lorsqu'elle sera effectuée, on aura effectué en même temps celle de 0,1760913. En effet, soit N le nombre auquel on ajoute le logarithme positif 9,8239087; le résultat de l'opération

sera représenté par

$$N + 10 - 0{,}1760913;$$

et si l'on en retranche 10, on aura seulement

$$N - 0{,}1760913.$$

D'après ce qui précède, on change la soustraction en addition, en employant, au lieu du nombre à soustraire, son *complément arithmétique*, c'est-à-dire ce qui reste lorsqu'on retranche ce nombre de l'un des nombres 10, 100, 1000, etc., résultat qui s'obtient en ôtant de 10 les unités simples du nombre proposé, et toutes les autres de 9; cela fait, on ajoute ce complément au nombre dont il faudrait soustraire le proposé, et on retranche de la somme une unité de l'ordre sur lequel on a pris le complément.

Il est évident que si le complément est répété plusieurs fois, il faudra retrancher, après l'addition, autant d'unités de l'ordre sur lequel le complément a été pris, qu'il y en a dans son multiplicateur; et par la même raison, si l'on emploie plusieurs complémens, il sera nécessaire de retrancher pour chacun l'unité sur laquelle il a été pris, ou autant d'unités qu'il y a de complémens, si tous sont pris sur une même unité.

Quelquefois cette soustraction ne peut s'effectuer; le résultat est alors le complément arithmétique du logarithme d'une fraction, et il répond dans les tables à l'expression de cette fraction convertie en décimales. Quand il reste encore 10 unités à ôter de la caractéristique, ce qui est le cas le plus ordinaire, c'est comme si l'on avait multiplié par 10000000000 le numérateur de la fraction cherchée, pour en effectuer la division par le dénominateur; la caractéristique du logarithme du quotient fait connaître quel est l'ordre le plus élevé des unités que renferme ce quotient, par rapport à celles du dividende. Dans 9,8239087, la caractéristique 9 montre que le

quotient doit avoir un chiffre de moins que le nombre par lequel on a multiplié l'unité; et par conséquent si, pour ramener le quotient à sa vraie valeur, on sépare 10 chiffres décimaux, son premier chiffre significatif vers la gauche sera des dixièmes : on ne trouverait que des centièmes, des millièmes, etc. pour les nombres dont les complémens arithmétiques auraient les caractéristiques 8, 7, etc.

249. Ce qu'on vient de lire sur le *système* de logarithmes dans lequel $a = 10$, renferme les principes généraux nécessaires pour l'intelligence des tables, qui sont presque toutes précédées d'une instruction relative à leur disposition particulière et à la manière de s'en servir, et à laquelle je renvoie les lecteurs. Je leur indiquerai cependant les tables de Callet (édition stéréotype), et celles de Borda, comme étant très étendues et très commodes.

250. Quand on a le logarithme d'un nombre y, pour une valeur particulière de a, ou pour une base particulière, il est facile d'obtenir le logarithme du même nombre dans tout autre système. En effet, soit $a^x = y$; pour une autre base A, on aura $A^X = y$, X étant différent de x : et on tirera de là $A^X = a^x$. En prenant les logarithmes relativement au système dont la base est a, il viendra

$$\mathrm{l}\, A^X = \mathrm{l}\, a^x;$$

or $\mathrm{l}\, a^x = x$ par l'hypothèse, et $\mathrm{l}\, A^X = X\,\mathrm{l}\, A$ (241) : donc $X\,\mathrm{l}\, A = x$, ou $X = \frac{x}{\mathrm{l}\, A}$. Mais en considérant A comme base, X sera le logarithme de y, dans le système relatif à cette base : si donc on désigne ce dernier par $\mathrm{L}y$, pour le distinguer de l'autre, on aura

$$\mathrm{L}y = \frac{\mathrm{l}\, y}{\mathrm{l}\, A},$$

et *on trouvera le logarithme de* y *dans le second système, en divisant son logarithme pris dans le premier par le logarithme de la base du second système.*

L'équation précédente donne aussi $\frac{1y}{Ly} = 1A$; ce qui fait voir que, quel que soit le nombre y, il existe entre les logarithmes $1y$ et Ly, un rapport invariable représenté par $1A$.

251. Dans quelque système que ce soit, le logarithme de 1 est toujours 0, puisque, quel que soit a, on a toujours $a^0 = 1$. Lorsque a est > 1, les logarithmes étant susceptibles de croître indéfiniment à mesure que les nombres augmentent, on dit qu'ils deviennent infinis en même temps que les nombres; et comme lorsque y est un nombre fractionnaire, on a $y = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$, on voit que plus y diminue, plus x doit augmenter négativement, mais que cependant on ne peut jamais assigner pour x un nombre qui rende y exactement nul. Tel est le sens dans lequel il faut entendre que *le logarithme de zéro est égal à l'infini négatif*, ainsi qu'on le trouve dans beaucoup de tables.

252. Je vais donner maintenant quelques exemples de l'usage qu'on peut faire des logarithmes dans l'évaluation numérique des formules. Il suit du numéro 241 et de la définition des logarithmes, qui donne l'équation $a^{1y} = y$, que

$$1(AB) = 1A + 1B, \quad 1\left(\frac{A}{B}\right) = 1A - 1B,$$

$$1A^m = m1A, \quad 1A^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}1A.$$

En appliquant ces règles à la formule

$$\frac{A^2\sqrt{B^2 - C^2}}{C\sqrt{D^3EF}},$$

qui est assez compliquée, on trouvera

$$l(A^2\sqrt{B^2-C^2}) = l[A^2\sqrt{(B+C)(B-C)}] = 2lA + \tfrac{1}{2}l(B+C) + \tfrac{1}{2}l(B-C),$$

$$l(C\sqrt[5]{D^3EF}) = lC + \tfrac{3}{5}lD + \tfrac{1}{5}lE + \tfrac{1}{5}lF,$$

et par conséquent

$$l\left(\frac{A^2\sqrt{B^2-C^2}}{C\sqrt[5]{D^3EF}}\right) =$$

$$2lA + \tfrac{1}{2}l(B+C) + \tfrac{1}{2}l(B-C) - lC - \tfrac{3}{5}lD - \tfrac{1}{5}lE - \tfrac{1}{5}lF.$$

Si l'on prenait les complémens arithmétiques de lC, $\frac{3}{5}lD$, $\frac{1}{5}lE$, $\frac{1}{5}lF$, et qu'on les désignât par C', D', E', F', au lieu du résultat précédent, on aurait

$$2lA + \tfrac{1}{2}l(B+C) + \tfrac{1}{2}l(B-C) + C' + D' + E' + F',$$

en observant d'ôter de la somme autant d'unités de l'ordre sur lequel on a pris les complémens, qu'il y a de ces complémens, c'est-à-dire, 4. Lorsqu'on sera parvenu au logarithme de la formule proposée, les tables feront connaître le nombre auquel appartient ce logarithme, et qui est la valeur cherchée.

253. L'usage le plus fréquent des logarithmes est celui qu'on en fait pour trouver le quatrième terme d'une proportion. Il est visible que si $a : b :: c : d$, on aura

$$d = \frac{bc}{a}, \qquad \text{d'où} \qquad ld = lb + lc - la;$$

c'est-à-dire, que *le logarithme du quatrième terme cherché est égal à la somme des logarithmes des deux moyens diminuée du logarithme de l'extrême connu*, ou bien *à la somme des logarithmes des moyens plus au complément arithmétique du logarithme de l'extrême connu.*

254. Si l'on prend les logarithmes de chaque membre

de l'équation $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, qui exprime le caractère de la proportion, on aura

$$1b - 1a = 1d - 1c \quad (252);$$

d'où il résulte que les quatre logarithmes

$$1a.1b:1c.1d$$

forment une équidifférence (223).

La suite d'équations

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} \text{ etc.} \quad (231)$$

conduit de même à

$$1b - 1a = 1c - 1b = 1d - 1c = 1e - 1d \text{ etc.},$$

et on en conclut qu'à la progression par quotient

$$\div a:b:c:d:e: \text{etc.},$$

correspond la progression par différence

$$\div 1a.1b.1c.1d.1e. \text{ etc.};$$

et que par conséquent *les logarithmes des nombres en progression par quotient, sont en progression par différence.*

255. Si l'on avait l'équation $b^z = c$, on la résoudrait facilement au moyen des logarithmes; car $1b^z$ étant égal à $z1b$, on aurait $z1b = 1c$, et par conséquent $z = \frac{1c}{1b}$.

L'équation $b^{c^z} = d$ se traiterait de la même manière; en faisant d'abord $c^z = u$, il viendrait

$$b^u = d, \quad u1b = 1d, \quad u = \frac{1d}{1b}, \quad \text{ou} \quad c^z = \frac{1d}{1b};$$

prenant de nouveau les logarithmes, on trouverait

$$z \, \mathrm{l}\, c = \mathrm{l}\left(\frac{\mathrm{l}\, d}{\mathrm{l}\, b}\right) = \mathrm{ll}\, d - \mathrm{ll}\, b \quad \text{et} \quad z = \frac{\mathrm{ll}\, d - \mathrm{ll}\, b}{\mathrm{l}\, c}.$$

Dans cette dernière expression, $\mathrm{ll}\, b$ désigne le logarithme du logarithme de b, et s'obtient en considérant ce logarithme comme un nombre. Les quantités b^z, b^c, et toutes celles qui en dérivent, se nomment *exponentielles*.

Questions relatives à l'intérêt de l'argent.

256. La théorie des progressions par quotient et celle des logarithmes, trouvent leur application dans les spéculations relatives à l'intérêt de l'argent. Pour entendre ce que je vais dire sur ce sujet, il faut savoir que les avantages que procure une somme d'argent à celui qui la fait valoir, c'est-à-dire qui l'emploie soit aux échanges du commerce, soit à faire exécuter des travaux productifs, sont d'autant plus grands, qu'il peut renouveler plus de fois ces échanges, ou multiplier ces travaux. Il suit de là qu'un homme qui emprunte une somme d'argent pour la faire valoir, doit, en rendant cette somme au bout d'un certain temps, y joindre une rétribution pour dédommager le prêteur des avantages qu'elle lui eût procurés s'il l'avait employée lui-même. Telle est l'idée qu'on doit se faire de l'intérêt de l'argent. Pour le déterminer, on compare toutes les sommes à celle de 100 fr. prise pour unité, et on convient de ce que doit rapporter cette dernière au bout d'un temps donné, d'une année, par exemple. Ce n'est pas ici le lieu d'exposer les considérations qui, dans chaque genre de spéculations, font hausser et baisser l'intérêt de l'argent: elles ne peuvent entrer que dans des élémens d'Arithmétique politique et commerciale, qui doivent être précédés de ceux du calcul des probabilités; et mon objet, dans ce qui suit, n'est que de résoudre quelques-uns des problèmes qu'offrent les progressions par quotient.

Je supposerai, en général, que l'on soit convenu de donner au bout d'un an, pour la somme 1, un intérêt désigné par r; il est évident que l'intérêt d'une somme 100, pendant le même temps, sera $100r$, que celui d'une somme quelconque a, sera exprimé par ar; et si l'on désigne ce dernier par α, on aura

$$\alpha = ar.$$

Par cette relation, il est facile de trouver l'intérêt pour une somme quelconque, lorsqu'on a celui que donnent 100 fr. ou même toute autre somme pendant un temps connu; cette question s'appelle *calcul d'intérêt simple*.

257. Mais si le prêteur, au lieu de retirer chaque année l'intérêt du capital qu'il a avancé, le laisse entre les mains de l'emprunteur, pour le faire valoir conjointement avec la somme primitive, pendant l'année suivante, au bout de cette année le capital aura acquis une valeur qu'on trouvera ainsi :

Le capital primitif étant a, augmenté de l'intérêt ar, il deviendra, au bout de la première année,

$$a + ar = a(1 + r).$$

Si maintenant on fait

$$a(1 + r) = a',$$

l'intérêt de la somme a' pour un an étant $a'r$, celui de la somme $a(1 + r)$, sera, pour une seconde année, $ar(1 + r)$; et de même qu'au bout de la première année, le capital a, augmenté de l'intérêt qu'il devait rapporter, est devenu $a(1 + r)$, le capital a' deviendra, à la fin de la seconde année,

$$a'(1 + r) = a(1 + r)^2 = a''.$$

Si le prêteur ne retire point encore le capital a'' à la fin de cette année, et qu'il le laisse pendant une troi-

sième année, au bout de celle-ci, il lui sera dû, d'après ce qui précède,

$$a''(1+r) = a(1+r)^3 = a'''.$$

On voit sans peine qu'après la quatrième année, a''' serait changé en

$$a'''(1+r) = a(1+r)^4,$$

et ainsi de suite; et que par conséquent la somme prêtée d'abord et les sommes à rendre à la fin de la première, de la seconde, de la troisième, de la quatrième, etc., année, forment cette progression par quotient :

$$\therefore a : a(1+r) : a(1+r)^2 : a(1+r)^3 : a(1+r)^4 : \text{etc.},$$

dont le quotient est $1+r$, et le terme général

$$a(1+r)^n = A,$$

le nombre n marquant celui des années écoulées depuis l'instant du prêt.

Soit, par exemple, le taux d'intérêt à 5 pour 100, c'est-à-dire que pour 100 francs prêtés pendant un an, on doit rendre 105 francs; on a

$$100r = 5, \quad \text{ou} \quad r = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}, \quad \text{et} \quad 1+r = \frac{21}{20}.$$

Si l'on voulait savoir ce que devient la somme a, abandonnée, ainsi qu'on vient de le dire, pendant 25 années, on aurait alors

$$n = 25, \quad \text{et} \quad a\left(\frac{21}{20}\right)^{25}$$

au lieu de la somme primitive. La 25e puissance de $\frac{21}{20}$, s'évalue promptement par le moyen des logarithmes, puisqu'on a (252)

$$l\left(\frac{21}{20}\right)^{25} = 25\, l\tfrac{21}{20} = 25\,(l\,21 - l\,20) = 0{,}5297322,$$

ce qui donne

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{25} = 3{,}386 \quad \text{environ}, \quad A = 3{,}386\,a;$$

et l'on voit par là que 1000 francs prêtés de cette manière vaudraient 3386 francs au bout de 25 années, en y comprenant les intérêts, etc.

Si le placement durait 100 ans, on trouverait

$$A = a\left(\frac{21}{20}\right)^{100} = 131\,a$$

environ; ainsi 1000 francs produiraient, après cet espace de temps, une somme de 131000 francs environ. Ces exemples montrent avec quelle rapidité les fonds s'augmentent par l'accumulation des intérêts composés.

258. L'équation

$$A = a\,(1+r)^n$$

donne lieu à quatre questions : la première, connaissant a, r et n, trouver A, se présente toutes les fois qu'on cherche ce que devient le capital après un nombre n d'années; je viens d'en donner un exemple.

La seconde, connaissant a, A et n, trouver r, conduit au taux d'intérêt par le moyen de la somme primitive, de celle qui a été remboursée, et du temps qu'a duré le placement; on a dans ce cas

$$1 + r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}.$$

La troisième, connaissant A, r et n, trouver a, et dans laquelle il vient

$$a = \frac{A}{(1+r)^n},$$

a pour objet de déterminer le capital qu'il faut placer

pour avoir droit, après un nombre n d'années, à une somme A.

La quatrième, connaissant A, a et r, trouver n, ne peut se résoudre que par les logarithmes (238, 252). En prenant celui de chaque membre de l'équation proposée, il vient

$$\mathrm{l}A = \mathrm{l}a + n\,\mathrm{l}(1+r),$$

d'où

$$n = \frac{\mathrm{l}A - \mathrm{l}a}{\mathrm{l}(1+r)}.$$

Par cette dernière, on trouve dans combien d'années le capital a doit avoir produit une somme A.

Pour en donner un exemple, je suppose qu'on demande le temps qu'il faut pour que la somme primitive soit doublée, le taux de l'intérêt étant toujours à 5 p. $\frac{0}{0}$; on aura

$$A = 2a, \quad \mathrm{l}A = \mathrm{l}a + \mathrm{l}2,$$

et par conséquent

$$n = \frac{\mathrm{l}2}{\mathrm{l}\frac{21}{20}} = \frac{\mathrm{l}2}{\mathrm{l}21 - \mathrm{l}20} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} = 14{,}21$$

environ.

259. La question suivante est une des plus compliquées qu'on propose ordinairement sur ce sujet. On suppose que le prêteur place chaque année une nouvelle somme qu'il joint au capital de cette année, et cela pendant un nombre n d'années; on demande quel est, au bout de la dernière, le montant de toutes ces sommes accumulées avec leurs intérêts composés. Soient a, b, c, d, ... k, les sommes placées, la première, la seconde, la troisième, la quatrième, etc., année; la somme a demeurant entre les mains de l'emprunteur pendant un nombre n d'années, deviendra

$$a\,(1+r)^n;$$

la somme b, qui n'y reste que $n-1$ années, se changera en

$$b\,(1+r)^{n-1};$$

la somme c, prêtée pendant $n-2$ années seulement, deviendra

$$c\,(1+r)^{n-2}$$

et ainsi des autres; enfin la dernière, k, qui n'est employée que pendant un an, ne donnera que

$$k\,(1+r):$$

on aura donc

$$A=a(1+r)^n+b(1+r)^{n-1}+c\,(1+r)^{n-2}\ldots.+k(1+r).$$

En calculant chaque terme du second membre séparément, on obtiendra la valeur de A.

L'opération se simplifie beaucoup lorsque

$$a=b=c=d\ldots.=k,$$

car dans ce cas on a

$$A=a(1+r)^n+a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}\ldots.+a(1+r);$$

le second membre de cette équation forme une progression par quotient, dont le premier terme est $a\,(1+r)$, le dernier $a\,(1+r)^n$, le quotient $1+r$, et dont la somme est par conséquent

$$\frac{a\,(1+r)^{n+1}-a\,(1+r)}{r}\ (232):$$

on aura donc alors

$$A=\frac{a(1+r)\,[(1+r)^n-1]}{r}.$$

Cette équation présente aussi quatre questions, correspondantes à celles que j'ai énoncées sur l'équation

$$A=a\,(1+r)^n.$$

260. Les placemens qu'on nomme *annuités* sont in-

verses du précédent : c'est l'emprunteur qui s'acquitte d'un capital avec ses intérêts, en divers paiemens faits à des termes également éloignés. Les paiemens effectués par l'emprunteur avant la fin du remboursement, peuvent être considérés comme des avances faites au prêteur sur ce remboursement, et dont la valeur dépend du temps qui s'écoule entre l'une de ces époques et l'autre. Ainsi, en désignant chaque paiement par a, le premier paiement qui a lieu $n-1$ années avant l'expiration du dernier terme, rapporté à cette époque, vaut nécessairement $a(1+r)^{n-1}$; le second, rapporté à la même époque, ne vaut que $a(1+r)^{n-2}$; le troisième, $a(1+r)^{n-3}$, et ainsi des autres jusqu'au dernier, qui n'a que la valeur a. Mais d'un autre côté, la somme prêtée étant représentée par A, vaudra entre les mains de l'emprunteur, après n années, un capital $A(1+r)^n$ qui devra être égal à toutes les avances réunies que le prêteur a reçues de lui; on aura donc

$$A(1+r)^n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + a(1+r)^{n-3} \ldots + a,$$

ou, en calculant la somme de la progression que forme le second membre,

$$A(1+r)^n = \frac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{r},$$

équation dans laquelle on peut prendre alternativement pour inconnue la quantité A, que j'appellerai le *prix* de l'annuité, parce que c'est la somme qu'elle représente; la quantité a, qui est la *quotité* de l'annuité; la quantité r, qui est le taux de l'intérêt, et enfin la quantité n, qui exprime la durée de l'annuité.

Pour trouver cette dernière, il faut nécessairement recourir aux logarithmes; on dégage d'abord $(1+r)^n$, ce qui donne

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - Ar},$$

et en prenant les logarithmes, il vient

$$n\,l\,(1+r) = l\,a - l\,(a - Ar),$$

d'où

$$n = \frac{l\,a - l\,(a - Ar)}{l\,(1+r)}.$$

261. Pour montrer l'usage des formules ci-dessus, je les appliquerai à la question suivante :

Trouver quelle somme il faut donner annuellement pour éteindre en 12 *ans, une dette de* 100 *francs avec ses intérêts pendant ce temps, l'intérêt annuel étant à* 5 p. $\frac{0}{0}$.

Dans cet exemple, on connaît les quantités

$$A = 100, \quad n = 12, \quad r = \frac{1}{20},$$

et on demande l'annuité a; l'équation

$$A\,(1+r)^n = \frac{a\,[(1+r)^n - 1]}{r}$$

étant résolue par rapport à la lettre a, donne

$$a = \frac{Ar\,(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

Il faut mettre dans cette expression les valeurs des lettres A, r et n, et pour plus de facilité, calculer d'abord, au moyen des logarithmes, la quantité $(1+r)^n$, qui revient à $(\frac{21}{20})^{12}$; on trouvera

$$(\tfrac{21}{20})^{12} = 1{,}79586.$$

Au moyen de cette valeur, il viendra

$$a = \frac{100 \cdot \frac{1}{20} \cdot 1{,}79586}{1{,}79586 - 1} = \frac{5 \cdot 1{,}79586}{0{,}79586};$$

et en évaluant la dernière expression, soit immédiatement, soit par les logarithmes, on obtiendra

$$a = 11{,}2826:$$

il faudra donc une annuité de $11^{fr},28$ pour éteindre en 12 ans le capital 100^{fr}, le taux annuel d'intérêt étant à 5 pour $\frac{0}{0}$.

262. De plus grands détails sur ces questions passeraient les bornes que je me suis prescrites; j'observerai seulement que, pour comparer la valeur de plusieurs sommes, par rapport à celui qui doit les payer ou les recevoir, il faut les réduire à la même époque, c'est-à-dire, chercher ce qu'elles donneraient de capital à une même époque. Un banquier, par exemple, doit une somme a payable dans n années; pour s'acquitter, il donne un effet dont la valeur est représentée par b, et doit se payer dans p années; en rapportant la première somme au moment où il effectue son opération, elle ne vaut que $\frac{a}{(1+r)^n}$, parce qu'elle doit être considérée comme la valeur primitive d'un capital devenu a, après n années; la somme b ne vaut, par la même raison, à cette époque que $\frac{b}{(1+r)^p}$: la différence

$$\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{(1+r)^p}$$

marquera donc, suivant qu'elle sera positive ou négative, ce que doit donner ou recevoir le banquier en retour de son échange; et si ce retour ne pouvait se payer que dans un nombre q d'années, en désignant par c sa valeur au moment de l'opération, il deviendrait

$$c\,(1+r)^q;$$

en sorte qu'il serait équivalent à

$$\left(\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{(1+r)^p}\right)(1+r)^q = a(1+r)^{q-n} - b(1+r)^{q-p}.$$

Les sommes a, b.....k, dans le n° 259, ont toutes été réduites à l'époque où devait se payer la somme A; et dans le numéro 260, chacun des paiemens, ainsi que la somme A, a été rapporté à l'époque où devait se terminer l'annuité.

FIN.

ADDITION.

Note indiquée sur la page 110.

Dans les nos 66 et 75, j'ai interprété les solutions négatives, par l'examen de l'équation qu'elles vérifient immédiatement, ainsi que j'en avais usé plus haut; et ce moyen me paraît toujours exact, parce qu'il s'agit seulement de montrer que ces solutions ont un sens raisonnable, puisqu'elles résolvent des questions analogues à la proposée; mais il y a souvent plusieurs manières de former ces questions; et la suivante, que m'a communiquée feu M. Français, géomètre distingué, professeur à l'Ecole d'Artillerie de Mayence, m'a semblé plus simple que celle qu'on trouve dans ces Elémens.

« Il pense qu'on doit écarter de l'énoncé de la question du » no 65, l'idée du départ des couriers, pour les supposer en route » depuis un temps indéfini, et qu'en conséquence il faudrait la » poser ainsi : *Deux couriers suivent la même route dans le même* » *sens*, C'ABC (page 99); *après qu'ils ont couru chacun un* » *temps quelconque, l'un se trouve en* A *à l'instant où l'autre* » *est en* B; *on connaît leurs vîtesses et la distance* AB : *on de-* » *mande en quel point de la route ils se rencontreront ?* »

Cet énoncé conduit à la même équation que celui du n° 65; mais « dès qu'on établit la continuité du mouvement, la solution » négative s'explique sans qu'il soit nécessaire de changer la direc- » tion de l'un des couriers. En effet, puisque leur mouvement n'a » point commencé aux points A et B, mais que tous deux, avant » l'instant où on les suppose parvenus à ces points, s'étaient déjà » mus de la même manière pendant un temps indéfini, en allant » de C' vers B, il est facile de concevoir que le courier qui de- » vance à ce point celui qui est alors en A, lequel va moins vîte, » a dû, à une certaine époque, se trouver en arrière de celui-ci, » et le rencontrer avant son arrivée au point A. Le signe — indique » alors (comme dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie), » qu'il faut prendre la distance AR' dans le sens opposé à la dis- » tance AR qu'on a regardée comme positive. Le changement à » faire dans l'énoncé, pour que la solution négative devienne po- » sitive, se réduit à établir que les couriers ont dû se rencontrer » avant d'arriver au point A, au lieu de le faire après. »

En effet, quand on place le point R' entre A et C, au lieu de le mettre entre A et B, on trouve $AB = BR' - AR'$; d'où il résulte l'équation $y - x = a$, au lieu de $x - y = a$ qu'on avait obtenue d'abord ; et il n'est pas besoin de changer le signe de c, la seconde équation demeurant $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$.

M. Français applique, non moins heureusement, ces considérations, au cas du n° 75, en remplaçant les couriers par des mobiles soumis à un mouvement continu et commencé depuis un temps indéfini. Il énonce ainsi le problème : « *Deux mobiles se meuvent* » *uniformément sur la même droite* CB (pag. 109), *l'un dans* » *la direction* BC, *l'autre dans la direction* CB, *avec des vitesses* » *données ; celui qui se meut dans le premier sens, se trouve* » *en* B, *un nombre connu d'heures avant que l'autre ne soit* » *parvenu en* A : *on demande en quel point de la droite indéfi-* » *nie* BC *se fait leur rencontre ?*

» La solution $x = -48^{km}$ veut dire, que les deux mobiles se » sont rencontrés au point R, avant que celui qui vient de C vers B, » fût arrivé au point A, et que le second, qui va de B vers C, le fût » au point C où il se trouve quand l'autre est au point A. »

La position assignée au point R se vérifie en observant qu'il en résulte $AC = BC - AB = cd - a$, au lieu de $a + cd$ qu'on avait obtenu d'abord (pag. 108), et par conséquent $\frac{x}{b} = \frac{cd - a - x}{c}$, équation qui donne $x = 48$.

De cette manière, il n'y a aucun renversement à faire au sens du mouvement : à la vérité les circonstances matérielles du problème sont changées ; et, comme je l'ai dit plus haut, cela prouve qu'il existe plusieurs questions physiques correspondantes aux mêmes relations mathématiques : mais les énoncés ci-dessus ont l'avantage de ne pas blesser la loi de continuité, et se rapprochent ainsi de la considération des lignes, qui peint de la manière la plus simple et la plus générale, les circonstances du changement de signe des grandeurs. (Voyez le *Traité élémentaire de Trigonométrie et d'application de l'Algèbre à la Géométrie.*)

De l'Imprimerie de HUZARD-COURCIER, rue du Jardinet.

00052002

Digitized with financial assistance from

H T Parekh FOUNDATION

An Initiative by HDFC WITH YOU, RIGHT THROUGH

on 28 December, 2018